

## 边界近邻零空间鉴别分析

林玉娥<sup>1</sup> 李敬兆<sup>1</sup> 梁兴柱<sup>1</sup> 林玉荣<sup>2</sup>

(安徽理工大学计算机科学与工程学院 淮南 232001)<sup>1</sup> (哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001)<sup>2</sup>

**摘要** 提出了一种边界近邻零空间鉴别分析算法。算法首先定义了新的目标函数,通过对该目标函数的理论分析与证明指出首先用 PCA 将高维样本降维至一个低维子空间,而在此低维子空间该目标函数并不损失任何有效的鉴别信息;算法不但能有效地解决本问题,而且仅需通过 3 次特征值分解就可求出具有正交性的投影矩阵,从而有效地提高了算法的识别性能。最后也给出了该算法基于核映射的非线性拓展。人脸库上的实验结果证实了所提方法的有效性。

**关键词** 边界近邻,零空间,目标函数,小样本问题,特征值分解

**中图分类号** TP391.4 **文献标识码** A

### Marginal Neighborhood Nullspace Discriminant Analysis

LIN Yu-e<sup>1</sup> LI Jing-zhao<sup>1</sup> LIANG Xing-zhu<sup>1</sup> LIN Yu-rong<sup>2</sup>

(School of Computer Science & Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)<sup>1</sup>

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)<sup>2</sup>

**Abstract** A marginal neighborhood nullspace discriminant analysis was proposed. The proposed method firstly defines the objective function, and then gives the theory analysis and proof of the objective function. Therefore, this paper pointed out that the algorithm must firstly projects high-dimensional samples into low-dimensional subspace by using PCA algorithm as the first step. In the low-dimensional subspace, the objective function does not lose any effective discriminant information. This algorithm can effectively not only resolve the small sample size problem but also work out the orthogonality projection matrix only by the three eigenvalue decomposition. Finally, the nonlinear marginal neighborhood nullspace discriminant analysis based on kernel mapping was given. Experimental results on face database demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** Marginal neighborhood, Nullspace, Objective function, Small sample size problem, Eigenvalue decomposition

## 1 引言

近来基于图嵌入的特征提取算法受到学者们的关注,如 He 提出的保局投影<sup>[1,2]</sup> (Locality Preserving Projections, LPP) 算法以及以 LPP 为基础的改进算法<sup>[3-15]</sup> 均取得了较好的识别效果。而其中的边界 Fisher 鉴别分析 (Marginal Fisher Analysis, MFA)<sup>[10,11]</sup> 算法综合了保局投影方法<sup>[1,2]</sup> 和线性鉴别分析方法<sup>[16]</sup> 的优点,其基本思想是通过构造类内图  $S$  来描述类内数据的紧致性,构造类间图  $B$  来描述类间数据的可分性,通过二者的比值构造其准则函数即边界 Fisher 准则。该方法既考虑了样本的局部特性,又有着类似于 LDA 算法的准则函数,实验表明了该算法的有效性。但该算法也有不足之处,对此,文献[12,13]指出边界 Fisher 鉴别分析的准则函数没有充分考虑异类样本近邻关系的缺点,因此分别提出了相应的改进算法;文献[14]则针对 MFA 所求的鉴别向量之间

的关系进行了研究,给出了正交 MFA 和无相关 MFA 来进一步提高 MFA 算法的识别性能,并通过实验表明正交 MFA 优于无相关 MFA。

但上述改进算法和原 MFA 算法一样,在应用于人脸识别等模式识别问题时,均受到小样本问题的制约,即目标函数中存在矩阵奇异的问题。对于该问题目前多采用差分的目标函数来避免矩阵的求逆<sup>[5-7,15]</sup>,这种方案虽然解决了小样本问题,但基于差分形式求得的投影矩阵其识别效果没有商形式的理想<sup>[17]</sup>。

因此本文针对上述问题进行了研究,以 MFA 为理论基础,提出了一种适用于人脸识别等高维小样本问题的方法,即边界近邻零空间鉴别分析 (Marginal Neighborhood Nullspace Discriminant Analysis, MNDA)。MNDA 定义了新的准则函数,该准则函数的求解思想是在边界近邻类内散度矩阵的零空间内寻找最大化边界近邻类间散度矩阵的最佳投影矩

到稿日期:2012-06-03 返修日期:2012-09-19 本文受国家自然科学基金(60975009,61170060),安徽省自然科学基金(1208085QF123,11040606M135),安徽省高等学校自然科学基金(KJ2012Z084,KJ2011A083)资助。

林玉娥(1979—),女,博士,讲师,主要研究方向为模式识别及图像处理,E-mail:linyue@126.com;李敬兆(1963—),博士,教授,主要研究方向为模式识别及嵌入式系统;梁兴柱(1979—),男,硕士,讲师,主要研究方向为模式识别及网络安全;林玉荣(1972—),女,博士,副教授,主要研究方向为高光谱图像处理与导航制导等。

阵。而对于人脸识别这样高维数据问题如何求解出边界近邻类内散度矩阵的零空间,本文给出了完备的求解方案,即首先要对中心化处理后的样本进行 PCA 降维处理,而这一过程相对于 MNDA 目标函数而言并不损失任何有效的鉴别信息,对此本文给出了理论上的证明;另一方面 MNDA 无需对矩阵求逆计算,因此避免了出现矩阵奇异问题,解决了原始 MFA 算法所存在的小样本问题;另外本文所求出的投影矩阵具有正交性,本文算法无需类似文献[8-9,14]为了保证所求矩阵具有正交性,要进行特殊的处理,MNDA 仅需通过 3 次特征值分解即可做到,因此求解方法简单易于实现,并且能够有效地提高算法的识别性能。同时本文也给出了算法的非线性拓展。

## 2 MFA 算法

MFA 中通过构造类内紧致矩阵  $S$  来描述类内数据的紧致性,即每个样本只与同类样本中的  $k_1$  近邻相连;通过构造紧致矩阵  $B$  来描述类间数据的可分性,即只有异类样本的  $k_1$  近邻相连。分别由下式计算

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \in N_{k_1}(j) \text{ or } j \in N_{k_1}(i) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $N_{k_1}(i)$  表示同一类中第  $i$  个样本的  $k_1$  个最近邻。

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i, j) \in P_{k_2}(c_i) \text{ or } P_{k_2}(c_j) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $P_{k_2}(c)$  表示不同类的  $k_2$  个最近邻样本。

MFA 的准则函数定义为

$$\min_W J(W) = \frac{\text{tr}(W^T X L_w X^T W)}{\text{tr}(W^T X L_B X^T W)} \quad (3)$$

式中,  $L_w = D_w - S$ ,  $L_B = D_B - B$ ,  $D_w$  和  $D_B$  都是对角矩阵,其对角元素分别为  $(D_w)_{ii} = \sum_j S_{ij}$  和  $(D_B)_{ii} = \sum_j B_{ij}$ 。式(3)的求解可转换为下面的广义特征值求解问题,即

$$X L_w X^T w_i = \lambda_i X L_B X^T w_i, i=1, 2, \dots, l \quad (4)$$

具体求解及证明参见文献[10,11]。

## 3 边界近邻零空间鉴别分析

### 3.1 MNDA 理论基础

实际上 MFA 的准则函数又等价于最大化下式

$$\max_W J(W) = \frac{\text{tr}(W^T X L_B X^T W)}{\text{tr}(W^T X L_w X^T W)} \quad (5)$$

本文称  $X L_B X^T$  为边界近邻类间散度矩阵,  $X L_w X^T$  为边界近邻类内散度矩阵。因此根据式(5)给出本文 MNDA 的目标函数

$$\max_{|W^T X L_w X^T W|=0} J(W) = \text{tr}(W^T X L_B X^T W) \quad (6)$$

式(6)的意义是求取的投影向量使得边界近邻类内散度矩阵投影为零时,能够最大化边界近邻类间散度矩阵。对于目标函数式(6),由上节定义可知  $X L_B X^T$  和  $X L_w X^T$  均为半正定阵,因此若有向量  $\alpha$  使得  $\alpha^T X L_w X^T \alpha = 0$ , 且有  $\alpha^T X L_B X^T \alpha > 0$ , 则此时  $\alpha$  最大化式(6),这说明式(6)的最优解可以从  $X L_w X^T$  的零特征值对应的特征向量中选择。

对于 MNDA 目标函数,如何计算出  $X L_w X^T$  的零特征

值对应的特征向量呢? 本文受文献[18]的启发,首先进行 PCA 降维处理,而这样做是为了不损失任何有效的鉴别信息。下面给出理论分析与证明。

假设  $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$  为高维欧氏空间  $R^n$  样本集,首先将样本进行中心化处理,即有

$$\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N] = [x_1 - m, x_2 - m, \dots, x_N - m] \quad (7)$$

$m$  样本的均值为向量,有  $C = \{n_1, n_2, \dots, n_c\}$  个类别,每类有  $N_i$  个样本,共有  $N$  个样本。定义  $S_i$  为总体散度矩阵,则有

$$S_i = \sum_{i=1}^N (x_i - m)(x_i - m)^T = \bar{X} \bar{X}^T \quad (8)$$

因此样本经过中心化处理后,目标函数式(6)可改写为

$$\max_{|W^T \bar{X} L_w \bar{X}^T W|=0} J(W) = \text{tr}(W^T \bar{X} L_B \bar{X}^T W) \quad (9)$$

定义 1 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  表示  $S_i$  的标准正交的特征向量集,令  $Z = \{x | S_i x = 0, x \in R^n\}$ , 即  $Z$  为  $S_i$  的零空间,则有  $Z_{\perp} = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  ( $Z_{\perp}$  代表  $Z$  的正交补空间),  $Z = \text{span}\{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n\}$ , 其中  $k = \text{rank}(S_i)$ 。

定理 1  $\forall \beta \in Z$ , 则有  $\beta^T \bar{x}_i = 0, i=1, \dots, N$ 。

证明: 由于  $\beta \in Z$ , 因此有  $\beta^T S_i \beta = 0$ , 又由于  $S_i = \bar{X} \bar{X}^T$ , 因此有  $\beta^T \bar{X} \bar{X}^T \beta = \sum_{i=1}^N (\beta^T \bar{x}_i)^2 = 0$ , 所以有  $\beta^T \bar{x}_i = 0, i=1, \dots, N$ 。

证毕。

定理 2 假设  $S_i$  是奇异的, 则  $Z$  中不存 MNDA 目标函数式(9)的有效解。

证明: 设任取一向量  $\eta \in Z$ , 则有  $\eta^T \bar{X} L_w \bar{X}^T \eta$  和  $\eta^T \bar{X} L_B \bar{X}^T \eta$ , 由定理 1 和  $\eta \in Z$  可知:  $\eta^T \bar{X} = 0_{1 \times N}$ ,  $\bar{X}^T \eta = 0_{N \times 1}$ , 因此可得:  $\eta^T \bar{X} L_w \bar{X}^T \eta = 0$ ,  $\eta^T \bar{X} L_B \bar{X}^T \eta = 0$ 。且由定义可知  $\bar{X} L_B \bar{X}^T$  和  $\bar{X} L_w \bar{X}^T$  均为半正定阵,而选自  $Z$  空间的任一向量都将使得两个散度矩阵同时为零,因此不具有鉴别能力。故  $Z$  中不存 MNDA 目标函数的有效解。

证毕。

故由定理 2 可知,对于 MNDA 目标函数的有效解只存在于子空间  $Z_{\perp}$  中,因此设

$$w_r = P_1 b_r \quad (10)$$

式中,  $P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ ,  $b_r \in R^k$ , 该映射表示对于所求得任何一个判别向量都是由  $Z_{\perp}$  中的基向量线性组合生成的, 则有  $W = P_1 B$ ,  $B = [b_1, b_2, \dots, b_l]$ , 于是 MNDA 的目标函数  $J(W)$  可转换为

$$\max_{|B^T S_w^p B|=0} J(B) = \text{tr}(B^T S_B^p B) \quad (11)$$

式中,  $S_B^p = P_1^T \bar{X} L_B \bar{X}^T P_1$ ,  $S_w^p = P_1^T \bar{X} L_w \bar{X}^T P_1$ 。式(11)的求解首先要求出  $S_w^p$  所对应的零空间,可对  $S_w^p$  进行特征值或奇异值分解,有

$$S_w^p = U \Sigma U^T \quad (12)$$

式中,  $U$  为正交阵, 设  $r = \text{rank}(S_w^p)$ , 则有  $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r \times r & 0_{r \times (k-r)} \\ 0_{(k-r) \times r} & 0_{(k-r) \times (k-r)} \end{pmatrix}$ , 设  $\Sigma_r \times r$  是按降序排列的对角阵。令  $U = (U_1, U_2)$ ,  $U_1 \in R^{k \times r}$ ,  $U_2 \in R^{k \times (k-r)}$ ,  $U_2$  即是  $S_w^p$  零特征值所对应的特征向量,因此令  $P_2 = U_2$ , 则式(12)可简化为

$$\max_{V^T V = I} J(V) = \text{tr}(V^T S_B^p V) \quad (13)$$

式中,  $\bar{S}_B^p = P_2^T S_B^p P_2$ 。对于式(13), 实际上就是求解下面的特征值问题

$$\bar{S}_B^p v_i = \lambda_i v_i, i=1, 2, \dots, l \quad (14)$$

选择对应前  $d$  (通常  $d < l$ ) 个最大特征值所对应的特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_d$ , 令  $V = [v_1, v_2, \dots, v_d]$ , 则最终得到投影矩阵  $W = P_1 P_2 V$ 。由于  $W$  满足式(15), 即

$$W^T W = (P_2 P_1 V)^T (P_2 P_1 V) = V^T P_1^T P_2^T P_2 P_1 V = I \quad (15)$$

故可知  $W$  是满足正交性的投影矩阵。

### 3.2 核边界近邻零空间鉴别分析

MNND A 算法也很容易拓展成为非线性算法。将原始空间中的  $X$  经过非线性映射  $\Phi$  后, 在高维特征空间  $H$  中表示为下式

$$\Phi(X) = [\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_i), \dots, \Phi(x_N)] \quad (16)$$

在高维特征空间  $H$  中将样本进行中心化处理, 即有

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{X}) &= [\Phi(\bar{x}_1), \dots, \Phi(\bar{x}_i), \dots, \Phi(\bar{x}_N)] \\ &= [\Phi(x_1) - m^\Phi, \dots, \Phi(x_i) - m^\Phi, \dots, \Phi(x_N) - m^\Phi] \end{aligned} \quad (17)$$

同理亦有:

$$S_l^\Phi = \sum_{i=1}^N (\Phi(x_i) - m^\Phi)(\Phi(x_i) - m^\Phi)^T = \Phi(\bar{X})\Phi(\bar{X})^T \quad (18)$$

根据上小节所述, 实际上 MNND A 要先进行中心化处理, 然后求出  $S_l^\Phi$  并计算出  $S_l^\Phi$  的各个标准正交向量, 然而由于非线性映射  $\Phi$  未知, 因此无法在特征空间  $H$  中直接进行特征值分解。但根据以前所做研究<sup>[19]</sup>, 可通过核矩阵  $K$  简化这一求解,  $K$  由下式求出:

$$K = (\Phi(X))^T \Phi(X) \quad (19)$$

由于  $\Phi(X)$  与  $K$  之间存在着一一对应的关系, 故可直接将  $K$  的每一列看成是一个样本, 因此将 MNND A 推广成为非线性方法, 只需多计算一个核矩阵即可, 然后将  $K$  当成  $X$ , 再按 MNND A 的计算方法即可求出非线性的投影矩阵。

### 3.3 MNND A 及 KMNND A 的算法实现

MNND A 的具体求解步骤如下:

1. 首先根据式(7)对输入的数据进行中心化处理;
2. 对中心化后的数据根据式(1)、式(2)计算出  $S$  和  $B$ , 再分别计算  $(D_W)_\# = \sum_j S_{ij}$ ,  $(D_B)_\# = \sum_j B_{ij}$ ,  $L_w = D_w - S$  和  $L_B = D_B - B$ ;

3. 对  $S_i$  进行特征值分解, 计算出  $S_i$  非零特征值所对应的特征向量集  $P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ ;

4. 分别计算出  $S_B^p = P_1^T \bar{X} L_B \bar{X}^T P_1$ ,  $S_w^p = P_1^T \bar{X} L_w \bar{X}^T P_1$ ; 然后对  $S_w^p$  进行特征值分解得到  $P_2 = U_2$ ;

5. 计算出  $\bar{S}_B^p = P_2^T S_B^p P_2$ , 再求出式(14)的特征值与特征向量, 选择对应前  $d$  个最大特征值所对应的特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_d$ ;

最后得到所求的最优正交投影矩阵为  $W = P_1 P_2 V$ 。

而对于 KMNND A 的算法具体实现步骤, 应首先根据式(19)计算出  $K$ , 然后将  $K$  作为样本  $X$  按上述步骤求解即可。

## 4 实验结果与讨论

为了验证所提出的 KMNND A 和 MNND A 的性能, 分别

在 ORL<sup>[20]</sup> 和 AR<sup>[21]</sup> 人脸库上进行了实验。采用最近邻算法进行分类。

ORL 人脸库有 40 个人的 400 幅图像, 人脸姿态有相当程度的变化, 每幅人脸图像的分辨率为  $112 \times 92$ 。对于 AR 人脸库, 由于人脸数目较多, 因此仅选择其中的一个子集来进行测试。该子集包括 100 人, 每人 15 幅图像, 每幅人脸图像的分辨率为  $100 \times 80$ 。图 1 为两个人脸库的部分样本。对于 3 种算法 KMNND A、MNND A 和 MFA 的近邻选择, 本文选择为同类 3 近邻, 异类为 5 近邻, 分别进行了如下的实验。

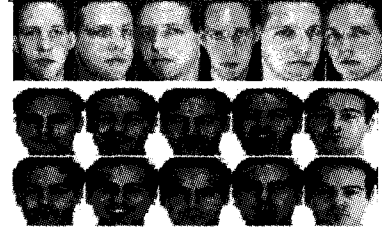


图 1 两个人脸库中的人脸样本

1) 对 KMNND A、MNND A 和 MFA 在提取不同特征个数时的识别性能进行了比较。在 ORL 和 AR 人脸库上分别选择两个库的前 6 幅图像作为训练样本, 剩余图像作为测试样本, 3 种算法在不同特征下的结果变化情况如图 2 和图 3 所示。

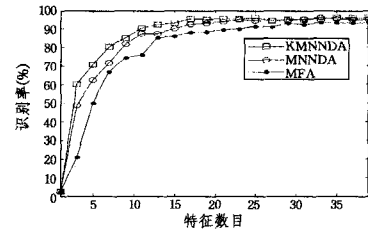


图 2 ORL 人脸库识别率随特征数目变化的结果

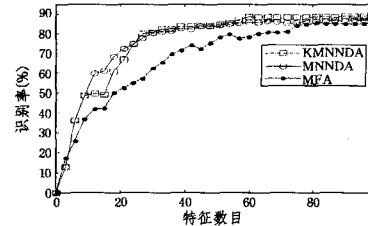


图 3 AR 人脸库识别率随特征数目变化的结果

设  $C$  为样本的类别数目, 已有研究表明最有效的特征个数为类别数目减一, 故此对 3 种算法提取的最大特征数目取为  $C-1$  个。由图 2 和图 3 的结果可以看出, KMNND A 和 MNND A 无论是在大型人脸库 AR 上还是在小型人脸库 ORL 上都优于 MFA, 特别是 KMNND A 和 MNND A 在提取较少特征时就取得了比 MFA 好且稳定的识别结果。这说明本文提出的算法在边界近邻类内散度矩阵的零空间中求出的投影矩阵更为有效。另外从两个图中也可以看出 KMNND A 的识别结果要好于 MNND A, 这是因为 KMNND A 是非线性算法, 能够提取出人脸图像的非线性特征, 所以取得了最好的识别结果。

2) 对 KMNND A、MNND A、MFA、正交鉴别保局投影

(Orthogonal Discriminant Locality Preserving Projections, ODLPP)<sup>[9]</sup>进行了比较。在两个人脸库上,每人随机选择  $T$  幅图像作为训练样本,  $T$  的取值为 5~8, 剩余图像作为测试样本。取 10 次平均识别结果作为每种算法的识别结果, 实验结果如表 1 与表 2 所列。

表 1 ORL 人脸库的识别结果

| method | Recognition rate (%) |       |       |       |
|--------|----------------------|-------|-------|-------|
|        | 5                    | 6     | 7     | 8     |
| ODLPP  | 94.50                | 96.50 | 96.00 | 97.15 |
| MFA    | 95.60                | 96.50 | 96.50 | 97.50 |
| MNDA   | 96.00                | 97.25 | 97.38 | 98.25 |
| KMNDA  | 96.70                | 97.33 | 97.50 | 98.75 |

表 2 AR 人脸库上的识别结果

| method | Recognition rate (%) |       |       |       |
|--------|----------------------|-------|-------|-------|
|        | 5                    | 6     | 7     | 8     |
| ODLPP  | 83.95                | 85.11 | 87.23 | 91.62 |
| MFA    | 86.26                | 89.93 | 93.27 | 94.13 |
| MNDA   | 88.46                | 91.42 | 94.13 | 95.46 |
| KMNDA  | 89.42                | 92.62 | 94.75 | 95.74 |

表 1 和表 2 的识别结果表明, 非线性的 KMNDA 取得了最好的识别结果, MNDA 的识别结果也明显优于 MFA 和 ODLPP 的结果, 这进一步说明了本文算法的有效性, 即从边界近邻类内散度矩阵的零空间中求出的投影矩阵是有效的、可行的。

**结束语** 本文提出了一种边界近邻零空间鉴别分析算法——MNDA。首先给出了算法的目标函数, 其求解思路是在边界近邻类内散度矩阵的零空间中, 寻找最大化边界近邻类间散度矩阵的投影矩阵。然而对于人脸识别高维样本是不能直接对边界近邻类内散度矩阵进行特征分解的, 因此本文给出了一种完备的求解方法, 并给出了相应的理论证明, 即首先对中心化后的样本进行 PCA 降维, 而这一过程是不损失任何有效鉴别信息的, 然后再对低维的样本进行相应的特征值分解。算法不但解决了小样本问题, 同时所求的投影矩阵具有正交性, 因而明显提高了算法的识别率。最后本文也给出了 MNDA 的非线性拓展。人脸库上的实验结果证实了所提方法的有效性。它为基于图嵌入的特征提取方法解决小样本问题及所求投影矩阵具有正交性提供了一种新思路。但本文算法也有不足之处, 即只能应用于类似于人脸的高维小样本问题, 而当  $S_0^2$  满秩时, 本文算法是失效的。

## 参考文献

- [1] He X F, Yan S C, Hu Y, et al. Face recognition using Laplacian-faces [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328-340
- [2] He X F, Niyogi. Locality preserving projections [C] // Proceedings of Advances In Neural Information Processing Systems 16. MA: Cambridge, MIT Press, 2004: 153-160
- [3] Yang J, David Z, Yang J Y, et al. Globally Maximizing, Locally Minimizing: Unsupervised Discriminant Projection with Applications to Face and Palm Biometrics [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(4): 650-664
- [4] Xu Y, Zhong A N, Yang J, et al. LPP solution schemes for use with face recognition [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(12): 4165-4176
- [5] 严慧, 杨静宇. 无监督的差分鉴别特征提取以及在人脸识别上的应用 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(11): 1632-1637
- [6] 林克正, 王慧鑫, 卜雪娜, 等. 基于局部保持投影的鉴别最大间距准则 [J]. 模式识别与人工智能, 2010, 23(2): 178-185
- [7] Lu G F, Lin Z, Jin Z. Face recognition using discriminant locality preserving projections based on maximum margin criterion [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(3): 3572-3579
- [8] Cai D, He X F, Han J W. Orthogonal laplacianfaces for face recognition [J]. IEEE Transactions on Image Process, 2006, 15(11): 3608-3614
- [9] Zhu L, Zhu S N. Face recognition based on orthogonal discriminant locality preserving projections [J]. Neurocomputing, 2007, 70(9): 1543-1546
- [10] Yan S, Xu D, Zhang B, et al. Graph embedding: A general framework for dimensionality reduction [J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1): 40-51
- [11] Xu D, Yan S, Tao D, et al. Marginal Fisher Analysis and Its Variants for Human Gait Recognition and Content-Based Image Retrieval [J]. IEEE Transactions on Image processing, 2007, 16(11): 2811-2821
- [12] 谢钧, 刘剑. 一种新的局部判别投影方法 [J]. 计算机学报, 2011, 31(11): 2243-2250
- [13] Fang B, Cheng M, Tang Y Y, et al. Improving the discriminant ability of local margin based learning method by incorporating the global between-class separability criterion [J]. Neurocomputing, 2009, 73(1): 536-541
- [14] 于耀亮, 张立明. 正交 MFA 和不相关 MFA [J]. 模式识别与人工智能, 2008, 21(5): 604-608
- [15] 卢桂馥, 林忠, 金忠. 基于最大差值的二维边界 Fisher 的人脸识别 [J]. 计算机科学, 2010, 35(7): 251-253
- [16] Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegam D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711-720
- [17] Tao Y T, Yang J. Quotient vs. difference: comparison between the two discriminant criteria [J]. Neurocomputing, 2010, 73(10-12): 1808-1817
- [18] 卢桂馥, 林忠, 金忠. 基于核化图嵌入的最佳鉴别分析与人脸识别 [J]. 软件学报, 2011, 22(7): 1561-1570
- [19] 林玉娥, 顾国昌, 刘海波, 等. 一种新颖的核鉴别通用矢量集算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(12): 1636-1640
- [20] Olivetti Oracle Research Lab (ORL) Database [EB/OL]. <http://www.cl.cam.ac.uk/research/dtg/attarchive/facedatabase.html>
- [21] Martinez A M, Benavente R. The AR face database [EB/OL]. [http://cobweb.ecn.purdue.edu/~aleix/aleix\\_face\\_DB.html](http://cobweb.ecn.purdue.edu/~aleix/aleix_face_DB.html)