

动态控制场下一种改进的量子最优控制

黄泽霞^{1,2} 黄德才³ 俞攸红⁴

(浙江工业大学信息学院 杭州 310023)¹ (绍兴文理学院元培学院信息与电子系 绍兴 312000)²

(浙江工业大学计算机科学与技术学院软件学院 浙江 310023)³

(浙江工业大学理学院物理系 杭州 310023)⁴

摘要 结合量子系统的自身特点,针对直接将经典最优控制应用到量子系统中所存在的可靠性不高、收敛速度较慢等问题,借助于动态迭代控制场提出了一种更高效、收敛性更好的单调收敛的改进量子最优控制算法(IQOCT)。通过系统仿真实验,对控制场权值、收敛速度以及迭代步进参数之间的关系作了详细的分析。结果表明,与一般最优算法和共轭梯度算法相比,改进算法在可靠性和收敛速度等方面都有明显提高。

关键词 量子最优控制,共轭梯度算法,收敛速度

中图分类号 TP13 **文献标识码** A

Improved Quantum Optimal Control in Dynamic Control Field

HUANG Ze-xia^{1,2} HUANG De-cai³ YU You-hong⁴

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)¹

(Department of Information and Electronic, YuanPei College, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)²

(College of Computer Science and Technology, School of Software, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)³

(College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)⁴

Abstract According to the specialty of quantum systems, the reliability or the efficiency of a general optimal control scheme leaves much to be desired. This paper developed a special improved quantum optimal control method for using dynamic control field, which can be implemented as fast convergent algorithms. The relations among penalty of the field energy value, convergence speed and iteration step parameters were analyzed in detail through the system simulation experiments. Theoretical analysis shows that this new algorithm exhibits significantly superior to class of quantum optimal control and the conjugate gradient method in reliability and convergence rate.

Keywords Quantum optimal control, Conjugate gradient method, Convergence rate

1 介绍

在量子信息科学里,许多问题的一个共同的目标是对量子信息转移的操控,即控制量子信息从一个地方传递到另一个地方,或从一个量子系统转移到另一个量子系统,这是量子通信领域中必不可少的一环。到目前为止,实现量子信息转移的方法一般有量子隐形传态和量子态转移两种。经过几十年的发展,量子态转移方法也在不断完善,从最初的非相干光源到受激拉曼绝热通道技术(STIRAP),再到遗传算法、最优控制,效率不断提高,量子系统也越来越容易被外部作用精确地调控到特定的量子状态。

在众多的理论中,最优控制是最为有效的手段之一,而把最优控制应用到量子系统中已成为一个非常热门的研究方向^[1,2]。从控制的角度来说,量子最优控制就是确定控制场从而使选定的性能指标最优,这些性能指标涉及到最短时间控制、最大转移概率控制、最小能量控制等^[3-7],所以性能指标

的选择是最优控制设计过程中非常重要的一步,它是衡量系统在容许控制作用下性能好坏的主要尺度。

对于最优控制的设计,首先需要给出量子系统的数学模型,为了考虑问题的方便,这里以封闭量子系统为例。状态函数 $|\psi(t)\rangle$ 随时间演化的薛定谔绘景方程^[8,9]为:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} (H_0 - \mu \cdot e(t)) |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

式中, H_0 是系统内部的厄米算符, μ 是电偶极矩, $e(t)$ 是所施加的控制场, \hbar 是普朗克常量,系统初始态设为 $|\psi(0)\rangle = \psi_0$,在时间 T 时系统的终态为 $|\psi(T)\rangle$ 。

在应用中,较为常见的最优控制的组合性能指标的形式为:

$$K = |\langle \psi(T) | \psi_u \rangle|^2 - \alpha \int_0^T e^2(t) dt \quad (2)$$

式中, ψ_u 为系统期望的量子态。如果 $|\psi(T)\rangle = \psi_u$,则性能指标 K 的第一项为 1,即达到最大,此项是让实际终态与期望终态尽可能接近;性能指标 K 第二项中的控制场 $e(t)$ 是实数,

到稿日期:2012-03-08 返修日期:2012-06-17 本文受国家自然科学基金项目(10774131)资助。

黄泽霞(1977-),女,博士生,讲师,主要研究方向为量子智能控制,E-mail: huangzexia@yahoo.com.cn;黄德才(1958-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为算法设计与分析、人工智能、图像处理等;俞攸红(1962-),女,副教授,主要研究方向为量子光学、量子计算等。

且该项目的目的是使控制场 $e(t)$ 尽可能小, 参数 α 反映控制场的权值大小。

在满足系统模型前提下, 求解性能指标为优化的问题可以利用拉格朗日乘子把有约束的最大极值问题转变为无约束的求最大极值问题^[10]。采用变分原理可得到一组取极值必要的微分方程组:

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar}(H_0 - \mu \cdot e)|\psi\rangle, |\psi(0)\rangle = \psi_0 \quad (3)$$

$$|\dot{\lambda}\rangle = -\frac{i}{\hbar}(H_0 - \mu \cdot e)|\lambda\rangle, |\lambda(T)\rangle = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi(T)\rangle \quad (4)$$

$$\alpha e(t) = \text{Im}(|\lambda\rangle^\dagger \mu |\psi\rangle) \quad (5)$$

式中, $|\lambda\rangle = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$ 为拉格朗日乘子向量; $|\lambda\rangle^\dagger$ 表示 $|\lambda\rangle$ 的共轭转置。

式(3)~式(5)是典型的两点边值问题, 因此人们可以借用诸如梯度类的数值迭代法来进行求解。由于不同的数值方法可能会导致截然不同的计算结果, 也可能使最优值收敛效果不理想, 甚至使最优解无法收敛, 因此, 确定求解非线性方程组可靠和有效的数值方法是一项重要而艰巨的任务。近年来, 各种求解最优控制非线性方程组解的数值方法, 包括共轭梯度法、Krotov 迭代算法等层出不穷^[10-12]。然而, 这些方法在可靠性、收敛速度等方面还存在许多可以改进的地方。

本文提出了一种利用特殊的动态变化的控制场来实现的量子最优控制算法。在该算法中, 用迭代变化的控制场 $e(t)$ 来调整性能指标中能量消耗项, 从而改进算法的性能指标。把改进算法与一般最优算法和共轭梯度算法应用到 Ξ 型三能级原子系统中进行系统的仿真实验, 并对它们各自所具有的特点及相互之间的关系进行详细的分析与研究, 实验结果表明, 改进的新算法在可靠性和收敛速度方面都要优于一般最优算法和共轭梯度算法。由于本文讨论所使用的与原子系统有关的数据取自实际的 Ξ 型三能级原子⁸⁷Rb, 因此研究结果具有重要的应用价值。

2 改进的量子最优控制算法

2.1 理论基础

文为了获得控制场 $e(t)$ 的迭代方程, 可以通过量子系统的本征函数 $|\psi(t)\rangle$ 定义的投影算符 $P = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ 来表示可观测量 $O(t)$ 。

下面根据投影算符的定义, 对投影算符求偏导, 有:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P\phi &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\phi] \\ &= (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle)\langle\psi(t)|\phi + |\psi(t)\rangle(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)|\phi) \end{aligned} \quad (6)$$

其中, ϕ 是与时间无关的任意波函数。利用薛定谔绘景方程(1)和哈密顿算符的厄米性质, 式(6)变为:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P\phi = HP\phi - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H\phi = HP\phi - PH\phi \quad (7)$$

利用 $O(t) = P$, 将 ϕ 略去后, 得到运动方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} O(t) = \frac{1}{i\hbar}(HO(t)\phi - O(t)H\phi) = \frac{1}{i\hbar}[H, O(t)] \quad (8)$$

式中, 系统哈密顿算符 $H = H_0 - \mu \cdot e^{(0)}(t)$, $e^{(0)}(t)$ 为时间间隔 $[0, T]$ 里任意选定的初始控制场。

当系统处于状态 $|\psi(t)\rangle$ 时, 可观察量 $O(t)$ 的期望值为 $\langle O(t) \rangle = \langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle$, 对期望值求导即可得到以下运动方

程:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle &\equiv \frac{d}{dt} \langle\psi(t)|O(t)|\psi(t)\rangle \\ &= \langle\psi(t)| -\frac{1}{i\hbar}[H_0, O(t)] + \frac{\partial O(t)}{\partial t} |\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\frac{1}{i\hbar}[\mu, O(t)]|\psi(t)\rangle e(t) \end{aligned} \quad (9)$$

把式(8)代入式(9), 则有下面等式

$$\frac{d}{dt} \langle O(t) \rangle = \langle\psi(t)|\frac{1}{i\hbar}[\mu, O(t)]|\psi(t)\rangle \{e(t) - e^{(0)}(t)\} \quad (10)$$

由此, 可以看出式(10)是与控制场 $e(t)$ 及参考场 $e^{(0)}(t)$ 有关的等式。对式(10)积分后产生的非线性积分方程可简化为:

$$\langle O(T) \rangle - \langle O(0) \rangle = \int_0^T \langle\psi(t)|\frac{1}{i\hbar}[\mu, O(t)]|\psi(t)\rangle \{e(t) - e^{(0)}(t)\} dt \quad (11)$$

式中, $\langle O(T) \rangle$ 为时间 T 时的系统期望值; $\langle O(0) \rangle = \langle\psi(0)|O(0)|\psi(0)\rangle$ 为系统初始期望值, 即系统的初态。由此可以得到式(11)的自洽解形式^[13]:

$$e(t) - e^{(0)}(t) = \eta Q(t) \{ (1 - \xi) f_\mu(t) + f(t) \} \quad (12)$$

式中, $Q(t) \geq 0$ 为控制场 $e(t)$ 的包络函数; 参数 η 定义为 $\eta = \frac{\langle O(T) \rangle - \langle O(0) \rangle}{\int_0^T Q(t) [f_\mu(t)]^2 dt}$, 初始值选正数; $f(t)$ 是时间 $t \in [0, T]$ 的

零或非零函数, $\xi = \frac{\int_0^T Q(t) f_\mu(t) f(t) dt}{\int_0^T Q(t) [f_\mu(t)]^2 dt}$ 定义为收敛参数。

2.2 改进算法

针对直接将经典最优控制应用到量子系统中所存在的可靠性不高、收敛速度较慢等问题, 我们提出了一种更高效、收敛性更好的单调收敛的改进方法。改进的主要思路是把固定控制场变为由迭代式求取控制场, 即先选取初始控制场大小, 然后利用迭代获得下一次控制场的大小, 以此来调整最优控制性能指标中的能量消耗项, 即最优性能指标的形式可改为:

$$K = \langle\psi(T)|O(T)|\psi(T)\rangle - \alpha \int_0^T (e^{(n+1)}(t) - e^{(n)}(t))^2 dt$$

我们将该方法称为改进的量子最优控制算法(IQOCT)。

由上一节可知, 在 t 时刻, $f^{(n+1)}(t)$ 自由函数可选择为零或非零, 考虑到算法的一般性, 本文中取 $f^{(n+1)}(t)$ 为非零情况进行讨论, $f^{(1)}(t) = 0$, $f^{(n+1)}(t) = -b \cdot f_\mu^{(n)}(t)$, $n \geq 2$, $b > 0$ 。

由此得到 $\xi^{(n+1)} \approx \frac{\int_0^T Q(t) f_\mu^{(n)}(t) f^{(n+1)}(t) dt}{\int_0^T Q(t) [f_\mu^{(n)}(t)]^2 dt} \approx -b$, 这样就得到了以下递推关系组:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi^{(n+1)}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} (H_0 - \mu \cdot e^{(n+1)}(t)) |\psi^{(n+1)}(t)\rangle \quad (13)$$

$$e^{(n+1)}(t) = e^{(n)}(t) + \eta Q(t) [(1+b) f_\mu^{(n+1)}(t) + f^{(n+1)}(t)] \quad (n=0, 1, \dots) \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} O^{(n)}(t) = -\frac{1}{i\hbar} [O^{(n)}(t), H_0 - \mu \cdot e^{(n)}(t)] \quad (15)$$

$$O(T) = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$$

$$f_\mu^{(n+1)}(t) \equiv -\frac{2}{\hbar} \text{Im} \{ \langle\psi^{(n+1)}(t)|O^{(n)}(t) \cdot \mu |\psi^{(n+1)}(t)\rangle \} \quad (16)$$

其中, $\eta > 0$ 为迭代步进参数; $(1+b)$ 为收敛速度参数; $f^{(n+1)}(t)$ 为任意选择的零或非零自由函数。

下面给出改进算法的具体仿真迭代过程^[14]:

1. 选定初始控制场 $e^{(0)}(t)$;
2. 迭代次数 $n=1$ 时, $e^{(1)}(t) = e^{(0)}(t)$;
3. 当 $n=1$ 时, 利用初始态 $|\psi(0)\rangle$ 和式 (13) 求得 $|\psi^{(1)}(t)\rangle$, 得到 $|\psi^{(1)}(T)\rangle$, 计算 $K^{(1)}$;
4. 当 $n \geq 2$ 时, 计算 $\Delta K^{(n)} = K^{(n)} - K^{(n-1)}$, 若 $\Delta K^{(n)} \leq 10^{-4}$, 则迭代结束;
5. 利用式 (14) - 式 (16), 计算当 $n=1$ 时, $O^{(1)}(t)$, $f_{\mu}^{(2)}(t)$, $e^{(2)}(t)$;
6. 重复 3-5。

3 仿真实验及结果分析

3.1 系统模型

选择 Ξ 型三能级原子 (例如 ^{87}Rb) 系统^[15], 如图 1 所示。能级 $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ 和 $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ 间的跃迁频率分别为 ω_1 和 ω_2 , 它们能级跳变的 Rabi 频率分别为 Ω_1 和 Ω_2 。

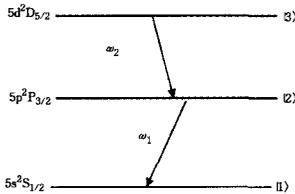


图 1 Ξ 型三能级系统

考虑线性极化的啁啾 Gauss 飞秒超短脉冲激光与此原子系统相互作用, 总哈密顿量可写为: $H(t) = H_0 - \mu \cdot e(t)$ 。其中: 自由哈密顿量 $H_0 = \text{Diag}(0, \hbar\omega_1, \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2)$; μ 为电偶极矩; $e(t)$ 是脉冲激光场的电场强度, $e(t) = Q(t) \cos(\omega t + \chi t^2/2)$, 脉冲包络 $Q(t) = \exp(-t^2/\tau^2)$ 具有 Gauss 函数形式; ω 为载波频率; χ 为啁啾率; τ 为脉冲宽度; 令能级跃迁偶极矩之比 $\gamma=1$,

$$\text{则系统总哈密顿量为: } H(t) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & \hbar\omega_1 & \Omega_2 \\ 0 & \Omega_2 & \hbar(\omega_1 + \omega_2) \end{pmatrix}.$$

下面分别使用所提出的改进算法对该系统进行最优控制的仿真实验研究。

3.2 仿真结果及讨论

选取啁啾 Gauss 超短脉冲激光的中心频率 $\omega = 0.771\pi$ rad/fs, 原子能级跃迁频率分别为 $\omega_1 = 0.768\pi$ rad/fs 和 $\omega_2 = 0.774\pi$ rad/fs, ω_1 和 ω_2 都包括在脉冲的带宽范围内; 啁啾率为 $\chi = 0.05 \text{ fs}^{-2}$; 设系统在初始时刻处于最低能级 $|1\rangle$, 以下利用控制场递推关系式和 Schrödinger 方程的解来研究在啁啾 Gauss 超短脉冲激光作用下原子系统的粒子态从最低能级 $|1\rangle$ 向最高能级 $|3\rangle$ 过渡时布居转移率的变化情况。

在这里, 首先考虑不同控制场权值 α 作用下所获得的系统粒子最高能级 $|3\rangle$ 时的转移率演化规律, 其曲线如图 2 所示。

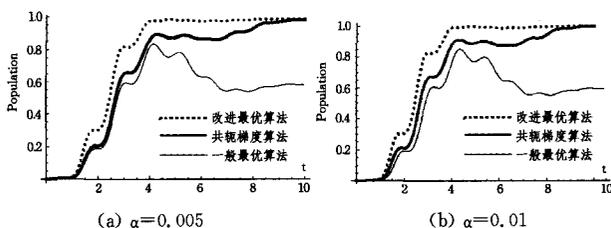


图 2 不同控制场权值下, 不同算法的最高能级布居数变化曲线

通过仿真图 2 可知, 随着控制场权值 α 的改变, 3 种不同算法的性能指标、最优迭代时间和最大布居数都发生相应的变化, 具体的情况如表 1 所列。

表 1 3 种最优算法在不同的控制场权值时得到的布居数和迭代时间

算法名称	控制场权值 0.005		控制场权值 0.01	
	最短迭代时间 (s)	最大布居数	最短迭代时间 (s)	最大布居数
一般最优	4.16	0.815	4.16	0.832
共轭梯度算法	9.33	0.993	9.51	0.995
改进最优	4.84	0.995	4.76	0.998

从表 1 中可以看出, 在相同控制场权值作用下, 改进算法收敛速度要比共轭梯度算法的快大约 4.6s, 两种算法的最大布居数基本一致; 与一般最优算法相比, 虽然收敛速度要比改进算法慢 0.7s 左右, 但是其最大布居数要比一般最优多出约 0.12; 当控制场权值 α 变大, 改进最优算法达到实际终态的最大布居数同样比其它两种最优算法的值要大; 达到最大布居数的最优时间比共轭梯度算法最短。由此可知, 在控制场强度允许的情况下, 无论控制场权值是否变化, 改进算法的收敛速度与最大布居数都要优于其他两种算法。

接下来, 分别考虑不同的 η 值和不同的收敛速度 b 时, 在相同的初步控制场作用下不同算法各自的收敛速度和迭代时间的变化情况。图 3 为 η 变化 (0.2, 0.5 和 0.8), b 不变 ($b=1$) 时, 3 种不同算法的布居转移率实验仿真变化曲线。

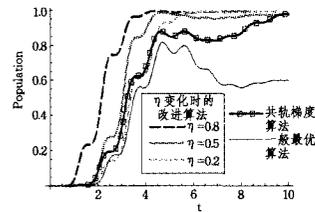


图 3 不同 η 值时, 不同算法的布居转移率仿真变化曲线

从仿真变化曲线可以看出, 当 η 值变化时, 改进算法与共轭梯度算法相比, 收敛速度有明显的提高; 与一般最优算法所得的结果相比, 系统实际终态与期望终态之间的误差明显变小, 表 2 列出了对应的性能指标值。

表 2 3 种最优算法在不同的迭代步进参数时得到的布居数和迭代时间

参数 b	一般最优		共轭梯度算法		改进算法	
	最短迭代时间 (s)	最优布居数	最短迭代时间 (s)	最优布居数	最短迭代时间 (s)	最优布居数
0.2	4.16	0.832	9.51	0.995	4.79	0.995
0.5	4.16	0.832	9.51	0.995	4.70	0.993
0.8	4.16	0.832	9.51	0.995	4.41	0.997

当 η 不变 (取 0.1), b 变化 (2, 4 和 8) 时, 改进算法对应的布居转移率实验仿真变化曲线如图 4 所示。它显示了不同收敛速度 b 值时, 3 种不同算法的收敛速度差异。

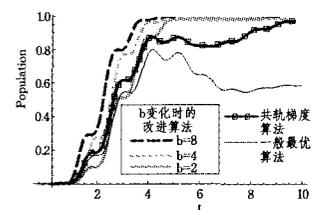


图 4 不同 b 值时, 不同算法的布居转移率仿真变化曲线

[6] 蒙祖强,周石泉. 不一致决策系统中基于粒度计算的广义决策规则获取方法研究[J]. 计算机科学,2012,39(1):198-202

[7] Panoutsos G, Mahfouf M. A Neural-fuzzy Modelling Framework Based on Granular Computing: Concepts and Applications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(21): 2808-2830

[8] Skowron A, Stepaniuk J, Swiniarski R. Modeling rough granular computing based on approximation spaces [J]. Information Sciences, 2012, 184(1): 20-43

[9] Pedrycz W. The Design of Cognitive Maps; a Study in Synergy of Granular Computing and Evolutionary Optimization [J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(10): 7288-7294

[10] Pedrycz W. Fuzzy Clustering with Viewpoints [J]. Transactions on Fuzzy Systems, 2010, 18(2): 274-284

[11] 陈光, 钟宁, 姚一豫, 等. 粒计算中粒度转换的运算符[J]. 计算机科学, 2011, 38(12): 209-212

[12] 张铃, 张铨. 问题求解理论与方法-商空间粒度计算理论及方法

[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007

[13] Zhang Ling, Zhang Bo. The Structure Analysis of Fuzzy Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2005, 40(1/2): 92-108

[14] 张铨, 张铃. 模糊相容商空间与模糊子集[J]. 中国科学: 信息科学, 2011, 41(7): 1-11

[15] 唐旭清, 朱平, 程家兴. 基于等腰归一化距离的模糊粒度空间研究[J]. 计算机科学, 2008, 35(4): 142-145

[16] 唐旭清, 赵静静, 方雪松. 模糊粒度空间的性质研究[J]. 模糊系统与数学, 2009, 23(5): 70-78

[17] 唐旭清, 方雪松, 朱平. 基于模糊邻近关系的结构聚类[J]. 系统工程与理论实践, 2010, 30(11): 1986-1996

[18] Tang Xu-qing, Zhu Ping, Cheng Jia-xing. The Structural Clustering and Analysis of Metric Based on Granular Space [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(11): 3768-3786

[19] 赵立权. 粒度计算的模型研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2007

(上接第 235 页)

如果不改变其他参数, 只改变收敛速度 b 的值, 其性能指标如表 3 所列。

表 3 3 种最优算法在不同收敛速度时得到的布居数和迭代时间

参数 b	一般最优		共轭梯度算法		改进算法	
	最短迭代时间 (s)	最优布居数	最短迭代时间 (s)	最优布居数	最短迭代时间 (s)	最优布居数
2	4.16	0.832	9.51	0.995	4.66	0.998
4	4.16	0.832	9.51	0.995	4.57	0.998
8	4.16	0.832	9.51	0.995	4.31	0.997

从表 3 可以看出, 随着收敛参数 b 值增大到 8, 与共轭梯度算法相比, 改进算法的迭代时间缩短到 4.31s, 收敛速度比前者快了 5.2s; 粒子态的最高布居转移率基本保持 0.998, 而共轭梯度算法的布居转移率为 0.995。对于一般最优算法, 虽然迭代时间比改进算法要短 0.15s, 但是其布居转移率只有 0.832。由此可见, 收敛速度 b 增加, 改进的算法不管是收敛速度还是布居转移率, 都要优于共轭梯度算法和一般最优算法。

结束语 本文讨论了动态控制场下一种改进的量子最优控制算法(IQOCT)的各种收敛迭代情况。由实验仿真结果可以看出, 经过适当改进的新算法在跟踪期望目标、加快收敛速度时是有很有效的。研究结果表明, 无论控制场权值 α 、收敛速度 b 以及迭代步进参数 η 如何变化, 改进算法的粒子态达到最大布居转移率的收敛时间都要优于共轭梯度算法, 与一般最优算法基本一致; 比较系统实际终态与期望终态之间的误差发现, 改进算法的误差最小, 共轭梯度算法次之, 而一般最优算法的误差最大。此外, 仿真结果也表明, 通过改变控制场权值 α 、迭代参数 η 和收敛速度 b , 系统可以一直保持单调收敛不变。

参考文献

[1] Perice A P, Dahleh M, Rabitz H. Optimal control of quantum-mechanical system; Existence, numerical approximation, and applications[J]. Physical Review A, 1988, 37: 4950-4964

[2] D'Alessandro D, Dahleh M. Optimal Control of Two-Level Quantum Systems[J]. IEEE Trans. Automat. control, 2001, 46: 866-874

[3] 吴庆林, 陈宗海, 董道毅. 量子最优控制研究综述[A]//2004 系统仿真技术及其应用学术交流会议论文集, 2004[C]. 合肥: 中国科技大学出版社, 2004: 723-728

[4] 陈宗海, 董道毅, 张陈斌. 量子控制导论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005: 1-232

[5] Shen L, Shi S, Rabitz H. Control of Coherent Wave Function; A Linearized Molecular Dynamics View [J]. Physical Chemistry, 1993, 97: 8874-8881

[6] Palao Jose' P, Kosloff R. Quantum Computing by an Optimal Control Algorithm for Unitary Transformations [J]. Physical Review Letters, 2002, 89

[7] Khaneja N, Reiss T, Luy B, Glaser S J. Optimal Control of Spin Dynamics in the Presence of Relaxation [J]. Journal of Magnetic Resonance, 2003, 161: 1-9

[8] Huang G M, Tarn T J, Clark J W. On the controllability of quantum-mechanical systems [J]. Journal of Mathematical physics, 1983, 24(11): 260-2615

[9] 丛爽. 量子系统控制中状态模型的建立[J]. 控制与决策, 2004, 19(10): 1105-1108

[10] Borzi A, Stadler X, Hohenester U. Optimal Quantum Control in Nanostructures; Theory and Application to a Generic Three-level System [J]. Physical Review A, 2002, 66

[11] Ohtsuki Y, Turinici G, Rabitz H. Generalized monotonically convergent algorithms for solving Quantum Optimal Control Problems[J]. Journal of Chemical Physics, 2004, 120: 5509-5517

[12] Zhu W S, Rabitz H. A rapid monotonically convergent iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator [J]. Journal of Chemical Physics, 1998, 109: 385-391

[13] Ho T-S, Rabitz H. Accelerated monotonic convergence of optimal control over quantum dynamics [J]. Physical Review E, 2010, 82(2)

[14] Kumar P, Malinovskaya S A, Malinovskiy V S. Optimal control of population and coherence in three-level Λ systems[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 2011, 44(15): 154010-154023

[15] Yang W F, Gong S Q, Niu Y P, et al. Coherent population transfer with chirped few-cycle laser pulses in an excited-doublet four-level system [J]. Chinese Optics Letters, 2005, 3: 435-437