不一致决策系统中基于粒度计算的广义决策规则获取方法研究

蒙祖强 周石泉
(广西大学计算机与电子信息学院 南宁 530004)

摘 要 由于数据中存在噪声等主观和客观原因,不一致数据的出现和存在已变得十分普遍,因此需要发展一些能够直接分析和处理不一致数据的方法和技术。研究了不一致决策系统中的广义决策规则获取问题,基于粒度计算探讨了决策规则获取的基本原理,据此给出了计算所有极小广义决策规则集的一般方法。该方法不需要构造分辨矩阵,且可以并行执行,从而可降低空间开销和提高计算效率。此外,可对该方法进行拓展,以用于计算其他类型的极小决策规则集。这为不一致决策系统中的规则获取提供了一般方法。

关键词 规则获取,不一致决策系统,粒度计算,广义决策规则
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Research on Method of Generalized Decision Rule Acquisition Based on GrC in Inconsistent Decision Systems

MENG Zu-qiang ZHOU Shi-quan
(College of Computer, Electronics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract Because of various subjective and objective factors such as noise in data, inconsistent data occurs more frequently in recent years. This requires exploring some method and technique that can directly analyze and deal with such inconsistent data. This paper studied generalized decision rule acquisition inconsistent decision systems. It first analyzed the basic principle of decision rule acquisition based GrC, and then gave a general method of computing all minimum generalized decision rule sets. This method has no need of constructing discernibility matrix and can be executed concurrently, so it has relatively low space cost and relatively high efficiency. In addition, it also can be easily expanded to compute all minimum generalized decision rule sets of other types. This provides a general method of rule acquisition in inconsistent decision systems.

Keywords Rule acquisition, Inconsistent decision system, GrC, Generalized decision rule

1 引言

作为一种处理不完整和不确定性知识的数学工具,Rough集理论[1]经过近30年发展历程已取得了很大的进步,在智能信息处理、模式识别、智能控制和数据挖掘等领域已发挥了重要的作用[2]。目前的研究成果主要集中在一致决策系统的属性约简[3-6]及决策规则提取[7-9]方面,相应的方法和技术都比较成熟。但由于噪声数据、数据的压缩表示以及预测能力等因素[10],在实际应用中遇到的数据通常是不一致的;而且随着近年来计算机技术和网络技术在各个应用领域的普及,应用中所产生的数据在内容和形式上日趋复杂化,不一致数据的出现已变得更为普遍,需要我们发展一些能够直接处理和分析不一致数据的理论、方法和技术。同时我们注意到,针对不一致决策系统的知识约简和知识发现的研究也逐渐受到学者们的关注,这无疑迎合了这种应用的需要。

决策系统出现不一致性的根本原因在于,系统中至少存在一个等价类(关于条件属性)与两个或两个以上的决策类相交,导致出现了多种不同类型的约简。例如,Kryszkiewicz给出了不一致决策系统的5种约简定义[11]:可能约简、近似约简、广义决策约简、μ决策约简、μ约简,并讨论不确定规则的不确定性度量方法,但没有给出相应规则的一般获取方法。张文修等提出了分布约简、分配约简和最大分布约简的概念[12,13],并给出了基于分辨矩阵的计算各类约简中所有约简的方法,但没有涉及决策规则获取方法。针对分布约简、分配约简和最大分布约简,文献[14]给出了基于分辨矩阵的规则(分配、分布、最大分布规则)获取方法,但这种方法没有涉及到决策规则集的极小化问题,而且通过分辨矩阵来提取规则会造成时间和空间资源的极大开销。总之,在不一致系统中,目前针对属性约简的研究相对较多,而针对规则提取的研究在理论和方法上都相对欠缺。本文将通过粒度计算的方法探讨广义决策规则获取的基本原理,然后据此计算所有极小广义决策规则集的一般方法。此方法的优点是不像计算所有属性约简那样,通过建立庞大的分辨矩阵来实现,而是通过直接构建等价类(粒)的分辨函数并通过运用吸收律在构建分辨函

到稿日期:2011-02-15 返修日期:2011-03-01 本文受国家自然科学基金项目(61063032),广西教育厅科研基金项目(201012MS010)资助。
蒙祖强 男,博士后,教授,硕士生导师,主要研究方向为粒度计算、知识发现等,E-mail:zqmeng@126.com。

数的同时对其简化，并且可以并行执行，从而降低资源开销和提高计算效率，求出所有的极小决策规则集。这种方法只要稍加改动，即可用于获取其他类型的规则（如近似约简规则等），为不一致决策系统中的规则获取提供了一般方法。

2 相关概念

从粒度计算的角度看，决策系统中的规则提取本质上是提取具有特定关系的粒的描述，并由这些描述来构造蕴涵式而形成决策规则。粒的描述通常是由决策逻辑语言（DL，Decision Logic Language）[15]来表示，而决策逻辑语言系统的定义依赖于信息系统。因此，本节先简要介绍信息系统、决策逻辑语言及相关概念。

一个信息系统（IS，Information System）可表示为三元组：

$IS=\langle U,A,\{V_a\},f_a\rangle_{a\in A}$

式中，U 是论域，表示非空有限对象（样本）的集合；A 是非空有限属性的集合；V_a 是对象在属性 $a\in A$ 上所有可能取值的集合（即 a 的值域）；$f_a:U\to V_a$ 是论域 U 到值 V_a 上的映射，称为信息函数（information function）。

一个信息系统可以用一个二维关系表来表示，称为信息表，表中每一行表示一个对象，每一列表示一个属性列。在不引起混淆的情况下，一个信息系统也可简写为 $IS=\langle U,A\rangle$。

利用信息函数 f_a 可以构造 U 上关于属性集 $B\subseteq A$ 的关系 R_B：

$R_B=\{\langle s_1,s_2\rangle \mid f_a(s_1)=f_a(s_2)$，for any $a\in B$ and $s_1,s_2\in U\}$

易证，R_B 是一个关于 B 的等价关系。为表述方便，R_B 直接写成 B，U 关于 B 的商集写为 U/B。记 $AllGS=\{G\in U/B\mid B\in P(A)\}$，$AllGS$ 称为 IS 上的全粒度空间，G 是 $AllGS$ 中的粒，$P(A)$ 表示 A 的幂集，B 为非空属性集。对任意 $G\in U/B$，G 实际上是关于 B 的等价类。如果要强调 B 的作用，G 可记为 G_B，也可以按照数学上通常的写法记为 $[x]_B$，其中 x 是相应等价类（粒）中的一个对象。

信息系统是通过属性-值对来刻画对象的，而属性-值对是决策逻辑语言的基础。因此，属性-值对是信息系统（准确地说，是全粒度空间）和决策逻辑语言之间联系的纽带。

定义 1 对于信息系统 $IS=\langle U,A,\{V_a\},f_a\rangle_{a\in A}$，其决策逻辑语言 DL 由下面定义的公式组成[15]：

（1）(a,v) 称为原子公式，其中 $a\in A,v\in V_a$；

（2）原子公式是 DL 中的公式；

（3）如果 ϕ 是 DL 中的公式，则 $\sim\phi$ 也是 DL 中的公式；

（4）如果 ϕ 和 φ 都是 DL 中的公式，则 $\phi\vee\varphi,\phi\wedge\varphi,\phi\to\varphi,\phi\leftrightarrow\varphi$ 都是 DL 中的公式；

（5）只有有限次运用（1）至（4）构成的公式才是 DL 中的公式。

如果需要强调 DL 是与 IS 相关的决策逻辑语言，则将 DL 表示为 DL_{IS}。如果 ϕ 是 DL_{IS} 中的公式，则简单将其记为 $\phi\in DL_{IS}$。

定义 2 对任意 $s\in U$，s 与 DL 中公式的关系定义如下[16]：

（1）$s\mid=(a,v)$ iff $f_a(s)=v$；

（2）$s\mid=\sim\phi$ iff not $s\mid=\phi$；

（3）$s\mid=\phi\wedge\varphi$ iff $s\mid=\phi$ and $s\mid=\varphi$；

（4）$s\mid=\phi\vee\varphi$ iff $s\mid=\phi$ or $s\mid=\varphi$；

（5）$s\mid=\phi\to\varphi$ iff $s\mid=\sim\phi\vee\varphi$；

（6）$s\mid=\phi\leftrightarrow\varphi$ iff $s\mid=\phi\to\varphi$ and $s\mid=\varphi\to\phi$。

通常，当 $s\mid=\phi$ 时，称对象 s 满足公式 ϕ，或称公式 ϕ 覆盖对象 s。

对于公式 ϕ，令 $m(\phi)=\{s\in U\mid s\mid=\phi\}$。对任意子集 $X\subseteq U$，如果存在 DL 中的公式 ϕ，使得 $m(\phi)=X$，则称 X 是 DL 中可描述的。容易看出，AllGS 中的粒都是可描述的。但是，一个粒的描述并不唯一，即对同一个粒 G，可能存在两个不同的公式 ϕ_1 和 ϕ_2，使得 $m(\phi_1)=m(\phi_2)=G$，这是导致同一个决策系统出现多种不同极小决策规则集的根本原因。为表述起见，我们用 $DES(G)$ 表示 G 的某一个描述。具体是哪一个描述，则要根据上下文来确定。

如果公式 ϕ 仅是由若干个原子公式构成的简单合取式，则 ϕ 称为基本公式。显然，对 $AllGS$ 中的任何粒，其描述至少有一个基本公式。在一个基本公式中，原子公式的个数称为该公式的长度。

3 决策系统中规则获取的基本原理

决策系统（DS，Decision System）可以视为将信息系统 $\langle U,A\rangle$ 中的属性集 A 分裂为两个不相交的属性子集 C 和 D 而形成，其中 C 和 D 分别称为条件属性集和决策属性集。也就是说，决策系统 $\langle U,C\cup D\rangle$ 也可以看成由信息系统 $\langle U,C\rangle$ 和 $\langle U,D\rangle$ 组成，这两个子系统分别记为 $IS(C)$ 和 $IS(D)$。

本文中，决策系统表示如下：

$DS=\langle U,C\cup D,\{V_a\},f_a\rangle_{a\in C\cup D}$

式中，$C\cap D=\varnothing$。$\langle U,C\cup D,\{V_a\},f_a\rangle_{a\in C\cup D}$ 亦可简记为 $\langle U,C\cup D\rangle$。不失一般性，约定 $D=\{d\}$，即 D 仅由一个决策属性 d 构成。如果存在 $G_1\in U/C$（$\subseteq AllGS_{IS(C)}$）和 $G_2,G_3\in U/D$（$\subseteq AllGS_{IS(D)}$），且 $G_2\neq G_3$，使得 $G_1\cap G_2\neq\varnothing$ 且 $G_1\cap G_3\neq\varnothing$，则该决策系统是不一致的。

在决策系统中，定义函数 $\partial_B:U\to P(V_d)$，$B\subseteq C$：

$\partial_B(s)=\{f_d(y)\mid y\in[s]_B\}$

该函数称为决策系统的广义决策函数[11]。可以看到，$\partial_B(s)$ 的值就是粒 $[s]_B$ 中的对象在决策属性 d 上的取值集合。由该函数，我们也可以等价地定义系统的不一致性：如果对所有 $s\in U$，均有 $|\partial_C(s)|=1$，则该决策系统是一致的，否则是不一致的。本文正是基于广义决策函数来提取决策系统中的规则的，由这种方法得到的规则称为广义决策规则[11]。

对于分别在 $DL_{IS(C)}$ 和 $DL_{IS(D)}$ 中可描述的两个子集 X_1，$X_2\subseteq U$，如果 $X_1\subseteq X_2$，则规则

$DES(X_1)\to DES(X_2)$

是决策系统 $\langle U,C\cup D\rangle$ 中的一条决策规则，其中 $DES(X_1)\in DL_{IS(C)}$，$DES(X_2)\in DL_{IS(D)}$。

一般地，对任意 $\phi\in(DL_{IS(C)}$ 和 $\varphi\in DL_{IS(D)}$，蕴涵式 $\phi\to\varphi$ 称为 DS 中的一条决策规则，ϕ 和 φ 分别称为规则的前件和后件。如果前件 ϕ 是基本公式，则该规则称为基本决策规则。如果后件 φ 仅由一个原子公式构成，即 φ 具有形式 (d,v)，则该规则是确定的；如果 φ 是简单析取式 $(d,v_1)\vee(d,v_2)\vee\cdots\vee(d,v_n)$，则该规则是不确定的。不一致决策系统必定出现不确定的决策规则[11]。

如果规则 $\phi\rightarrow\varphi$ 在 DS 中为真，即 $|=_{DS}\phi\rightarrow\varphi$，则称 $\phi\rightarrow\varphi$ 在 DS 中是相容的；如果 $\phi\wedge\varphi$ 在 DS 中是可满足的，即存在 $s\in U$，使得 $s|=\phi\wedge\varphi$，则称 $\phi\rightarrow\varphi$ 在 DS 中是容许的。相容性和容许性是决策规则应该满足的基本要求。

理论上，决策系统中的每个对象都是一条决策规则，它能覆盖的范围就是其所在的粒（关于 C 的等价类）。但这样的决策规则可能包含冗余属性，需要将它们删除。

定理 1 在决策系统 $\langle U,C\cup D\rangle$ 中，对任意 $B\subseteq C$，均有 $[s]_C\subseteq[s]_B$，其中 $s\in U$。

证明：任取 $z\in[s]_C$，有 $\langle s,z\rangle\in R_C$。根据 R_C 的定义，对所有 $a\in C$，均有 $f_a(s)=f_a(z)$。由于 $B\subseteq C$，故对所有 $a\in B$，显然有 $f_a(s)=f_a(z)$，从而说明 $\langle s,z\rangle\in R_B$，于是 $z\in[s]_B$。这说明 $[s]_C\subseteq[s]_B$。证毕。

定理 1 说明，随着从 C 中删除属性，所有的等价类（粒）都有可能变大（也有的可能不变，但绝不会变小）。当变大到什么程度就不能再增大呢（扩展的上确界是什么）？对于不一致决策系统来说，分两种情况讨论。

(1) $[s_1]_C\subseteq[s_1]_D$（即 s_1 所在的关于 C 的粒包含于 s_1 所在的关于决策属性集 D 的等价类）：假设从 C 中某些属性后得到 B，这时仍然有 $[s_1]_B\subseteq[s_1]_D$，这表明 $C-B$ 中的属性是可以删除的；如果进一步将 a 从 B 中删除，导致 $[s_1]_{B-\{a\}}\not\subseteq[s_1]_D$，则 a 是当前不可删除的属性。

(2) $[s_2]_C\subseteq[s_2']_D\cup[s_2'']_D$，且 $[s_2]_C\cap[s_2']_D\neq\varnothing$ 和 $[s_2]_C\cap[s_2'']_D\neq\varnothing$，$s_2'\neq s_2''$（即 $[s_2]_C$ 恰好与两个不同的决策类 $[s_2']_D$ 和 $[s_2'']_D$ 相交，这时 $[s_2]_C$ 必定包含于这两个决策类的并。当 $[s_2]_C$ 与两个以上的决策类相交时，可依此类推）：这种情况是不一致决策系统特有的。由于 $[s_2]_C$ 本来就已经“超越”了 $[s_2']_D$ 和 $[s_2'']_D$，因此不能像情况(1)那样限制 $[s_2]_C$ 不能超过 $[s_2']_D$ 或者 $[s_2'']_D$。就属性约简来说，采用不同限制就出现了不同的约简[11]。例如，如果限制 $[s_2]_C$ 扩大后不能超过 $[s_2]_C$ 的上近似，则得到近似约简；如果限制不能超过 $[s_2]_C$ 的下近似，则得到正域保持约简等。作为一个例子，本文的做法是：$[s_2]_C$ 的扩大不能超过 $[s_2']_D$ 和 $[s_2'']_D$ 的并 $[s_2']_D\cup[s_2'']_D$。这实际上就是文献[11]介绍的基于广义决策函数定义的广义决策约简，但该文并没有给出广义决策规则获取的方法。

下面用 $sup([s]_C)$ 表示粒 $[s]_C$ 扩展的上确界。从上面的讨论可以看到，问题的关键是如何定义一个粒的上确界。这有多种定义方法，不同的方法会得到不同的决策规则。一种方法是用广义决策函数 ∂ 来定义粒的上确界：

$$sup([s]_C)=\{s'\in U\mid f_d(s')\in\partial_C(s)\}$$

可以证明，如果 $\partial_C(s)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n'}\}$，且 $f_d(s_1')=v_1$，$f_d(s_2')=v_2,\cdots,f_d(s_{n'}')=v_{n'}$，则 $sup([s]_C)=[s_1']_D\cup[s_2']_D\cup\cdots\cup[s_{n'}']_D$，即 $sup([s]_C)$ 等于所有与 $[s]_C$ 相交的决策类的并。

对于上面讨论的粒（等价类）的扩展原理可以用图 1 来示意，其中 $sup([s_1]_C)=[s_1]_D$，$sup([s_2]_C)=[s_2']_D\cup[s_2'']_D$。

在充分扩展粒（通过删除属性来实现）以后，就可以提取广义决策规则了。提取方法是：以扩展后的粒的描述作为前件，以与其相对应上确界的描述作为后件，由此构成的蕴涵式就是所谓的广义决策规则。这时提取的规则已经具有较大的适应性，因为粒扩展后规则的前件可以充分覆盖它所能覆盖的对象。例如，假设 $[s_1]_C$ 和 $[s_2]_C$ 充分扩展后分别得到 $[s_1]_{B1}$ 和 $[s_2]_{B2}$，则下列规则便是我们需要的广义决策规则：

$$r_1:DES([s_1]_{B1})\rightarrow DES([s_1]_D)$$

$$r_2:DES([s_2]_{B2})\rightarrow DES([s_2']_D\cup[s_2'']_D)$$

式中，r_1 是确定规则，r_2 是不确定规则。容易看出，在确定了粒（关于 C）的上确界后，针对不同上确界的规则提取操作可以并行执行，同时在各个规则提取任务中问题规模已经较大地缩小了，从而有效提高了整个规则获取过程的效率。

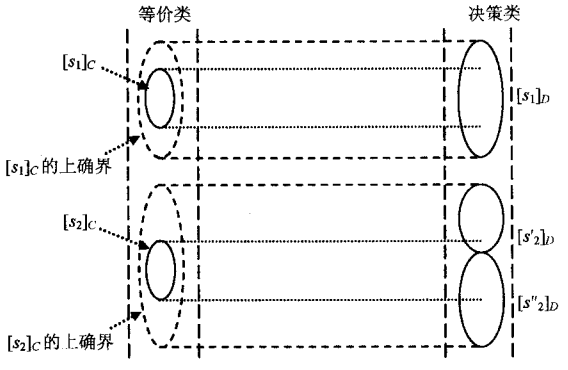

图 1 粒的扩展原理示意图

以上虽然展示了广义决策规则获取的基本原理，但在删除属性时是否导致粒超过其上确界，却依赖于该属性与其他属性的组合情况，这在上文中没有得到体现。因此，如何得到所有可能的最小属性组合，这是一个关键的问题。另外，所提取的规则不但要求是相容和容许的，而且所得到的规则集中最好不出现功能重复的规则（否则有些规则是冗余的）。因此，极小化规则集又是规则获取的另一个重要的问题。下面将借助上述基本原理的几何意义，并通过构造粒的分辨函数来提取所有的极小决策规则集。

4 不一致决策系统中极小规则集获取的一般方法

以下先引入相关的概念和定理，然后介绍极小规则集获取的一般方法。另外，如无特别说明，下面提到的规则一般都是指广义决策规则。

对决策系统中的任意粒 $[s]_C$，我们都可以提取一条决策规则：$DES([s]_C)\rightarrow DES(sup([s]_C))$。但该规则不具有适应性，其中可能还包含一些冗余属性，即它还没有被约简。

定义 3 在不一致决策系统 $DS=\langle U,C\cup D\rangle$ 中，称 $[s]_B$ 是已充分扩展的，如果 $[s]_B\subseteq sup([s]_C)$ 且对任意 $B'\subset B$，$[s]_{B'}\not\subseteq sup([s]_C)$，其中 $s\in U$，$B\subseteq C$。

如果 $[s]_B$ 是已充分扩展的，则 B 是极小的，即 B 中任意属性都不能被删除了，否则它将超越 $[s]_C$ 的上确界。如果 B 是极小的，不难看出 $[s]_B$ 在 $DL_{IS(C)}$ 中的描述 $DES([s]_B)$ 是唯一的。

定义 4 在不一决策系统 $DS=\langle U,C\cup D\rangle$ 中，规则 $DES([s]_B)\rightarrow DES(sup([s]_C))$ 称为已约简的广义决策规则，如果 $[s]_B$ 是已充分扩展的，其中 $s\in U$，$B\subseteq C$。

定理 2 对于不一致决策系统 $DS=\langle U,C\cup D\rangle$，$B\subseteq C$，有以下结论：

(1) 如果对任意 $s'\in U-sup([s]_C)$，总存在 $a\in B$，使得 $s'\notin[s]_{\{a\}}$，则 $[s]_B\subseteq sup([s]_C)$；

(2) 如果 $[s]_B\subseteq sup([s]_C)$，且 B 是极小的，即对任意 $B'\subset B$，

$[s]_B \not\subseteq sup([s]_C)$，则 $DES([s]_B) \rightarrow DES(sup([s]_C))$ 是已约简的广义决策规则。

证明：(1) 假设 $[s]_B \not\subseteq sup([s]_C)$，则存在 $z \in [s]_B$，但 $z \notin sup([s]_C)$，故 $z \in U - sup([s]_C)$。根据题意，存在 $a \in B$，使得 $z \notin [s]_{\{a\}}$。因为 $\{a\} \subseteq B$，由定理 1，$[s]_B \subseteq [s]_{\{a\}}$，从而 $z \notin [s]_B$。这与 $z \in [s]_B$ 相矛盾，因此假设不成立，即结论(1)成立。

(2) 由于 $[s]_B \subseteq sup([s]_C)$，且对任意 $B' \subset B$，$[s]_{B'} \not\subseteq sup([s]_C)$，这说明 $[s]_B$ 是已充分扩展的。根据定义 4，$DES([s]_B) \rightarrow DES(sup([s]_C))$ 为已约简的广义决策规则。证毕。

假设 B 为一属性集，ϕ 为决策逻辑公式，令 $\vee B$ 和 $\wedge B$ 分别表示由 B 中的属性构成的简单析取式和简单合取式，$set(\phi)$ 表示出现在公式 ϕ 中的属性的集合。例如，如果 $B=\{a,b,c\}$，则 $\vee B = a \vee b \vee c$，$\wedge B = a \wedge b \wedge c$；如果 $\phi = a \wedge b \wedge c$，则 $set(\phi)=\{a,b,c\}$。

定义 5 对于不一致决策系统 $DS=\langle U, C \cup D\rangle$，令 $\alpha([s]_C, s') = \vee\{a \in C \mid s' \notin [s]_{\{a\}}\}$，其中 $s, s' \in U$；假设 $U - sup([s]_C) = \{s_1', s_2', \cdots, s_m'\}$，则粒 $[s]_C$ 的分辨函数定义如下：

$$f([s]_C) = \alpha([s]_C, s_1') \wedge \alpha([s]_C, s_2') \wedge \cdots \wedge \alpha([s]_C, s_m')$$

显然，$f([s]_C)$ 是一个合取范式。在充分应用吸收律和分配律后，$f([s]_C)$ 可以转化为简化的析取范式。假设转化结果为 $\rho_1 \vee \rho_2 \vee \cdots \vee \rho_{m'}$，其中每一个 ρ_i 都是一个简单合取式。由吸收律的性质可知，对任意 $\rho_i \in \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{m'}\}$，不存在另一个 $\rho_j \in \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{m'}\}$，使得 $set(\rho_i) \subseteq set(\rho_j)$；由分配律和定理 2 可知，对任意 $\rho_i \in \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{m'}\}$，均有 $[s]_{set(\rho_i)} \subseteq sup([s]_C)$。据此可以证明，以下规则都是由粒 $[s]_C$ 导出的已约简的广义决策规则：

$r_1: DES([s]_{set(\rho_1)}) \rightarrow DES(sup([s]_C))$

$r_2: DES([s]_{set(\rho_2)}) \rightarrow DES(sup([s]_C))$

……

$r_{m'}: DES([s]_{set(\rho_{m'})}) \rightarrow DES(sup([s]_C))$

以上是粒 $[s]_C$ 导出的规则集。由于这时 $[s]_{set(\rho_i)}$ 已充分扩展，$set(\rho_i)$ 已极小化(其中的属性不能再被删除，否则会超越上确界)，因此 $[s]_{set(\rho_i)}$ 在 $DL_{IS(C)}$ 中的描述是唯一的。

关于 C 的不同的粒 $[s']_C$ 和 $[s'']_C$ 可能有相同的上确界，即 $sup([s']_C) = sup([s'']_C)$。在这种情况下，$[s']_C$ 导出规则中有的可能覆盖 $[s'']_C$ 中的对象，反之亦然。为了获取整个决策系统的极小规则集，下面先介绍如何获取能覆盖同一上确界中的对象的极小规则集。

假设不同的粒 $[s_1']_C, [s_2']_C, \cdots, [s_p']_C$ 具有相同的上确界，不妨设该上确界为 $sup([s_1']_C)$。同时假设粒导出的规则的集合 $\mathcal{R}=\{r_1, r_2, \cdots, r_{p'}\}$。令 $cov([s_i']_C)$ 表示能覆盖 $[s_i']_C$ 中对象的规则的集合，即 $cov([s_i']_C) = \{r \in \mathcal{R} \mid s \mid = r, s \in [s_i']_C\}$。显然，$cov([s_i']_C) \subseteq \mathcal{R}$。令 $g(sup([s_1']_C)) = (\vee cov([s_1']_C)) \wedge (\vee cov([s_2']_C)) \wedge \cdots \wedge (\vee cov([s_p']_C))$，$g(sup([s_1']_C))$ 也是一个合取范式，我们称为上确界 $sup([s_1']_C)$ 的分辨函数。将该函数转化为简化的析取范式，假设转化结果为 $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_{p'}$，则每个 $set(\beta)$ 都是能覆盖 $[s_1']_C \cup [s_2']_C \cup \cdots \cup [s_p']_C$ 中所有对象的极小规则集，称为上确界 $sup([s_1']_C)$ 导出的极小规则集。因此，$set(\beta_1), set(\beta_2), set(\beta_{p'})$ 是上确界 $sup([s_1']_C)$ 所能导出的全部极小规则集。从每个上确界导出的全部极小规则集中选出且仅选出一个极小规则集，然后将它们并起来，就得到整个决策系统的一个极小规则集。所有这样的组合而形成的极小规则集的全体便是整个决策系统的所有极小规则集。

根据以上分析，求取不一致决策系统 $DS=\langle U, C \cup D\rangle$ 的所有极小的已约简的广义决策规则集的一般方法如下：

(1) 计算商集 U/C 和 U/D，假设 $U/C=\{[s_1]_C, [s_2]_C, [s_t]_C\}$，$s_i \neq s_j, i,j \in \{1,2,\cdots,t\}$；

(2) 对所有 $i \in \{1,2,\cdots,t\}$，利用 U/D 计算 $sup([s_i]_C)$；

(3) 对每一个 $i \in \{1,2,\cdots,t\}$，计算由 $[s_i]_C$ 导出的所有已约简的广义决策规则(可并行)；

(4) 利用上确界的分辨函数，计算每个上确界 $sup([s_i]_C)$ 所能导出的全部极小规则集(可并行)；

(5) 组合各上确界导出的极小规则集，产生整个决策系统的所有极小规则集。

容易看出，$s' \notin [s]_{\{a\}}$ 当且仅当 $f_a(s') \neq f_a(s)$，即对象 s' 和 s 在属性 a 上取值不相等。令 $D_v=\{s \in U \mid f_d(s)=v\}$，即 D_v 表示所有在决策属性 d 上取值为 v 的对象的集合。显然，$D_v \in U/\{d\}$。不难证明，$sup([s]_C) = \cup\{D_v \in U/\{d\} \mid v \in \partial_C(s)\}$，其中 $\cup$ 表示集合运算中的广义并。利用这两个特点，就更容易进行上面的计算。另外，在构造 $f([s]_C)$ 时，不需要创建分辨矩阵，每生成一个 $\alpha([s]_C)$，就运用一次吸收律，这样可以有效减少空间开销，同时提高运算效率[17]。

5 实例分析

考虑不一致决策系统 $DS=\langle U, C \cup D\rangle$，如表 1 所列，其中 $U=\{s_1, s_2, \cdots, s_7\}$，$C=\{a_1, a_2, \cdots, a_7\}$，$D=\{d\}$。

表 1 一个不一致决策系统

U	a_1	a_2	a_3	a_4	d
s_1	1	0	0	0	1
s_2	0	1	0	1	2
s_3	0	3	3	0	2
s_4	0	3	3	0	2
s_5	0	1	2	0	1
s_6	0	1	2	0	3
s_7	0	3	3	0	3

下面利用本文提出的方法来找出该决策系统蕴涵的所有极小规则。步骤如下：

(1)计算商集 U/C，结果 $U/C=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3,s_4,s_7\},\{s_5,s_6\}\}=\{[s_1]_C,[s_2]_C,[s_3]_C,[s_5]_C\}$，$U/D=\{\{s_1,s_5\},\{s_2,s_3,s_4\},\{s_6,s_7\}\}=\{D_1,D_2,D_3\}$；

(2)$sup([s_1]_C) = \cup\{D_v \in U/\{d\} \mid v \in \partial_C(s_1)\} = \cup\{D_v \in U/\{d\} \mid v \in \{1\}\} = \cup\{D_v \in U/\{d\} \mid v \in \{1\}\} = \cup\{D_1\} = D_1 = \{s_1, s_5\}$，同理可求得 $sup([s_2]_C)=\{s_2,s_3,s_4\}$，$sup([s_3]_C)=\{s_2,s_3,s_4,s_6,s_7\}$，$sup([s_5]_C)=\{s_1,s_5,s_6,s_7\}$；

(3)由计算，$U - sup([s_1]_C) = U - \{s_1, s_5\} = \{s_2, s_3, s_4, s_6, s_7\}$，然后做下面的计算任务：

• 计算 $\alpha([s_1]_C, s_2) = \vee\{a \in C \mid s_2 \notin [s_1]_{\{a\}}\} = \vee\{a_1, a_2, a_4\} = (a_1 \vee a_2 \vee a_4)$，类似可得 $\alpha([s_1]_C, s_3) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)$，$\alpha([s_1]_C, s_4) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)$，$\alpha([s_1]_C, s_6) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)$，$\alpha([s_1]_C, s_7) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)$；

• 于是得到 $f([s_1]_C) = (a_1 \vee a_2 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge$

$(a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3)$，充分运用吸收律和分配律后，$f([s_1]_C)$转化为析取范式$(a_3 \wedge a_4) \vee a_1 \vee a_2$；

·对于$a_3 \wedge a_4$，$set(a_3 \wedge a_4)=\{a_3, a_4\}$，由吸收律知道，$set(a_3 \wedge a_4)$已是极小的($a_3$或$a_4$都不能再被删除了)，因此$[s_1]_{set(a_3 \wedge a_4)}$在$DL_{IS(C)}$中的描述$DES([s_1]_{set(a_3 \wedge a_4)})$是唯一的，该描述为$a_3=0 \wedge a_4=0$；$sup([s_1]_C)$在$DL_{IS(D)}$中的描述$DES(sup([s_1]_C))$也是唯一的，为$d=1$。于是，规则$DES([s_1]_{set(a_3 \wedge a_4)}) \rightarrow DES(sup([s_1]_C))$的具体形式是$a_3=0 \wedge a_4=0 \rightarrow d=1$。对于$a_1$和$a_2$，用同样的方法可以导出相关的两条规则$a_1=1 \rightarrow d=1$和$a_2=1 \rightarrow d=1$。这样，由粒$[s_1]_C$导出的所有已约简的广义决策规则如下：

$$\left.\begin{array}{l} r_1: a_3=0 \wedge a_4=0 \rightarrow d=1 \\ r_2: a_1=1 \rightarrow d=1 \\ r_3: a_2=0 \rightarrow d=1 \end{array}\right\} \text{由}[s_1]_C \text{导出的规则}$$

类似地，可由其他粒导出的规则：

$$\left.\begin{array}{l} r_4: a_4=1 \rightarrow d=2 \\ r_5: a_2=1 \wedge a_3=0 \rightarrow d=2 \\ r_6: a_1=0 \wedge a_3=0 \rightarrow d=2 \end{array}\right\} \text{由}[s_2]_C \text{导出的规则}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_7: a_2=3 \rightarrow d=2 \vee d=3 \\ r_8: a_3=3 \rightarrow d=2 \vee d=3 \end{array}\right\} \text{由}[s_3]_C \text{导出的规则}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_9: a_3=2 \rightarrow d=1 \vee d=3 \\ r_{10}: a_2=1 \wedge a_4=0 \rightarrow d=1 \vee d=3 \end{array}\right\} \text{由}[s_5]_C \text{导出的规则}$$

·本例一共出现4个不同上确界：$sup([s_1]_C)$，$sup([s_2]_C)$，$sup([s_3]_C)$和$sup([s_5]_C)$。对于$sup([s_1]_C)=\{s_1, s_5\}$，由于只有粒$[s_1]_C=\{s_1\}$的上确界等于$sup([s_1]_C)$，故该上确界的分辨函数$g(sup([s_1]_C))=\vee cov([s_1]_C)=\vee\{r_1, r_2, r_3\}=r_1 \vee r_2 \vee r_3$，因此该上确界所能导出的全部极小规则集是$\{r_1\}, \{r_2\}, \{r_3\}$。类似地，可以求其他上确界导出的极小规则集，结果如下：

$sup([s_1]_C)$导出：$\{r_1\}, \{r_2\}, \{r_3\}$

$sup([s_2]_C)$导出：$\{r_4\}, \{r_5\}, \{r_6\}$

$sup([s_3]_C)$导出：$\{r_7\}, \{r_8\}$

$sup([s_5]_C)$导出：$\{r_9\}, \{r_{10}\}$

·从每一个上确界导出的全部极小规则集中选择一个极小规则集，然后将它们并起来，便得到整个决策系统的一个极小决策规则集。例如，如果分别选择$\{r_1\}, \{r_4\}, \{r_7\}, \{r_9\}$，则得到整个决策系统的一个极小决策规则集$\{r_1, r_4, r_7, r_9\}$。可以验证$\{r_1, r_4, r_7, r_9\}$中的每一条规则都是相容的和容许的，它们能覆盖决策系统所有的对象。而且删除任何一条规则，都会导致一些对象不被覆盖，因此该规则集是极小的。按照既定的组合方法可知，整个决策系统一共有36个极小决策规则集，这些规则集都是相容的、容许的和极小的。

至此，该实例展示了如何利用本文提出的方法从一个不一致决策系统中获取所有极小的已约简的广义决策规则集。

结束语 本文针对不一致决策系统中的广义决策规则获取问题，从粒度计算的角度分析了决策规则获取的基本原理，然后通过构造分辨函数的方法来计算所有极小的已约简的广义决策规则集。与基于分辨矩阵计算所有属性约简的方法相类似的是，本文提出的方法可以计算出一个不一致决策系统中所有极小的已约简的广义决策规则集；不同的是，本文计算的是所有的极小规则集，而前者计算的是所有的属性约简；本文方法不需要构造分辨矩阵并且可以以上确界为单位并行执行规则获取操作，从而降低空间开销并提高计算效率。另外，只需适当修改上确界的定义，就可以拓展本文方法，以获取其他类型的决策规则，如可能约简、近似约简决策规则等。本文工作为不一致决策系统中的规则获取提供了一般方法。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough set[J]. International Journal of Computer of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[2] 王国胤，姚一豫，于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报，2009，32(7)：1229-1246

[3] 刘少辉，盛秋戬，吴斌，等. Rough 集高效算法的研究[J]. 计算机学报，2003，26(5)：1-6

[4] 徐章艳，刘作鹏，杨炳儒，等. 一个复杂度为 max(O(|C||U|)，O(|C|²|U/C|))的快速属性约简算法[J]. 计算机学报，2006，29(3)：391-399

[5] 胡峰，王国胤. 属性序下的快速约简算法[J]. 计算机学报，2007，30(8)：1429-1435

[6] Meng Zu-qiang, Shi Zhong-zhi. A fast approach to attribute reduction in incomplete decision systems with tolerance relation-based rough sets[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2774-2793

[7] 常犁云，王国胤，吴渝. 一种基于 Rough Set 理论的属性约简及规则提取方法[J]. 软件学报，1999，10(11)：1206-1211

[8] 陈建辉. 基于粗糙集的最小规则提取算法[J]. 长春工程学院学报：自然科学版，2008，9(3)：85-88

[9] 黎敏，邓少波，刘清. 基于相对决策条件的规则提取方法[J]. 计算机工程，2009，35(23)：175-177，180

[10] Qian Y H, Liang J Y, Li D Y, et al. Approximation reduction in inconsistent incomplete decision tables[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23: 427-433

[11] Kryszkiewicz M. Comparative study of alternative types of knowledge reduction in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2001, 16: 105-120

[12] Zhang W X, Mi J S, Wu W Z. Approaches to knowledge reduction in inconsistent information systems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18(9): 989-1000

[13] 张文修，米据生，吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报，2003，26(1)：39-59

[14] 黄兵，周献中. 不一致决策表中规则提取的矩阵算法[J]. 系统工程与电子技术，2005，27(3)：441-445

[15] Pawlak Z. Rough Sets—Theoretical Aspects of Reasoning About Data[M]. Kluwer Academic Publishers, 1991

[16] Yao Y Y, Liau C J. A generalized decision logic language for granular computing[C]// FUZZ-IEEE'02 in The 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. 2002: 1092-1097

[17] 蒙祖强，史忠植. 一种新的基于简化二进制可辨矩阵的相对约简算法[J]. 控制与决策，2008，23(9)：976-980