基于经典-模糊变精度概念格的决策规则获取及其推理算法

仇国芳[1] 朱朝晖[2]
(西安建筑科技大学管理学院 陕西710055)[1] (深圳卓成混凝土模块科学研究所 深圳518000)[2]

摘 要 在模糊形式背景上引入了4种经典-模糊变精度概念,形成4种变精度概念格,在此基础上得到4种决策规则集。利用包含度构建不同决策规则集中的推理算法,进而得到所有对象组合的决策规则。证明了由决策规则得到的决策集分别是必然性与可能性决策集,且推理算法具有协调性和相容性。

关键词 变精度概念格,决策规则,推理算法,包含度
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Acquisitions to Decision Rules and Algorithms to Inferences Based on Crisp-fuzzy Variable Threshold Concept Lattices

QIU Guo-fang[1] ZHU Zhao-hui[2]
(School of Management, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)[1]
(Shenzhen Zhuo-cheng Scientific Institute of Modular Concrete Block, Shengzhen 518000, China)[2]

Abstract Four kinds of crisp-fuzzy variable threshold concepts are introduced in a fuzzy formal context and they form four kinds of variable threshold concept lattices respectively. And then four kinds of decision rule sets are obtained based on these lattices. Algorithms to inferences under different decision rule sets are established by an inclusion degree, and total decision rules of all combinations among objects are acquired. The decisions from the total decision rules are proved to be the lower approximated and the upper approximated decision sets, and the algorithms are accordant and consistent.

Keywords Variable threshold concept, Decision rule, Inference algorithm, Inclusion degree

自20世纪80年代初Wille[1]引入形式概念分析以来,概念格理论得到了深入的研究和广泛的应用。

概念格理论是在经典形式背景上提出的,而经典的二元关系使概念格的应用受到限制。Burusco[2]首先将模糊逻辑应用于概念格,随后Pollandt[2]、Belohlavek[3-6]与Georgescu[7]研究了模糊概念格;Fan[8]等建立了4种模糊概念格,与4种经典形式背景上的概念格一一对应,并研究了基于模糊概念格的模糊推理问题。由于模糊概念的外延和内涵都是模糊集,给实践应用带来许多困难。Zhang[9]等提出了变精度概念格,在模糊形式背景中,从模糊形式概念出发,建立了经典-经典、经典-模糊、模糊-经典3种变精度概念,使概念在外延或内涵中至少保证有一方是经典集,这样不仅减少了概念的数量,而且使应用成为可能。仇国芳[10]在现有4种概念格的基础上,建立了经典形式背景上的4种变精度经典-经典概念,利用4种概念格进行决策规则获取与推理。

本文在模糊形式背景上,建立了经典-模糊的变精度概念,其中概念的外延是经典集,概念的内涵是模糊集。在此基础上研究决策规则获取及其推理算法。

1 变精度概念格

1.1 对合完备剩余格及其性质

称$L=(L,\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0,1)$为完备剩余格,若满足:

(1)$(L,\wedge,\vee,0,1)$是具有最小元0和最大元1的完备格;

(2)$(L,\otimes,1)$是可交换群;

(3)$(\otimes,\rightarrow)$是L中的伴随对,即

$a\otimes b\leqslant c\Leftrightarrow a\leqslant b\rightarrow c, a,b,c\in L$。

当完备剩余格的补定义为$a^c=a\rightarrow 0$,若满足$a=a^{cc}, a\in L$,则称L为对合完备剩余格。当$a,b\in L$,对合剩完备余格具有以下性质:

P1. $1\rightarrow a=a, a\otimes 0=0$;

P2. $(a\otimes b)^c=a\rightarrow b^c$;

P3. $b\rightarrow \bigwedge_{i\in T} a_i=\bigwedge_{i\in T}(b\rightarrow a_i)$;

P4. $\bigvee_{i\in T}(a\otimes b_i)=a\otimes\bigvee_{i\in T} b_i$。

其中,T为指标集。

1.2 4种经典-模糊变精度概念

设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景,其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为有限对象集,$V=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$为有限属性集,$\tilde{I}$为U与V之间的二元关系$\tilde{I}:U\otimes V\rightarrow[0,1]$。则

$L=([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\rightarrow,0,1)$为对合完备剩余格。

在模糊形式背景$(U,V,\tilde{I})$中,用$\mathcal{P}(U)$表示U中经典集全

到稿日期:2009-05-04 返修日期:2009-06-18 本文受国家自然科学基金项目(No. 60673096),陕西省教育厅科研专项基金(No. 08JK089)资助。
仇国芳(1967-),女,副教授,主要研究方向为智能决策理论与方法,E-mail:qiugf_home@163.com;朱朝晖(1967-),男,工程师,主要研究方向为计算智能。

体，用$\mathscr{F}(V)$表示V中模糊集全体。

定义 1 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，对任意$X\in\mathscr{P}(U)$，$\tilde{Y}\in\mathscr{F}(V)$，$0<\delta\leqslant 1$，定义算子：

$$X^{\triangleleft}(y)=\delta\to\bigwedge_{x\in X}\tilde{I}(x,y),y\in V$$

$$\tilde{Y}^{\triangleleft}=\{x\in U\mid\bigwedge_{y\in V}(\tilde{Y}(y)\to\tilde{I}(x,y))\geqslant\delta\}$$

定理 1[9] 定义 1 中的算子对$(\triangleleft,\triangleleft)$满足 Galois 连接，即$X\subseteq\tilde{Y}^{\triangleleft}\Leftrightarrow\tilde{Y}\subseteq X^{\triangleleft}$。

定义 2 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，对任意$X\in\mathscr{P}(U)$，$\tilde{Y}\in\mathscr{F}(V)$，$0<\delta\leqslant 1$，定义算子：

$$X^{\triangleright}(y)=\delta\otimes\bigvee_{x\notin X}\tilde{I}^{c}(x,y),y\in V$$

$$\tilde{Y}^{\triangleright}=\{x\in U\mid\bigvee_{y\in V}(\tilde{Y}^{c}(y)\otimes\tilde{I}^{c}(x,y))>1-\delta\}$$

定理 2 定义 2 中的算子对$(\triangleright,\triangleright)$满足 Galois 连接，即$\tilde{Y}^{\triangleright}\subseteq X\Leftrightarrow X^{\triangleright}\subseteq\tilde{Y}$。

证明：由于

$$\begin{aligned}&X^{c}\subseteq(\tilde{Y}^{\triangleright})^{c}\\&\Leftrightarrow\forall x\notin X,\bigvee_{y\in V}(\tilde{Y}^{c}(y)\otimes\tilde{I}^{c}(x,y))\leqslant 1-\delta\\&\Leftrightarrow\forall x\notin X,\bigwedge_{y\in V}(\tilde{I}^{c}(x,y)\to\tilde{Y}(y))\geqslant\delta\\&\Leftrightarrow\forall x\notin X,\forall y\in V,\delta\otimes\tilde{I}^{c}(x,y)\leqslant\tilde{Y}(y)\\&\Leftrightarrow\forall y\in V,\delta\otimes\bigvee_{x\notin X}\tilde{I}^{c}(x,y)\leqslant\tilde{Y}(y)\\&\Leftrightarrow X^{\triangleright}\subseteq\tilde{Y}\end{aligned}$$

定义 3 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，对任意$X\in\mathscr{P}(U)$，$\tilde{Y}\in\mathscr{F}(V)$，$0<\delta\leqslant 1$，定义算子：

$$X^{\Delta}(y)=\delta\to\bigwedge_{x\notin X}\tilde{I}^{c}(x,y),y\in V$$

$$\tilde{Y}^{\Delta}=\{x\in U\mid\bigvee_{y\in V}(\tilde{Y}(y)\otimes\tilde{I}(x,y))>1-\delta\}$$

定理 3 定义 3 中的算子对(Δ,Δ)满足 Galois 连接，即$\tilde{Y}^{\Delta}\subseteq X\Leftrightarrow\tilde{Y}\subseteq X^{\Delta}$。

证明：由于

$$\begin{aligned}&X^{c}\subseteq(\tilde{Y}^{\Delta})^{c}\\&\Leftrightarrow\forall x\notin X,\bigvee_{y\in V}(\tilde{Y}(y)\otimes\tilde{I}(x,y))\leqslant 1-\delta\\&\Leftrightarrow\forall x\notin X,\bigwedge_{y\in V}(\tilde{I}(x,y)\to\tilde{Y}^{c}(y))\geqslant\delta\\&\Leftrightarrow\forall y\in V,\forall x\notin X,\delta\otimes\tilde{I}(x,y)\leqslant\tilde{Y}^{c}(y)\\&\Leftrightarrow\forall y\in V,\tilde{Y}(y)\leqslant\delta\to\bigwedge_{x\notin X}\tilde{I}^{c}(x,y)\\&\Leftrightarrow\tilde{Y}\subseteq X^{\Delta}\end{aligned}$$

定义 4 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，对任意$X\in\mathscr{P}(U)$，$\tilde{Y}\in\mathscr{F}(V)$，$0<\delta\leqslant 1$，定义算子：

$$X^{\triangledown}(y)=\delta\otimes\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,y),y\in V$$

$$\tilde{Y}^{\triangledown}=\{x\in U\mid\bigwedge_{y\in V}(\tilde{I}(x,y)\to\tilde{Y}(y))\geqslant\delta\}$$

定理 4 定义 4 中的算子对$(\triangledown,\triangledown)$满足 Galois 连接，即$X\subseteq\tilde{Y}^{\triangledown}\Leftrightarrow X^{\triangledown}\subseteq\tilde{Y}$。

证明：由于

$$\begin{aligned}&X\subseteq\tilde{Y}^{\triangledown}\\&\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall y\in V,\tilde{I}(x,y)\to\tilde{Y}(y)\geqslant\delta\\&\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall y\in V,\delta\otimes\tilde{I}(x,y)\leqslant\tilde{Y}(y)\\&\Leftrightarrow\forall y\in V,\delta\otimes\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,y)\leqslant\tilde{Y}(y)\\&\Leftrightarrow\tilde{Y}\supseteq X^{\triangledown}\end{aligned}$$

定义 5 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，对任意$X\in\mathscr{P}(U)$，$\tilde{Y}\in\mathscr{F}(V)$，$0<\delta\leqslant 1$，若二元组$(X,\tilde{Y})$满足：

(C1)$X=\tilde{Y}^{\triangleleft}$，$\tilde{Y}=X^{\triangleleft}$，则称$(X,\tilde{Y})$为经典-模糊变精度形式概念，简称变精度形式概念；

(C2)$X=\tilde{Y}^{\triangleright}$，$\tilde{Y}=X^{\triangleright}$，则称$(X,\tilde{Y})$为经典-模糊变精度对偶形式概念，简称变精度对偶概念；

(C3)$X=\tilde{Y}^{\Delta}$，$\tilde{Y}=X^{\Delta}$，则称$(X,\tilde{Y})$为经典-模糊变精度面向对象概念，简称变精度对象概念；

(C4)$X=\tilde{Y}^{\triangledown}$，$\tilde{Y}=X^{\triangledown}$，则称$(X,\tilde{Y})$为经典-模糊变精度面向属性概念，简称变精度属性概念。

上述 4 种变精度概念中，X称为概念外延，$\tilde{Y}$称为概念内涵，此时外延为经典集，内涵为模糊集。由定理 1－定理 4 知，4 种变精度概念的全体分别构成完备格，记：

$$L_f(U,A,\tilde{I})=\{(X,\tilde{Y})\mid X=\tilde{Y}^{\triangleleft},\tilde{Y}=X^{\triangleleft}\}$$

$$L_d(U,A,\tilde{I})=\{(X,\tilde{Y})\mid X=\tilde{Y}^{\triangleright},\tilde{Y}=X^{\triangleright}\}$$

$$L_o(U,A,\tilde{I})=\{(X,\tilde{Y})\mid X=\tilde{Y}^{\Delta},\tilde{Y}=X^{\Delta}\}$$

$$L_a(U,A,\tilde{I})=\{(X,\tilde{Y})\mid X=\tilde{Y}^{\triangledown},\tilde{Y}=X^{\triangledown}\}$$

2 决策规则集及其推理算法

引入包含度概念，从而利用包含度建立决策推理。

定义 6[11] 设U为一个集合，$\mathscr{P}(U)$表示U上幂集。$\forall A,B\in\mathscr{P}(U)$，有数$D(B/A)$对应，且满足：

(D1)$0\leqslant D(B/A)\leqslant 1$；

(D2)$A\subseteq B\Rightarrow D(B/A)=1$；

(D3)$\forall A,B,C\in\mathscr{P}(U),A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow D(A/C)\leqslant D(B/C)$。

称$D(B/A)$为$\mathscr{P}(U)$上的包含度。

定义 7 设$(U,V,\tilde{I})$为模糊形式背景，其中U为方案集，V为决策集，$\tilde{I}$为方案集与决策集之间的模糊二元关系，即$\tilde{I}$：$U\times V\to[0,1]$，则称

(1)$L^{\mathrm{I}}(U,V,\tilde{I})=\{(X_i,\tilde{Y}_i)\mid(X_i,\tilde{Y}_i)\in L_f,i\leqslant l\}$为 I 型决策规则集。

(2)$L^{\mathrm{II}}(U,V,\tilde{I})=\{(X_i,\tilde{Y}_i)\mid(X_i,\tilde{Y}_i)\in L_d,i\leqslant l\}$为 II 型决策规则集。

(3)$L^{\mathrm{III}}(U,V,\tilde{I})=\{(X_i,\tilde{Y}_i)\mid(X_i,\tilde{Y}_i)\in L_o,i\leqslant l\}$为 III 型决策规则集。

(4)$L^{\mathrm{IV}}(U,V,\tilde{I})=\{(X_i,\tilde{Y}_i)\mid(X_i,\tilde{Y}_i)\in L_a,i\leqslant l\}$为 IV 型决策规则集。

其中，l表示决策规则集中概念的数目。

由 4 种变精度概念的定义知，在 I 型和 II 型决策规则集中，有性质$X_i\subseteq X_j\Leftrightarrow\tilde{Y}_j\subseteq\tilde{Y}_i(i,j\leqslant l)$；在 III 型和 IV 型决策规则集中，有性质$X_i\subseteq X_j\Leftrightarrow\tilde{Y}_i\subseteq\tilde{Y}_j(i,j\leqslant l)$。

在模糊形式背景$(U,V,\tilde{I})$中，$\forall X_1,X_2\in\mathscr{P}(U)$，定义包含度为：

$$D(X_2/X_1)=\begin{cases}1,X_1\subseteq X_2\\0,X_1\not\subseteq X_2\end{cases}$$

在 I 型和 II 型决策规则集中，$\forall X\in\mathscr{P}(U)$，建立推理算法：

$$\tilde{Y}_1(X)(y)=\bigvee_{i=1}^{n}(\tilde{Y}_i(y)\otimes D(X_i/X)),y\in V$$

$$\tilde{Y}_2(X)(y)=\bigwedge_{i=1}^{n}(D(X/X_i)\to\tilde{Y}_i(y)),y\in V$$

由推理算法得到X的 I 型和 II 型决策规则为：

$$X\to\tilde{Y}_1(X),X\to\tilde{Y}_2(X)$$

在 III 型和 IV 型决策规则集中，$\forall X\in\mathscr{P}(U)$，建立推理算法：

$$\tilde{Y}_3(X)(y)=\bigvee_{i=1}^{n}(\tilde{Y}_i(y)\otimes D(X/X_i)),y\in V$$

$$\tilde{Y}_4(X)(y)=\bigwedge_{i=1}^{n}(D(X_i/X)\to\tilde{Y}_i(y)),y\in V$$

由推理算法得到 X 的 III 型和 IV 型决策规则为：

$X \to \tilde{Y}_3(X), X \to \tilde{Y}_4(X)$

定义 8 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策推理中，$\forall X \in \mathscr{P}(U)$，其决策集的必然性算子与可能性算子分别为：

$B_1(\tilde{Y}(X)) = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X \subseteq X_i\}$

$L_1(\tilde{Y}(X)) = \bigcap\{\tilde{Y}_i \mid X_i \subseteq X\}$

定理 5 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策推理中，$\forall X \in \mathscr{P}(U)$，有：

$\tilde{Y}_1(X) = B_1(\tilde{Y}(X)), \tilde{Y}_2(X) = L_1(\tilde{Y}(X))$

证明：由 $\tilde{Y}_1(X)$ 的定义，$\forall y \in V$，有：

$$\tilde{Y}_1(X)(y) = \bigvee_{i=1}^{n}(\tilde{Y}_1(y) \otimes D(X_i/X)) = \bigvee_{i=1}^{n}\{\tilde{Y}_i(y) \mid X \subseteq X_i\} = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X \subseteq X_i\}(y)$$

于是得到 $\tilde{Y}_1(X) = B_1(\tilde{Y}(X))$。

由 $\tilde{Y}_2(X)$ 的定义，$\forall y \in V$，有：

$$\tilde{Y}_2(X)(y) = \bigwedge_{i=1}^{n}(D(X/X_i) \to \tilde{Y}_i(y)) = \bigwedge_{i=1}^{n}\{\tilde{Y}_i(y) \mid X_i \subseteq X\} = \bigcap\{\tilde{Y}_i \mid X_i \subseteq X\}(y)$$

于是得到 $\tilde{Y}_2(X) = L_1(\tilde{Y}(X))$。

定理 5 表示由 I 型和 II 型推理算法获得的决策结果分别是必然性决策集与可能性决策集。

定理 6 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策推理中，有 $B_1(\tilde{Y}(X)) \subseteq L_1(\tilde{Y}(X))$。

证明：由 $\tilde{Y}_1(X)$ 的定义知，$\forall y \in V$，$\exists j \leqslant l$，使 $X \subseteq X_j$，且 $\tilde{Y}_1(X)(y) = \tilde{Y}_j(y)$。又因 $\forall X_i \subseteq X$，必有 $X_i \subseteq X_j$，由 I 型和 II 型决策规则集的性质有 $X_i \subseteq X_j \Leftrightarrow \tilde{Y}_j \subseteq \tilde{Y}_i$，从而 $\tilde{Y}_j(y) \leqslant \tilde{Y}_i(y)$，于是 $\tilde{Y}_j(y) \leqslant \wedge\{\tilde{Y}_i(y) \mid X_i \subseteq X\}$。定理得证。

定理 7 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策推理中，$\forall X, X' \in \mathscr{P}(U)$，必有：

$X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_1(X') \subseteq \tilde{Y}_1(X)$

$X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_2(X') \subseteq \tilde{Y}_2(X)$

证明：由于

$\tilde{Y}_1(X') = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X' \subseteq X_i\}$

$\tilde{Y}_1(X) = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X \subseteq X_i\}$

若 $\tilde{Y}_i \subseteq \tilde{Y}_1(X')$，则 $X' \subseteq X_i$，又因 $X \subseteq X'$，则必有 $X \subseteq X_i$，于是 $\tilde{Y}_i \subseteq \tilde{Y}_1(X)$。由此得到 $X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_1(X') \subseteq \tilde{Y}_1(X)$。

类似可得 $X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_2(X') \subseteq \tilde{Y}_2(X)$。

定理 7 表示推理算法满足协调性，即由推理算法获得的决策规则与原 I 型和 II 型决策规则集具有保序性。

定义 9 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策推理中，若 $X_j \to \tilde{Y}_j$，满足 $\tilde{Y}_1(X_j) = \tilde{Y}_j, \tilde{Y}_2(X_j) = \tilde{Y}_j, j \leqslant l$，则称推理算法具有相容性。

定理 8 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 I 型和 II 型决策规则集中建立的推理算法是相容的。

证明：由于

$\tilde{Y}_1(X_j) = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X_j \subseteq X_i\}$

因 $X_j \subseteq X_j$，则 $\tilde{Y}_j \subseteq \tilde{Y}_1(X_j)$。若 $X_j \subseteq X_i$，则有 $\tilde{Y}_i \subseteq \tilde{Y}_j$，于是 $\tilde{Y}_1(X_j) \subseteq \tilde{Y}_j$，由此得 $\tilde{Y}_1(X_j) = \tilde{Y}_j$。

类似可得 $\tilde{Y}_2(X_j) = \tilde{Y}_j$。

在 III 型和 IV 型决策规则集中，可建立相应的推理算法。

定义 10 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策推理中，$\forall X \in \mathscr{P}(U)$，其决策集的必然性算子与可能性算子分别为：

$B_2(\tilde{Y}(X)) = \bigcup\{\tilde{Y}_i \mid X_i \subseteq X\}$

$L_2(\tilde{Y}(X)) = \bigcap\{\tilde{Y}_i \mid X \subseteq X_i\}$

定理 9 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策推理中，$\forall X \in \mathscr{P}(U)$，有：

$\tilde{Y}_3(X) = B_2(\tilde{Y}(X)), \tilde{Y}_4(X) = L_2(\tilde{Y}(X))$

证明：类似定理 5 可证。

定理 9 表示由 III 型和 IV 型推理算法获得的决策结果分别是必然性决策集与可能性决策集。

定理 10 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策推理中，有 $B_2(\tilde{Y}(X)) \subseteq L_2(\tilde{Y}(X))$。

证明：类似定理 6 可证。

定理 11 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策推理中，$\forall X, X' \in \mathscr{P}(U)$，必有：

$X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_3(X) \subseteq \tilde{Y}_3(X')$

$X \subseteq X' \Rightarrow \tilde{Y}_4(X) \subseteq \tilde{Y}_4(X')$

证明：类似定理 7 可证。

定理 11 表示推理算法满足协调性，即由推理算法获得的决策规则与原 III 型和 IV 型决策规则集具有保序性。

定义 11 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策推理中，若 $X_j \to \tilde{Y}_j$，满足 $\tilde{Y}_3(X_j) = \tilde{Y}_j, \tilde{Y}_4(X_j) = \tilde{Y}_j, j \leqslant l$，则称推理算法具有相容性。

定理 12 设 $(U,V,\tilde{I})$ 为模糊形式背景，在 III 型和 IV 型决策规则集中建立的推理算法是相容的。

证明：类似定理 8 可证。

结束语 利用变精度概念格探索模糊形式背景上对象→属性的决策规则是一个新的研究思路。本文对应 4 种目前已有的概念形式，建立外延是经典集、内涵是模糊集的 4 种变精度概念，由此得到决策规则集。再利用包含度建立推理算法，获得了所有对象组合的必然性决策与可能性决策，且证明了推理算法具有协调性与相容性。

参 考 文 献

[1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concept[C]// Rival I, ed. Ordered Sets. Reidel, Dordrecht, Boston, 1982

[2] Burusco A, Fuentes-Gonzales R. The study of the L-fuzzy concept lattice[J]. Math. Soft Comput, 1994, I 3: 209-218

[3] Belohlavek R. Fuzzy Galois connections[J]. Math. Logic Quarterly, 1999, 45(4): 497-504

[4] Belohlavek R. Lattices of fixed points of fuzzy Galois connections[J]. Math. Logic Quarterly, 2001, 47: 111-116

[5] Belohlavek R. Fuzzy relational systems: foundations and principles[M]. New York: Kluwer, 2002

[6] Belohlavek R. Concept lattices and order in fuzzy logic[J]. Ann. Pure Appl. Logic, 2004, 128(1-3): 277-298

[7] Georgescu G, Popescu A. Non-dual fuzzy connections[J]. Archive Math. Logic, 2004, 43(8): 1009-1039

[8] Fan S Q, Zhang W X, Xu W. Fuzzy inference based on fuzzy concept lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 3177-3187

[9] Zhang W X, Ma J M, Fan S Q. Variable threshold concept lattices[J]. Information Sciences, 2007, 177: 4883-4892

[10] Qiu G F. Approaches to decision inference rules based on concept lattices[C]// 2009 International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing

[11] 张文修，梁怡，徐萍. 基于包含度的不确定推理[M]. 北京：清华大学出版社，2007