# 广义区间值模糊粗糙近似算子的构造研究

薛占熬[1,2] 岑 枫[1] 卫利萍[1] 何华灿[2]
(河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007)[1] (西北工业大学计算机学院 西安 710072)[2]

**摘 要** 构造了一组新的广义模糊粗糙近似算子,将其拓展到区间上。在由任意的二元区间值模糊关系构成的广义近似空间中,证明了该组近似算子与区间化的广义Dubois模糊粗糙近似算子是等价的,最后在一般二元区间值模糊关系下对该组近似算子的性质进行了讨论。

**关键词** 近似算子,广义模糊粗糙集,区间值模糊关系

## Constructive Research of the Generalized Interval-valued Fuzzy Rough Approximation Operators

XUE Zhan-ao[1,2] CEN Feng[1] WEI Li-ping[1] HE Hua-can[2]
(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)[1]
(School of Computer Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)[2]

**Abstract** New lower and upper approximation operators of generalized fuzzy rough sets were constructed and extended their definition to interval. These operators were proved to be equivalent to generalized interval dubois fuzzy rough approximation operators in a generalized approximation space formed by any interval-valued fuzzy binary relations. Typical properties of these operators were discussed based on generalized interval-valued fuzzy binary relation.

**Keywords** Approximation operators, Generalized fuzzy rough sets, Interval-valued fuzzy relations

## 1 引言

粗糙集理论最初是由波兰数学家Z. Pawlak[1]提出的,其主要思想是利用知识库中的以有知识来近似描述不精确的概念,而粗糙集理论与应用的核心是从近似空间导出一对下、上近似算子。Dubois和Prode[2]将粗糙集与模糊集理论结合提出了模糊粗糙集理论。对于该理论的进一步完善很多是基于近似空间和近似算子的改变,如Nehad N. Morsi与M. M. Yakout[3]提出了基于三角范数的模糊粗糙模型,而吴伟志教授、米据生教授等则在一般二元模糊关系构成的近似空间下提出了广义模糊粗糙模型[4-8]。

对于模糊粗糙集理论,已有的研究大都集中在点值模糊集和模糊关系上。但是,现实的信息系统中用点值来描述模糊概念往往会丢失一些有用的信息,而用区间值来描述则会取得较好的效果,文献[10]将Pawlak粗糙集与区间值模糊集相结合,给出了一种等价关系下的区间值粗糙模糊集模型,并将其用在区间值模糊信息系统规则获取中,从而验证了将区间值模糊集引入到粗糙集理论研究中具有重要意义。但是,对于一般关系下的广义区间值模糊粗糙集理论则有待于深入研究。

本文重新研究了文献[7]中的广义模糊粗糙近似算子对,在不改变该算子对中上近似算子的前提下,重新构造了该算子对中的下近似算子,并将其拓展到区间上,证明了它与区间化的广义Dubois模糊粗糙近似算子对在由任意二元区间值模糊关系构成的近似空间中是等价的,最后讨论了在一般二元区间值模糊关系下该近似算子对的性质。

## 2 区间值模糊集与区间值模糊关系

**定义2.1** $I=[0,1]$, $I[0,1]=\{[a^-,a^+]:a^-\leqslant a^+, a^-, a^+\in I\}$为$I$上的区间值集合,$a=[a^-,a^+]\in I[0,1]$是一个区间值,当$a^-=a^+$时,区间值$a=[a^-,a^+]\in I[0,1]$变成$[0,1]$区间上的一个实数。

**定义2.2** 设$a,b\in I[0,1]$, $a\leqslant b$当且仅当$a^-\leqslant b^-$, $a^+\leqslant b^+$, $a=b$当且仅当$a^-=b^-$, $a^+=b^+$, $a<b$当且仅当$a\leqslant b$且$a\neq b$。

**定义2.3** 设$a,b\in I[0,1]$,用$a\not\leqslant b$表示$a$不小于等于$b$, $a\not<b$表示$a$不小于$b$, $a\not\geqslant b$表示$a$不大于等于$b$, $a\not>b$表示$a$不大于$b$。

根据定义2.2中定义的序关系,$I[0,1]$中元素之间存在没有序的情况,所以,定义2.3是有必要的。

**定义2.4** 设$a_i\in I[0,1]$, $b_i\in I$, $i\in J$, $J=\{1,2,\cdots,m\}$,定义$\bigvee\limits_{i\in J}b_i=\sup\{b_i:i\in J\}$, $\bigwedge\limits_{i\in J}b_i=\inf\{b_i:i\in J\}$, $\bigvee\limits_{i\in J}a_i=\vee\{a_i:i\in J\}=[\bigvee\limits_{i\in J}a_i^-,\bigvee\limits_{i\in J}a_i^+]$, $\bigwedge\limits_{i\in J}a_i=\wedge\{a_i:i\in J\}=[\bigwedge\limits_{i\in J}a_i^-,\bigwedge\limits_{i\in J}a_i^+]$, $a$的补$\sim a=1-a=[1-a^+,1-a^-]$。

显然,$(I[0,1],\leqslant)$构成完备格,$(I[0,1],\vee,\wedge)$是$(I[0,$

到稿日期:2008-05-10 本课题受河南省自然科学基金项目(No. 0611053900)和西北工业大学重大基础科学研究项目(No. W018101)资助。
薛占熬(1963—),男,博士,教授,研究方向为人工智能基础理论;岑 枫(1983—),男,硕士研究生,研究方向为模糊理论和数据挖掘;卫利萍(1981—),女,硕士研究生,研究方向为模糊理论和不确定性推理;何华灿(1938—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为泛逻辑和人工智能基础理论。

1],≤)诱导的最大元为[1,1],最小元为[0,0]的代数系统。

**定义 2.5** 设$U$是一个非空论域,映射$A:U\to I[0,1]$被称为$U$上的一个区间值模糊集,$U$上所有区间值模糊集的全体用$F^I(U)$表示。

**定义 2.6** 对于$\forall A,B\in F^I(U)$,$A\subseteq B$表示$\forall x\in U$,$A(x)\leqslant B(x)$,$(A\cap B)(x)=A(x)\wedge B(x)$,$(A\cup B)(x)=A(x)\vee B(x)$,$(\sim A)(x)=1-A(x)$。

**定义 2.7** 设$\alpha\in I[0,1]$,$A\in F^I(U)$,$(\alpha A)(x)=\alpha\wedge A(x)$称$\alpha A$为$\alpha$与$A$的数积。

**定义 2.8** 设$A\in F^I(U)$,$\alpha\in I[0,1]$,$\alpha$截集为$A_\alpha=\{x\in U:A(x)\geqslant\alpha\}$ $\alpha$强截集为$A_{\bar\alpha}=\{x\in U:A(x)>\alpha\}$。

**定理 2.9**(区间值模糊集分解定理) 设$A\in F^I(U)$,$A=\bigcup\limits_{\alpha\in I[0,1]}\alpha A_\alpha$,$A=\bigcup\limits_{\alpha\in I[0,1]}\alpha A_{\bar\alpha}$

证明:这里只证第一式,第二式可以类似证明。

$\forall x\in U$,有

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\alpha\in I[0,1]}\alpha A_\alpha)(x)&=\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge A_\alpha(x))=(\bigvee_{\alpha\leqslant A(x)}(\alpha\wedge A_\alpha(x)))\vee(\bigvee_{\alpha\nleqslant A(x)}(\alpha\wedge A_\alpha(x)))\\&=\bigvee_{\alpha\leqslant A(x)}(\alpha\wedge A_\alpha(x))=\bigvee_{\alpha\leqslant A(x)}\alpha=A(x)\end{aligned}$$

**定义 2.10** 设$U,W$是两个论域,映射$R:U\times W\to I[0,1]$被称为$U$到$W$的一个区间值模糊关系,其中$U\times W=\{(x,y):x\in U,y\in W\}$,当$U=W$时,称$R$为$U$上的区间值模糊关系。

显然,$U$到$W$的区间值模糊关系$R$是$U\times W$上的区间值模糊集,即$R\in F^I(U\times W)$,所以定义 2.6,2.7,2.8 中定义的运算以及定理 2.9 中的分解定理对区间值模糊关系也成立。

## 3 一种新的广义模糊粗糙近似算子

**定义 3.1** 设$R$是从论域$U$到$W$上的一个二元模糊关系,称三元组$(U,W,R)$为广义模糊近似空间。

**定义 3.2** 设$(U,W,R)$是一个广义模糊近似空间,对于$\forall x\in U$,$R(x)=\{(y,R(x,y)):y\in W\}$。

可以证明$R_\alpha(x)=(R(x))_\alpha$。

**定义 3.3** 设$(U,W,R)$是广义模糊近似空间,$\alpha,\beta\in[0,1]$,$A\in F(W)$,

$$\underline{R}_\alpha(A_\beta)=\{x\in U:R_\alpha(x)\subseteq A_\beta\}$$

$$\overline{R}_\alpha(A_\beta)=\{x\in U:R_\alpha(x)\cap A_\beta\neq\varnothing\}$$

称$\underline{R}_\alpha(A_\beta)$,$\overline{R}_\alpha(A_\beta)$为$A$在近似空间$(U,W,R)$上的$\alpha,\beta$下、上近似。

**定义 3.4** 设$(U,W,R)$是广义模糊近似空间,$A\in F(W)$,

$$\underline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in I}\alpha\,\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_{\bar\alpha}),\quad\overline{R}(A)=\bigcup_{\alpha\in I}\alpha\overline{R}_\alpha(A_\alpha)$$

称$(\underline{R}(A),\overline{R}(A))$为$A$在$(U,W,R)$上的广义模糊粗糙集,算子$\underline{R}(A)$,$\overline{R}(A)$分别被称为广义模糊下、上近似算子。

对偶性在近似算子的性质证明中是十分有用的,它使得对偶的两个性质只用证明其中一个,而另一个可以由对偶性直接得到,这将简化性质的证明,下面证明定义 3.4 中近似算子具有该性质。

**定理 3.5** 设$(U,W,R)$是广义模糊近似空间,$A\in F(W)$,则$\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$,$\overline{R}(A)=\sim\underline{R}(\sim A)$。

证明:这里只证第一式,第二式可以类似证明。

首先证明$\bigcap\limits_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cup\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha}))=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cap\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha))$ $(\underline{\alpha}\in F(U),\forall x\in U,\underline{\alpha}(x)=\alpha)$

$\forall x\in U$,$x\in\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})$即$\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})(x)=1\Leftrightarrow R_{1-\alpha}(x)\subseteq A_{\bar\alpha}$ $\Leftrightarrow\forall y\in W(R(x,y)\geqslant1-\alpha\Rightarrow A(y)>\alpha)\Leftrightarrow\forall y\in W,R(x,y)<1-\alpha$或$A(y)>\alpha\Leftrightarrow\bigwedge\limits_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))>\alpha$

其他情况下$x\notin\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})$即$\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})(x)=0$。

$$\bigcap_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cup\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha}))(x)=\bigwedge_{\alpha\in I}(\alpha\vee\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})(x))=\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))$$

类似可以证明$\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cap\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha))(x)=\bigvee\limits_{\alpha\in I}(\alpha\wedge\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)(x))=\bigwedge\limits_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))$也成立。

由$x$的任意性得$\bigcap\limits_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cup\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha}))=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cap\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha))$。

下面证明$\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$

$$\begin{aligned}\sim\overline{R}(\sim A)&=\sim\bigcup_{\alpha\in I}(\alpha\overline{R}_\alpha((\sim A)_\alpha))=\sim\bigcup_{\alpha\in I}(\alpha\overline{R}_\alpha(\sim A_{\overline{1-\alpha}}))\\&=\bigcap_{\alpha\in I}(\underline{\underline{1-\alpha}}\cup(\sim\overline{R}_\alpha(\sim A_{\overline{1-\alpha}})))=\bigcap_{\alpha\in I}(\underline{\underline{1-\alpha}}\cup\underline{R}_\alpha(A_{\overline{1-\alpha}}))\text{(定义 3.3,文献[9]定理 3.2(1))}\\&=\bigcap_{\alpha\in I}(\underline{\alpha}\cup\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha}))=\bigcup_{\alpha\in I}(\alpha\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha))\\&=\underline{R}(A)\end{aligned}$$

证明完毕。

设$y_1=\alpha\vee\underline{R}_{1-\alpha}(A_{\bar\alpha})(x)$,$y_2=\alpha\wedge\underline{R}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)(x)$,$\beta=\bigwedge\limits_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))$,当$x$确定时$y_1,y_2$为$\alpha$的函数,建立坐标图如图 1。

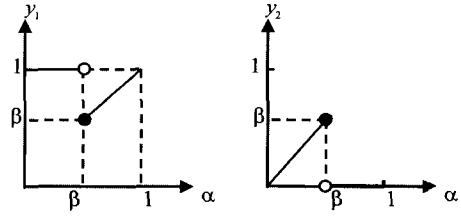


图 1 函数$y_1,y_2$的坐标图

根据定理 3.5 的证明可知,$y_1$的最小值等于$y_2$的最大值保证了$\underline{R}(A)=\sim\overline{R}(\sim A)$成立。文献[7]中的下近似算子使$y_2$在$\beta$点处取值为 0,这使得$y_2$的最大值趋近于$\beta$但不存在,所以定义 3.4 中的近似算子对具有更好的对偶性。

## 4 广义区间值模糊粗糙集

现将广义粗糙集理论与区间值模糊集、模糊关系相结合,对广义区间值模糊近似算子进行研究。

**定义 4.1** $R$是从$U$到$W$上的一个二元区间值模糊关系,称三元组$(U,W,R)$为广义区间值模糊近似空间。

**定义 4.2** 设$(U,W,R)$是一个广义区间值模糊近似空间,对于$\forall x\in U$,$R(x)=\{(y,R(x,y)):y\in W\}$。

**定义 4.3** 设$(U,W,R)$是广义区间值模糊近似空间,$\alpha,\beta\in I[0,1]$,$A\in F^I(W)$,

$$\underline{R}_\alpha(A_\beta)=\{x\in U:R_\alpha(x)\subseteq A_\beta\}$$

$$\overline{R}_\alpha(A_\beta)=\{x\in U:R_\alpha(x)\cap A_\beta\neq\varnothing\}$$

称$\underline{R}_\alpha(A_\beta)$,$\overline{R}_\alpha(A_\beta)$为$A$在近似空间$(U,W,R)$上的$\alpha,\beta$下、上近似。

**定义 4.4** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间,$A\in F^I(W)$,则对于$\forall x\in U$,

$$\underline{RIF}(A)(x)=\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))=[\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,$$

$y)^+)\vee A(y)^-)$，$\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y)^-)\vee A(y)^+)]$，

$\overline{RIF}(A)(x)=\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge A(y))=[\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^-\wedge A(y)^-)$，$\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^+\wedge A(y)^+)]$

称$(\underline{RIF}(A),\overline{RIF}(A))$为$A$在$(U,W,R)$上的广义区间值模糊粗糙集，算子$\underline{RIF}$，$\overline{RIF}$分别被称为广义区间值模糊粗糙下、上近似算子。

**定义 4.5** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，

$\underline{RIF'}(A)=\bigcup_{\alpha\in I[0,1]}\alpha\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)$

$\overline{RIF'}(A)=\bigcup_{\alpha\in I[0,1]}\alpha\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)$

称$(\underline{RIF'},\overline{RIF'})$为$A$在$(U,W,R)$上的广义区间值模糊粗糙集，算子$\underline{RIF'}$，$\overline{RIF'}$分别被称为广义区间值模糊粗糙下、上近似算子。

定义 4.4 和定义 4.5 中定义的近似算子分别是对广义 Dubois 模糊粗糙近似算子和定义 3.4 中近似算子的区间化，较之区间化的 Dubois 算子，定义 4.5 中的近似算子更加明确地反映出 Pawlak 粗糙集与区间值模糊粗糙集的内在联系。

**引理 4.6** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，对于$\forall\alpha\in I[0,1]$ $\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)\subseteq(\overline{RIF}(A))_\alpha$

证明：$\forall x\in U,x\in\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)\Rightarrow R_\alpha(x)\cap A_\alpha\neq\varnothing\Rightarrow\exists y\in W,R(x,y)\geqslant\alpha$ 且 $A(y)\geqslant\alpha\Rightarrow\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge A(y))\geqslant\alpha\Rightarrow x\in(\overline{RIF}(A))_\alpha$

反之不真，因为根据定义 2.4 中定义的区间值运算容易得到，$\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge A(y))\geqslant\alpha$ 并不能推出 $\exists y\in W,R(x,y)\wedge A(y)\geqslant\alpha$ 即 $\exists y\in W,R(x,y)\geqslant\alpha$ 且 $A(y)\geqslant\alpha$。

**引理 4.7** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，对于$\forall\alpha\in I[0,1]$，$\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)\subseteq(\underline{RIF}(A))$。

证明：$\forall x\in U$，

$x\in\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)\Rightarrow R_{\overline{1-\alpha}}(x)\subseteq A_\alpha\Rightarrow\forall y\in W(R(x,y)>1-\alpha\Rightarrow A(y)\geqslant\alpha)\Rightarrow\forall y\in W(R(x,y)\leqslant1-\alpha$ 或 $A(y)\geqslant\alpha)\Rightarrow\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))\geqslant\alpha\Rightarrow\underline{RIF}(A)\geqslant\alpha\Rightarrow x\in(\underline{RIF}(A))_\alpha$

反之不真，理由与引理 4.4 类似，$\sim R(x,y)\vee A(y)\geqslant\alpha$ 表示 $(1-R(x,y))^-\vee A(y)^-\geqslant\alpha^-$ 且 $(1-R(x,y))^+\vee A(y)^+\geqslant\alpha^+$ 这不能推出 $1-R(x,y)\geqslant\alpha$ 或 $A(y)\geqslant\alpha$，所以 $\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))\geqslant\alpha\Rightarrow\forall y\in W(R(x,y)\leqslant1-\alpha$ 或 $A(y)\geqslant\alpha)$不成立。

**定理 4.8** 设$(U,W,R)$是一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，则$\overline{RIF}(A)=\overline{RIF'}(A)$。

证明：由定理 2.9 得$\overline{RIF}(A)=\bigcup_{\alpha\in I[0,1]}\alpha(\overline{RIF}(A))_\alpha$ 由引理 4.6 得$\forall\alpha\in I[0,1],\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)\subseteq(\overline{RIF}(A))_\alpha$ 从而有$\overline{RIF'}(A)\subseteq\overline{RIF}(A)$

下面证明$\overline{RIF}(A)\subseteq\overline{RIF'}(A)$

$\forall x\in U$，对于$\forall y\in W$，存在$\alpha=R(x,y)\wedge A(y)\in I[0,1]$有 $y\in R_\alpha(x)\cap A_\alpha$。

$y\in R_\alpha(x)\cap A_\alpha\Rightarrow R_\alpha(x)\cap A_\alpha\neq\varnothing\Rightarrow x\in\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)\Rightarrow\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)(x)=1\Rightarrow\alpha\wedge\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)(x)=\alpha=R(x,y)\wedge A(y)$

由 $y$ 的任意性得$\overline{RIF'}(A)(x)=\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\overline{RIF'}_{\alpha}(A_\alpha)(x))\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge A(y))=\overline{RIF}(A)(x)$

从而$\overline{RIF}(A)\subseteq\overline{RIF'}(A)$，所以$\overline{RIF}(A)=\overline{RIF'}(A)$。

**定理 4.9** 设$(U,W,R)$是一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，$\underline{RIF}(A)=\underline{RIF'}(A)$。

证明：由定理 2.9 得$\underline{RIF}(A)=\bigcup_{\alpha\in I[0,1]}\alpha(\underline{RIF}(A))_\alpha$。由引理 4.7 得 $\forall\alpha\in I[0,1]$，$\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)\subseteq(\underline{RIF}(A))_\alpha$ 从而有 $\underline{RIF'}(A)\subseteq\underline{RIF}(A)$

下面证明$\underline{RIF}(A)\subseteq\underline{RIF'}(A)$

$\forall x\in U$，设 $\alpha_1=[0,\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))^+]$，$\alpha_2=[\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))^-,\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))^-]$

首先证明 $x\in\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha_1}}(A_{\alpha_1})$

$\alpha_1=[0,\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y)^-)\vee A(y)^+)]$，$1-\alpha_1=[\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^-\wedge(1-A(y)^+)),1]$，对于$\forall y_0\in W$，

$y_0\in R_{\overline{1-\alpha_1}}(x)\Rightarrow R(x,y_0)>1-\alpha_1\Rightarrow R(x,y_0)^->\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^-\wedge(1-A(y)^+))\Rightarrow R(x,y_0)^->R(x,y_0)^-\wedge(1-A(y_0)^+)$

$\Rightarrow R(x,y_0)^->1-A(y_0)^+\Rightarrow1-A(y_0)^+=R(x,y_0)^-\wedge(1-A(y_0)^+)\Rightarrow1-A(y_0)^+\leqslant\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^-\wedge(1-A(y)^+))$

$\Rightarrow A(y_0)^+\geqslant\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y)^-)\vee A(y)^+)\Rightarrow A(y_0)\geqslant\alpha_1\Rightarrow y_0\in A_{\alpha_1}$

由 $y_0$ 的任意性得 $R_{\overline{1-\alpha_1}}(x)\subseteq A_{\alpha_1}$ 即 $x\in\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha_1}}(A_{\alpha_1})$

类似的方法可以证明 $x\in\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha_2}}(A_{\alpha_2})$也成立。

$$\begin{aligned}\underline{RIF'}(A)(x)&=\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha}}(A_\alpha)(x))\geqslant(\alpha_1\wedge\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha_1}}(A_{\alpha_1})(x))\vee(\alpha_2\wedge\underline{RIF'}_{\overline{1-\alpha_2}}(A_{\alpha_2})(x))\\&=\alpha_1\vee\alpha_2=[\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))^-,\bigwedge_{y\in W}(\sim R(x,y)\vee A(y))^+]\\&=\underline{RIF}(A)(x)\end{aligned}$$

由 $x$ 的任意性得$\underline{RIF}(A)\subseteq\underline{RIF'}(A)$，所以$\underline{RIF}(A)=\underline{RIF'}(A)$。

**定理 4.10** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间，$A\in F^I(W)$，则$\sim\underline{RIF}(A)=\overline{RIF}(\sim A)$，$\sim\overline{RIF}(A)=\underline{RIF}(\sim A)$。

证明：对于$\forall x\in U$

$$\begin{aligned}\underline{RIF}(\sim A)(x)&=[\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge(\sim A)(y))^-,\bigvee_{y\in W}(R(x,y)\wedge(\sim A)(y))^+]\\&=[\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^-\wedge(1-A(y)^+)),\bigvee_{y\in W}(R(x,y)^+\wedge(1-A(y)^-))]\\&=1-[\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y)^+)\vee A(y)^-),\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y)^-)\vee A(y)^+)]\\&=1-[\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))^-\vee A(y)^-),\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))^+\vee A(y)^+)]\\&=1-[\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))^-,\bigwedge_{y\in W}((1-R(x,y))\vee A(y))^+]\\&=\sim\underline{RIF}(A)(x)\end{aligned}$$

所以，$\sim\underline{RIF}(A)=\overline{RIF}(\sim A)$。类似可证$\sim\overline{RIF}(A)=\underline{RIF}(\sim A)$。

由定理 4.8 和定理 4.9 可知$\underline{RIF'}$与$\overline{RIF'}$也存在对偶性。

## 5 一般二元区间值 fuzzy 关系下近似算子的性质

**定理 5.1** 设$(U,W,R)$为一个广义区间值模糊近似空间，则近似算子$\underline{RIF'}$与$\overline{RIF'}$有如下性质：$\forall A,B\in F^I(W)$，$\forall a\in I[0,1]$

(1)$\underline{RIF'}(A\cup\underline{\underline{a}})=\underline{RIF'}(A)\cup\underline{\underline{a}}$，$\overline{RIF'}(A\cap\underline{\underline{a}})=\overline{RIF'}(A)\cap\underline{\underline{a}}$；

(2)$\overline{RIF'}(A\cup B)=\overline{RIF'}(A)\cup\overline{RIF'}(B)$，$\underline{RIF'}(A\cap B)=\underline{RIF'}(A)\cap\underline{RIF'}(B)$；

(3)$A\subseteq B\Rightarrow\underline{RIF'}(A)\subseteq\underline{RIF'}(B)$，$A\subseteq B\Rightarrow\overline{RIF'}(A)\subseteq\overline{RIF'}(B)$；

(4)$\underline{RIF'}(A\cup B)\supseteq\underline{RIF'}(A)\cup\underline{RIF'}(B)$，$\overline{RIF'}(A\cap B)\subseteq\overline{RIF'}(A)\cap\overline{RIF'}(B)$。

其中$\underline{\underline{a}}$为隶属度恒为常数$a$的区间值模糊集。

证明：显然，同一序号下的两个等式是对偶的，只需证明其中一个。

(1) 证明$\underline{RIF'}(A\cup\underline{\underline{a}})=\underline{RIF'}(A)\cup\underline{\underline{a}}$

对于$\forall x\in U$，

设$D_1=\{\alpha\in I[0,1]:\forall y\in R_{1-\alpha}(x),A(y)\geqslant\alpha$ 或 $a\geqslant\alpha\}$，$D_2=\{\alpha\in I[0,1]:\forall y\in R_{1-\alpha}(x),A(y)\vee a\geqslant\alpha\}$，显然有$D_1\subseteq D_2$，$\bigvee\limits_{\alpha\in D_1}\alpha\leqslant\bigvee\limits_{\alpha\in D_2}\alpha$。

设$D_3=D_2-D_1$，$\forall\beta\in D_3$有两种情况$\beta^+\leqslant a^+,\beta^-\leqslant\bigwedge\limits_{y\in R_{1-\alpha}(x)}A(y)^-$或$\beta^-\leqslant a^-,\beta^+\leqslant\bigwedge\limits_{y\in R_{1-\alpha}(x)}A(y)^+$，对于第一种情况，设$b=[\bigwedge\limits_{y\in R_{1-\alpha}(x)}A(y)^-,\bigwedge\limits_{y\in R_{1-\alpha}(x)}A(y)^-]$因为$a,b\in D_1$则有$\beta\leqslant a\vee b\leqslant\bigvee\limits_{\alpha\in D_1}\alpha$，第二种情况可以类似证明，由$\beta$的任意性得$\bigvee\limits_{\alpha\in D_3}\alpha\leqslant\bigvee\limits_{\alpha\in D_1}\alpha$则$\bigvee\limits_{\alpha\in D_2}\alpha=\bigvee\limits_{\alpha\in D_1}\alpha$。

$$\begin{aligned}\underline{RIF'}(A\cup\underline{\underline{a}})(x)&=\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\underline{RIF'}_{1-\alpha}(A\cup\underline{\underline{a}})_\alpha(x))\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:R_{1-\alpha}(x)\subseteq(A\cup\underline{\underline{a}})_\alpha\}\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:\forall y\in R_{1-\alpha}(x),A(y)\vee a\geqslant\alpha\}\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:\forall y\in R_{1-\alpha}(x),A(y)\geqslant\alpha\text{ 或 }a\geqslant\alpha\}\\&=a\vee(\vee\{\alpha\in I[0,1]:\forall y\in R_{1-\alpha}(x),A(y)\geqslant\alpha\})\\&=a\vee\underline{RIF'}(A)(x)=(\underline{\underline{a}}\cup\underline{RIF'}(A))(x)\end{aligned}$$

从而$\underline{RIF'}(A\cup\underline{\underline{a}})=\underline{RIF'}(A)\cup\underline{\underline{a}}$。

(2) 证明$\overline{RIF'}(A\cup B)=\overline{RIF'}(A)\cup\overline{RIF'}(B)$

对于$\forall x\in U$

设$D_1=\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),A(y)\geqslant\alpha$ 或 $B(y)\geqslant\alpha\}$，$D_2=\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),A(y)\vee B(y)\geqslant\alpha\}$与(1)的证明类似，可以得到$\bigvee\limits_{\alpha\in D_2}\alpha=\bigvee\limits_{\alpha\in D_1}\alpha$。

$$\begin{aligned}\overline{RIF'}(A\cup B)(x)&=\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\overline{RIF'}_\alpha(A\cup B)_\alpha(x))=\vee\{\alpha\\&\in I[0,1]:R_\alpha(x)\cap(A\cup B)_\alpha\neq\varnothing\}\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),(A\cup B)(y)\geqslant\alpha\}\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),A(y)\vee B(y)\geqslant\alpha\}\\&=\vee\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),A(y)\geqslant\alpha\text{ 或 }B(y)\geqslant\\&\alpha\}\\&=(\vee\{\alpha\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),A(y)\geqslant\alpha\})\vee(\vee\{\alpha\\&\in I[0,1]:\exists y\in R_\alpha(x),B(y)\geqslant\alpha\})\\&=\{\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\overline{RIF'}_\alpha(A)_\alpha(x))\vee(\bigvee_{\alpha\in I[0,1]}(\alpha\wedge\overline{RIF}_\alpha\\&(B)_\alpha(x))=\overline{RIF'}(A)(x)\vee\overline{RIF'}(B)(x)\\&=\overline{RIF'}(A)\cup\overline{RIF'}(B))(x)\end{aligned}$$

从而$\overline{RIF'}(A\cup B)=\overline{RIF'}(A)\cup\overline{RIF'}(B)$

(3) 证明$A\subseteq B\Rightarrow\underline{RIF'}(A)\subseteq\underline{RIF'}(B)$

$A\subseteq B\Rightarrow A_\alpha\subseteq B_\alpha\Rightarrow\underline{RIF'}_{1-\alpha}(A_\alpha)\subseteq\underline{RIF'}_{1-\alpha}(B_\alpha)$(定义4.3、文献[9]定理3.2(4))$\Rightarrow\bigcup\limits_{\alpha\in I[0,1]}\alpha\,\underline{RIF'}_{1-\alpha}(A_\alpha)\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I[0,1]}\alpha\,\underline{RIF'}_{1-\alpha}(B_\alpha)\Rightarrow\underline{RIF'}(A)\underline{RIF'}(B)$

(4) 可由(3)直接得到。

**结束语** Pawlak粗糙集模型的推广是粗糙集理论研究的一个重要课题，本文将广义粗糙集理论与区间值模糊集、模糊关系相结合，给出了两种广义区间值模糊近似算子，着重证明了二者的等价性以及下、上近似算子间的对偶性，并讨论了在一般二元区间值模糊关系下近似算子的一些基本性质。通过本文的定理及其证明可知，点值模糊粗糙集与区间值模糊粗糙集的近似算子性质不同，主要因为是在点值和区间值上建立的序关系不同而引起的。进一步的工作在于对不同类型的二元区间值模糊关系下近似算子的性质的讨论以及对广义区间值模糊粗糙集的公理化方法的研究等。

## 参 考 文 献


[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[2] Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-208

[3] Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100: 327-342

[4] 吴伟志，张文修，徐宗本. 粗糙模糊集的构造与公理化方法[J]. 计算机学报，2004，27(2)：197-203

[5] 米据生，吴伟志，张文修. 粗糙集的构造与公理化方法[J]. 模式识别与人工智能，2002，15(3)：280-284

[6] Wu Wei-zhi, Mi Ju-sheng, Zhang Wen-xiu. Generalized fuzzy rough sets[J]. International Journal of Information Sciences, 2003, 151: 263-282

[7] Yang Xiao-ping. Minimization of axiom sets on fuzzy app-roximation operators[J]. International Journal of Information Sciences, 2007, 177: 3840-3854

[8] Wu Wei-zhi, Zhang Wen-xiu. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. International Journal of Information Sciences, 2004, 159: 233-254

[9] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001

[10] Gong Z, et al. Rough set theory for the interval-valued fuzzy information systems[J]. International Journal of Information Sciences, 2008(online)

[11] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. International Journal of Information Sciences, 1998, 109(1/4): 21-47

[12] Yao Y Y. Generalized rough set model// L. Polkowski, A. Skowron, eds. Rough Sets in Knowledge Discovery 1. Methodology and Applications. Physica-Verlag, Heidelberg, 1998: 286-318