

集值信息系统基于优势关系下的知识约简

陈子春^{1,2} 刘鹏惠² 秦克云¹

(西南交通大学数学学院 成都 610039)¹ (西华大学数学与计算机学院 成都 610013)²

摘 要 在集值信息系统中,把所有属性看成是一种准则,然后利用属性集值的取值分布定义了两种不同的优势关系,它们都是经典信息系统中优势关系的推广。针对这两种优势关系,给出了集值信息系统的知识约简与对象的相对约简的判定,定义了基于区分矩阵的区分函数,并利用布尔推理方法得到了这两种优势关系下的知识约简与对象的相对约简的具体操作方法。

关键词 集值信息系统,优势关系,区分函数,知识约简

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Knowledge Reduction of Set-valued Information Systems Based on Dominance Relation

CHEN Zi-chun^{1,2} LIU Peng-hui² QIN Ke-yun¹

(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610039, China)¹

(School of Mathematics and Computer, Xihua University, Chengdu 610013, China)²

Abstract We proposed two different types of dominance relations in set-valued information systems by the distribution of set-valued when all attributes were considered as criteria, and generalized the dominance relations in classical information systems. The judgment of knowledge reduction and relative reduction of each object were studied for two types of dominance relations in set-valued information systems, from which we defined discernibility function based on discernibility matrix, and got approach computing knowledge reduction and relative reduction of each object.

Keywords Set-valued information systems, Dominance relation, Discernibility function, Knowledge reduction

粗糙集理论^[1,2]是波兰数学家 Pawlak 提出的一种处理不精确、模糊和不确定性知识的数学工具,已被成功地应用于人工智能、知识与数据发现、模式识别与分类、故障检测等方面。Pawlak 提出的粗糙集模型是基于信息系统中的一种等价关系,由等价关系得到的分类形成研究对象集的划分,然后用一对可定义的上集与下集去描述无法用已知知识表示的对象集,它特别适用于完备信息系统(也称为经典信息系统)上知识发现与规则挖掘。但在实际应用中,由于问题的复杂性,人们得到的数据并不一定是精确的、完整的。如果信息系统中某个对象的属性值是未知的或部分已知的,则称这种信息系统是不完备信息系统。信息除了缺损外,还可能存在着不确定性问题,即对于某些属性,一些对象在这些属性下的取值不是取一个值,而是取几个值,这样的信息系统就称为集值信息系统。不完备信息系统在某些情形下也可以作为一类特殊的集值信息系统进行研究^[3]。因此,为了适应实际需要,许多学者把等价关系推广到了非等价关系,如相容关系、优势关系、偏序关系等^[3-10],这种推广可以用来处理不完备信息系统或集值信息系统的属性约简与规则获取。

通过信息系统去发现知识,本质上是按照属性特征将对象集进行分类的问题。针对信息的不确定性,文献[9]借助集合包含关系在集值信息系统中定义了一种优势(自反、传递)

关系,讨论了这种关系下集值信息系统的知识约简与属性特征。但是,若把属性看成是以大小作为度量的准则,则集合包含关系就不能反映对象取值的这种大小关系。比如两个对象在某准则下的取值分别是{1}和{2},它们之间互不包含,但在准则之下,取值{2}的对象优于取值{1}的对象。这表明集合包含关系不是经典信息系统中优势关系的推广。因此本文利用属性集值的取值大小在集值信息系统中定义了两种不同类型的优势关系,它们都是经典信息系统中优势关系的推广。然后讨论了在这两种优势关系下集值信息系统的知识约简与对象的相对约简,并利用布尔推理方法^[11]得到了集值信息系统在这两种优势关系下的知识约简与对象的相对约简的具体操作方法。

1 集值信息系统上的两类优势关系

定义 1^[3] 称 $K = (U, A, F)$ 是集值信息系统,若 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为对象集,每个 $x_i (i \leq n)$ 称为一个对象; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为属性集,每个 $a_i (i \leq m)$ 称为一个属性; $F = \{f_l : l \leq m\}$ 为对象属性值映射,其中 $f_l : U \rightarrow P_0(V_l) (l \leq m)$, V_l 是属性 a_l 的值域, $P_0(V_l)$ 表示 V_l 的非空子集全体。

如果把属性看成是一种以大小作为度量的准则,比如产品质量、汽车耗油量、负债率等,则需要根据准则在对象间

引入一种大小关系。但集值信息系统中的对象在属性下的取值是集合,无法直接比较大小,为此给出如下定义:

定义 2 设 $K=(U,A,F)$ 是集值信息系统,对 $a_l \in A, x_i, x_j \in U$,称 x_i 关于 a_l 不劣于 x_j ,记为 $x_i \geq_{a_l} x_j$;如果任取 $v_j \in f_l(x_j)$,都存在 $v_i \in f_l(x_i)$,使 $v_i \geq v_j$,称 x_i 关于 a_l 不优于 x_j ,记为 $x_i <_{a_l} x_j$;如果任取 $v_j \in f_l(x_j)$,都存在 $v_i \in f_l(x_i)$,使 $v_i \leq v_j$ 。

对 $B \subseteq A$,称 x_i 关于 B 不劣(或优)于 x_j ,记为 $x_i \geq_B x_j$ (或 $x_i <_B x_j$);如果任取 $a_l \in B$,都有 $x_i \geq_{a_l} x_j$ (或 $x_i <_{a_l} x_j$)。

明显地,由定义知 $x_i \geq_B x_j$ 与 $x_j <_B x_i$ 一般并不等价,除非 $f_l(x_i)$ 与 $f_l(x_j)$ 都取惟一确定值。因此, $\geq_B$ 与 $<_B$ 是集值信息系统上对象间的两种不同序关系。

对属性子集 $B \subseteq A$,在论域 U 上定义二元关系:

$$R_B^> = \{x_i, x_j\} \in U^2 : x_i \geq_B x_j\} \text{ 与 } R_B^< = \{(x_i, x_j) \in U^2 : x_i <_B x_j\}$$

并记

$$R_B^{>-}(x_i) = \{x_j \in U : (x_i, x_j) \in R_B^>\}$$

$$R_B^{>+}(x_i) = \{x_j \in U : (x_j, x_i) \in R_B^>\}$$

$$R_B^{<-}(x_i) = \{x_j \in U : (x_i, x_j) \in R_B^{<}\}$$

$$R_B^{<+}(x_i) = \{x_j \in U : (x_j, x_i) \in R_B^{<}\}$$

注:由于 $x_i \geq_B x_j$ 与 $x_j <_B x_i$ 不等价,因此 $(x_i, x_j) \in R_B^{>-}$ 时并不总有 $(x_j, x_i) \in R_B^{<+}$,于是一般情况下 $R_B^{>-}(x_i) \neq R_B^{<+}(x_i)$, $R_B^{>+}(x_i) \neq R_B^{<-}(x_i)$ 。但当集值信息系统退化成经典信息系统,即当对象在每个属性下的取值惟一时,就有 $(x_i, x_j) \in R_B^{>-}$ 与 $(x_j, x_i) \in R_B^{<+}$ 等价,此时 $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 就是经典信息系统上分别按照增序与减序定义的优势关系^[3]。这时当然有 $R_B^{>-}(x_i) = R_B^{<+}(x_i)$, $R_B^{>+}(x_i) = R_B^{<-}(x_i)$ 成立。因此 $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 都是经典信息系统上的优势关系的推广。

定理 1 设 $K=(U,A,F)$ 是集值信息系统, $B \subseteq A$, $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 是如上定义的关系,则

(1) $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 都是 U 上的优势关系,即 $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 都是自反、传递的;

(2) $R_A^{>-} \subseteq R_B^{>-}$, $R_A^{<+} \subseteq R_B^{<+}$, $R_A^{>-}(x_i) \subseteq R_B^{>-}(x_i)$, $R_A^{<+}(x_i) \subseteq R_B^{<+}(x_i)$;

(3) $x_j \in R_B^{>-}(x_i) \Leftrightarrow R_B^{>-}(x_j) \subseteq R_B^{>-}(x_i)$, $x_j \in R_B^{<+}(x_i) \Leftrightarrow R_B^{<+}(x_j) \subseteq R_B^{<+}(x_i)$, $x_j \in R_B^{>-}(x_i) \Leftrightarrow R_B^{<+}(x_j) \subseteq R_B^{<+}(x_i)$;

(4) $R_B^{>-}(x_i) = \bigcup \{R_B^{>-}(x_j) : x_j \in R_B^{>-}(x_i)\}$, $R_B^{<+}(x_i) = \bigcup \{R_B^{<+}(x_j) : x_j \in R_B^{<+}(x_i)\}$, $R_B^{<-}(x_i) = \bigcup \{R_B^{<-}(x_j) : x_j \in R_B^{<-}(x_i)\}$, $R_B^{>+}(x_i) = \bigcup \{R_B^{>+}(x_j) : x_j \in R_B^{>+}(x_i)\}$;

(5) $R_B^{>-} = \bigcap_{a_k \in B} R_{a_k}^{>-}$, $R_B^{<+} = \bigcap_{a_k \in B} R_{a_k}^{<+}$ 。其中 $R_{a_k}^{>-}$ 与 $R_{a_k}^{<+}$ 分别是 $R_{a_k}^{>-}$ 与 $R_{a_k}^{<+}$ 的简写。

证明:(1) $\forall a_l \in B, \forall x_i \in U$,由于 $\forall v_i \in f_l(x_i)$,有 $v_i \geq v_i$,因此 $x_i \geq_{a_l} x_i$,从而 $(x_i, x_i) \in R_B^{>-}$,这表明 $R_B^{>-}$ 是自反的;其次,设 $(x_i, x_j) \in R_B^{>-}$, $(x_j, x_k) \in R_B^{>-}$,则 $\forall a_l \in B$,由 $(x_j, x_k) \in R_B^{>-}$ 知, $\forall v_k \in f_l(x_k)$,存在 $v_j \in f_l(x_j)$,使 $v_j \geq v_k$ 。再由 $(x_i, x_j) \in R_B^{>-}$ 知,对 $v_j \in f_l(x_j)$,必定存在 $v_i \in f_l(x_i)$,使 $v_i \geq v_j$,从而 $v_i \geq v_k$ 成立,故 $(x_i, x_k) \in R_B^{>-}$,这就证明了 $R_B^{>-}$ 是传递的。

$R_B^{<+}$ 的自反、传递性类似可证。而上述(2)、(3)、(4)、(5)由定义及(1)验证即得。

设 $K=(U,A,F)$ 是集值信息系统, $B \subseteq A$ 。由于 $R_B^{>-}$ 与 $R_B^{<+}$ 都是自反的,因此 $\{R_B^{>-}(x_i) : x_i \in U\}$ (或 $\{R_B^{<+}(x_i) : x_i \in U\}$) 与 $\{R_B^{<-}(x_i) : x_i \in U\}$ (或 $\{R_B^{>+}(x_i) : x_i \in U\}$) 都构成论域 U 的覆盖,于是可以把它们作为集值信息系统上的基本知识,利用粗糙集方法讨论任意对象子集的下近似和上近似。

不妨取 $\{R_B^{>-}(x_i) : x_i \in U\}$ 与 $\{R_B^{<+}(x_i) : x_i \in U\}$ 作为集值信息系统上的基本知识(另一对可以类似讨论),则对任意 $X \subseteq U$,可以定义 X 关于优势关系 $R_B^{>-}$ 或 $R_B^{<+}$ 的下近似和上近似为

$$\underline{R}_B^{>-}(X) = \bigcup \{R_B^{>-}(x_i) : R_B^{>-}(x_i) \subseteq X\}, \overline{R}_B^{>-}(X) = \bigcup \{R_B^{>-}(x_i) : x_i \in X\}$$

$$\underline{R}_B^{<+}(X) = \bigcup \{R_B^{<+}(x_i) : R_B^{<+}(x_i) \subseteq X\}, \overline{R}_B^{<+}(X) = \bigcup \{R_B^{<+}(x_i) : x_i \in X\}$$

优势关系下的上、下近似也满足许多类似于 Pawlak 粗糙集模型中的性质^[3]。

例 1 考虑如下集值信息系统。

	a1	a2	a3	a4
x1	{1,2}	{1}	{1,2}	{3}
x2	{1}	{1,2}	{2,3}	{1}
x3	{1,2}	{2}	{3}	{1,2}
x4	{2}	{3}	{2,3}	{3}
x5	{3}	{1}	{1}	{1}
x6	{3}	{1}	{1,2}	{3}

由定义 $R_A^{>-}(x_i) = \{x_j \in U : (x_i, x_j) \in R_A^{>-}\} = \{x_j \in U : \forall a_l \in A, \forall v_j \in f_l(x_j), \exists v_i \in f_l(x_i), v_i \geq v_j\}$

$R_A^{<+}(x_i) = \{x_j \in U : (x_j, x_i) \in R_A^{<+}\} = \{x_j \in U : \forall a_l \in A, \forall v_i \in f_l(x_i), \exists v_j \in f_l(x_j), v_j \leq v_i\}$

所以 $R_A^{>-}(x_1) = \{x_1\}$, $R_A^{>-}(x_2) = \{x_2\}$, $R_A^{>-}(x_3) = \{x_2, x_3\}$, $R_A^{>-}(x_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $R_A^{>-}(x_5) = \{x_5\}$, $R_A^{>-}(x_6) = \{x_1, x_5, x_6\}$;

$R_A^{<+}(x_1) = \{x_1\}$, $R_A^{<+}(x_2) = \{x_2\}$, $R_A^{<+}(x_3) = \{x_2, x_3\}$, $R_A^{<+}(x_4) = \{x_1, x_2, x_4\}$, $R_A^{<+}(x_5) = \{x_5\}$, $R_A^{<+}(x_6) = \{x_1, x_5, x_6\}$ 。

可以看到 $R_A^{>-}(x_4) \neq R_A^{<+}(x_4)$ 。若取 $X = \{x_1, x_4, x_5\}$, 则有

$$\underline{R}_A^{>-}(X) = \{x_1, x_5\}, \overline{R}_A^{>-}(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}。$$

$$\underline{R}_A^{<+}(X) = \{x_1, x_5\}, \overline{R}_A^{<+}(X) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}。$$

2 集值信息系统在优势关系下的属性约简

集值信息系统上的优势关系 $R_A^{>-}$ 或 $R_A^{<+}$ 可以确定其上的基本知识,但是确定这些基本知识往往并不需要 A 中的所有属性。人们希望找出一个能保持势关系 $R_A^{>-}$ 或 $R_A^{<+}$ 不变的最小属性子集,这就是知识的属性约简。通过约简,可以深化人们对知识的认识。因此,下面讨论集值信息系统在优势关系 $R_A^{>-}$ 与 $R_A^{<+}$ 下的属性约简方法。

定义 3 设 $K=(U,A,F)$ 是集值信息系统, $B \subseteq A$, $x_i \in U$ 。

(1)若 $R_B^{>-} = R_A^{>-}$ (或 $R_B^{<+} = R_A^{<+}$),则称 B 是集值信息系统 K 的一个 $>-$ (或 $<+$) 协调集。若进一步对任意 $b \in B$,有 $R_{B-(b)}^{>-} \neq R_A^{>-}$ (或 $R_{B-(b)}^{<+} \neq R_A^{<+}$),则称 B 是 K 的一个 $>-$ (或 $<+$) 约简,并称所有 $>-$ (或 $<+$) 约简的交集是 K 的 $>-$ (或 $<+$) 核。

(2)若 $R_B^-(x_i) = R_A^-(x_i)$ (或 $R_B^+(x_i) = R_A^+(x_i)$), 则称 B 是对象 x_i 的 $>-$ (或 $<-$) 协调集。若进一步对任意 $b \in B$, 有 $R_{B-(b)}^-(x_i) \neq R_A^-(x_i)$ (或 $R_{B-(b)}^+(x_i) \neq R_A^+(x_i)$), 则称 B 是对象 x_i 的 $>-$ (或 $<-$) 约简。

容易看到集值信息系统的 $R^>$ 约简与 $R^<$ 约简是存在的, 并且由定理 1 知, $B \subseteq A$ 是集值信息系统的 $R^>$ (或 $R^<$) 协调集, 等价于 $R_B \subseteq R_A$ (或 $R_B \subseteq R_A$)。

进一步, 对任意 $x_i, x_j \in U$, 记

$$\begin{aligned} D_{ij}^> &= \{a_l \in A: (x_i, x_j) \notin R_{a_l}^>\} \\ &= \{a_l \in A: \forall v_l \in f_l(x_i), \exists v_j \in f_l(x_j), v_l < v_j\} \\ D_{ij}^< &= \{a_l \in A: (x_i, x_j) \notin R_{a_l}^<\} \\ &= \{a_l \in A: \forall v_l \in f_l(x_i), \exists v_j \in f_l(x_j), v_l > v_j\} \\ D^> &= (D_{ij}^>; x_i, x_j \in U) \\ D^< &= (D_{ij}^<; x_i, x_j \in U) \end{aligned}$$

则 $D_{ij}^>$ 与 $D_{ij}^<$ 就是分别在优势关系 $R_A^>$ 与 $R_A^<$ 下能区分对象 x_i 和 x_j 的属性集, 而 $D^>$ 与 $D^<$ 分别是集值信息系统在优势关系 $R_A^>$ 与 $R_A^<$ 下的区分矩阵。

定理 2 设 $K=(U, A, F)$ 是集值信息系统, $B \subseteq A$, $M_K^> = \{D_{ij}^>; D_{ij}^> \neq \emptyset\}$, $M_K^< = \{D_{ij}^<; D_{ij}^< \neq \emptyset\}$, 则

- (1) $R_B = R_A \Leftrightarrow \forall D \in M_K^>, B \cap D \neq \emptyset$;
- (2) $R_B = R_A \Leftrightarrow \forall D \in M_K^<, B \cap D \neq \emptyset$ 。

证明: (1)“ $\Rightarrow$ ” 设 $R_B = R_A$ 。若 $D \in M_K^>$, 则存在 $x_i, x_j \in U$, 使 $D = D_{ij}^> \neq \emptyset$ 。于是由 $R_A^>$ 的定义知, $\exists a_l \in A$, 使 $(x_i, x_j) \notin R_{a_l}^>$, 再由定理 1 的(5)就有 $(x_i, x_j) \notin R_A^>$ 。从而由 $R_B = R_A$ 就知 $(x_i, x_j) \notin R_B^>$ 。于是 $\exists a_k \in B \subseteq A$, 使 $(x_i, x_j) \notin R_{a_k}^>$, 即 $\exists a_k \in B$ 使 $a_k \in D_{ij}^> = D$, 所以 $B \cap D \neq \emptyset$ 成立。

“ $\Leftarrow$ ” 设 $\forall D \in M_K^>, B \cap D \neq \emptyset$ 。若 $(x_i, x_j) \notin R_A^>$, 则 $\exists a_l \in A$, 使 $(x_i, x_j) \notin R_{a_l}^>$, 于是 $a_l \in D_{ij}^> \neq \emptyset$, 即 $D_{ij}^> \in M_K^>$ 。因此 $B \cap D_{ij}^> \neq \emptyset$, 从而 $\exists a_k \in B$, 使 $a_k \in D_{ij}^>$, 即 $\exists a_k \in B$ 使 $(x_i, x_j) \notin R_{a_k}^>$, 因此 $(x_i, x_j) \notin R_B^>$, 故 $R_B \subseteq R_A$ 。注意到 $R_A \subseteq R_B$ 显然成立, 所以 $R_B = R_A$ 成立。

(2) 类似于(1)可证。

由定理 2 知, 寻找集值信息系统的 $R^>$ (或 $R^<$) 约简, 实际上就是从 $M_K^>$ (或 $M_K^<$) 中寻找满足条件 $B \cap D \neq \emptyset$ 的最小集合 B , 这通常可以通过布尔推理方法得到^[11]。

定义 4 设 $K=(U, A, F)$ 是集值信息系统, $x_i \in U$ 。记

$$\begin{aligned} \Delta^> &= \bigwedge \{ \bigvee D_{ij}^>; D_{ij}^> \in M_K^> \} \\ \Delta^< &= \bigwedge \{ \bigvee D_{ij}^<; D_{ij}^< \in M_K^< \} \\ \Delta_i^> &= \bigwedge \{ \bigvee D_{ij}^>; D_{ij}^> \in M_K^> \} \\ \Delta_i^< &= \bigwedge \{ \bigvee D_{ij}^<; D_{ij}^< \in M_K^< \} \end{aligned}$$

则称 $\Delta^>$ 与 $\Delta^<$ 是集值信息系统 K 的 $>-$ 区分函数与 $<-$ 区分函数, $\Delta_i^>$ 与 $\Delta_i^<$ 是对象 x_i 的 $>-$ 区分函数与 $<-$ 区分函数。

定理 3 设 $K=(U, A, F)$ 是集值信息系统, $B \subseteq A$, 则

(1) B 是 K 的 $>-$ 约简当且仅当 $\bigwedge B$ 是 $>-$ 区分函数 $\Delta^>$ 的极小析取范式中的一个合取式。

(2) B 是 K 的 $<-$ 约简当且仅当 $\bigwedge B$ 是 $<-$ 区分函数 $\Delta^<$ 的极小析取范式中的一个合取式。

证明: (1)注意到 $\bigwedge B$ 是 $>-$ 区分函数 $\Delta^>$ 的极小析取范式中的一个合取式等价于 $\forall a_k \in B, \exists D_{ij}^> \in M_K^>$, 使 $B \cap D_{ij}^> = \{a_k\}$ 。因此, 若 B 是 $>-$ 约简, 而 $\bigwedge B$ 不是 $>-$ 区分函数 $\Delta^>$

的极小析取范式中的一个合取式, 则 $\forall D_{ij}^> \in M_K^>, a_k \in B$, 就有 $\text{card}(B \cap D_{ij}^>) \geq 2$ 。于是对 $B' = B - \{a_k\}$, $\forall D_{ij}^> \in M_K^>$ 就有 $B' \cap D_{ij}^> \neq \emptyset$, 从而由定理 2 知 B' 是 $>-$ 协调集, 这就与 B 是 $>-$ 约简相矛盾。故当 B 是 $>-$ 约简时, $\bigwedge B$ 是 $>-$ 区分函数 $\Delta^>$ 的极小析取范式中的一个合取式。反之, 若 $\bigwedge B$ 是 $>-$ 区分函数 $\Delta^>$ 的极小析取范式中的一个合取式, 则 $\forall D_{ij}^> \in M_K^>$, 有 $B \cap D_{ij}^> \neq \emptyset$, 且 $\forall a_k \in B$, 都存在 $D_{ij}^> \in M_K^>$, 使 $B \cap D_{ij}^> = \{a_k\}$, 因此 B 是 $>-$ 约简。

(2) 类似于(1)可证。

定理 4 设 $K=(U, A, F)$ 是集值信息系统, $x_i \in U, B \subseteq A$, 则

(1) B 是对象 x_i 的一个 $>-$ 相对约简当且仅当 $\bigwedge B$ 是 x_i 的 $>-$ 相对区分函数 $\Delta_i^>$ 的极小析取范式中的一个合取式。

(2) B 是对象 x_i 的一个 $<-$ 相对约简当且仅当 $\bigwedge B$ 是 x_i 的 $<-$ 相对区分函数 $\Delta_i^<$ 的极小析取范式中的一个合取式。

证明: 类似于定理 3 可证。

定理 5 设 $K=(U, A, F)$ 是集值信息系统, $a_l \in A$, 则下列命题等价:

- (1) $a_l \in A$ 是 K 的 $>-$ 核 $\Leftrightarrow$ 存在 $D_{ij}^> \in M_K^>$, 使 $D_{ij}^> = \{a_l\}$;
- (2) $a_l \in A$ 是 K 的 $<-$ 核 $\Leftrightarrow$ 存在 $D_{ij}^< \in M_K^<$, 使 $D_{ij}^< = \{a_l\}$ 。

证明: (1)“ $\Rightarrow$ ” 设 a_l 是集值信息系统 K 的 $>-$ 核, 即 a_l 属于 K 的任意 $>-$ 约简。假设 $\forall D_{ij}^> \in M_K^>, a_l \in D_{ij}^>$ 时 $\text{card}(D_{ij}^>) \geq 2$ 。则取 $B = \bigcup \{D_{ij}^> - \{a_l\}; D_{ij}^> \in M_K^>\}$, 于是容易看到 $\forall D_{ij}^> \in M_K^>$, 有 $B \cap D_{ij}^> \neq \emptyset$ 。从而由定理 2 知, B 是 $>-$ 协调集, 从而存在 $>-$ 约简 B' , $a_l \notin B'$, 使 $B' \subseteq B$, 这就与 a_l 属于 K 的任意 $>-$ 约简矛盾。

“ $\Leftarrow$ ” 假设存在 $D_{ij}^> \in M_K^>$, 使 $D_{ij}^> = \{a_l\}$, 则由定义知 $(x_i, x_j) \notin R_{a_l}$, $(x_i, x_j) \in R_{A-\{a_l\}}$, 于是 $R_{A-\{a_l\}}^> \neq R_A^>$, 即 $R_A^> \subset R_{A-\{a_l\}}^>$ 。如果 a_l 不是 K 的 $>-$ 核, 则存在 K 的 $>-$ 约简 B , 使 $a_l \notin B$, 于是 $B \subseteq A - \{a_l\}$, $R_{A-\{a_l\}}^> \subseteq R_B^>$ 。但由 B 是 $>-$ 约简有 $R_B = R_A$, 因此 $R_{A-\{a_l\}}^> \subseteq R_A^>$, 这就与 $R_A^> \subset R_{A-\{a_l\}}^>$ 矛盾, 所以 a_l 是 K 的 $>-$ 核。

(2) 类似于(1)可证。

例 2 继续考虑例 1 中的集值信息系统, 容易求出优势关系 $R_A^>$ 与 $R_A^<$ 的区分矩阵分别为

$$D^> = \begin{pmatrix} \emptyset & a_2, a_3 & a_2, a_3 & a_2, a_3 & a_1 & a_1 \\ a_1, a_4 & \emptyset & a_1, a_4 & a_1, a_2, a_4 & a_1 & a_1, a_4 \\ a_4 & \emptyset & \emptyset & a_2, a_4 & a_1 & a_1, a_4 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & a_1 & a_1 \\ a_3, a_4 & a_2, a_3 & a_2, a_3, a_4 & a_2, a_3, a_4 & \emptyset & a_3, a_4 \\ \emptyset & a_2, a_3 & a_2, a_3 & a_2, a_3 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$D^< = \begin{pmatrix} \emptyset & a_4 & a_4 & \emptyset & a_4 & \emptyset \\ a_3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & a_3 & a_3 \\ a_2, a_3 & a_2, a_3 & \emptyset & a_3 & a_2, a_3 & a_2, a_3 \\ a_1, a_2, a_3 & a_1, a_2, a_4 & a_1, a_2, a_4 & \emptyset & a_2, a_3, a_4 & a_2, a_3 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \emptyset & \emptyset \\ a_1 & a_1, a_4 & a_1, a_4 & a_1 & a_4 & \emptyset \end{pmatrix}$$

所以 $\Delta^> = a_1 \wedge a_4 \wedge (a_2 \vee a_3) = (a_1 \wedge a_2 \wedge a_4) \vee (a_1 \wedge a_3 \wedge a_4)$, 集值信息系统的 $>-$ 约简是 $\{a_1, a_2, a_4\}$ 与 $\{a_1, a_3, a_4\}$,

(下转第 193 页)

Step3 由于 $mb(Q1) = \{P1, P2, H, Q2\}$, $mb(X_q) \not\subseteq X_E$, 故 Step3 跳过。

Step4 $M, S2, S1, W, B1, K, L, R1$ 均被 $P1$ 与 $Q1$ d-分隔, 所以可以删去, 得到图 3 所示的约简结果。

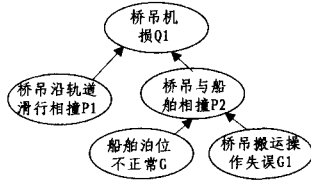


图 3 基于 d-分隔的约简

由此可见, 本算法将一个具有 30 个节点的推理网络缩减为仅有 5 个节点的推理网络, 缩小了网络规模, 大大提高了推理效率。

结束语 利用 Credal 网络进行推理在预测和诊断等领域具有广泛的应用前景, 而如何解决大规模 Credal 网络的推理效率问题, 目前仍是机器学习领域中的热点和难点问题。利用 Credal 网络中变量间 d-分隔的特性, 本文设计了一种求解大规模 Credal 推理网络约简的算法。应用实例表明, 本算法有效缩小了 Credal 推理网络的规模, 规避了 Credal 集顶点组合爆炸问题, 对特定问题的处理具有良好效果。

参考文献

- [1] Cozman F. CredalNetworks[J]. Artificial Intelligence, 2000, 120(2): 199-233
- [2] Fagioli E, Zaffalon M. 2U: An exact interval propagation algorithm for polytrees with binary variables[J]. Artificial Intelligence, 1998, 106(1): 77-107

- [3] Cozman F. Robustness analysis of Bayesian networks with local convex sets of distributions[C]// Proceedings of the Thirteenth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Morgan Kaufmann, San Mateo, 1997: 108-115
- [4] Cano A, Cano J E, Moral S. Convex sets of probabilities propagation by simulated annealing[C]// The Fifth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems, Paris, France, 1994: 4-8
- [5] Cano A, Moral S. A genetic algorithm to approximate convex sets of probabilities[C]// Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems Conference (IPMU'96). Granada, Spain, 1996: 859-864
- [6] Cano A, Cano J E, Moral S. Simulation algorithms for convex sets of probabilities[R]. TR-93-2-xx. DECSAI, Universidad de Granada, 1993
- [7] 郑恒. Credal 网络及其在安全评价中的应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2006
- [8] 李玉玲. Credal 网络及其应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2007
- [9] 张连文, 郭海鹏. 贝叶斯网引论[M]. 北京: 科学出版社, 2006
- [10] Acid S, De Campos L M. An Algorithm for Finding Minimum d-Separating Sets in Belief Networks[C]// Proceedings of the Twelfth Conference of Uncertainty in Artificial Intelligence. 1996
- [11] 马少平, 朱小燕. 人工智能[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004
- [12] Antonucci A, Zaffalon M, Ide J S, et al. Binarization algorithms for approximate updating in Credal nets[C]// Proceedings of The third European Starting AI Researcher Symposium. Amsterdam (Netherlands): IOS Press, 2006: 120-131

(上接第 178 页)

$\succ$ -核为 $\{a_1, a_4\}$ 。

$\Delta^< = a_1 \wedge a_3 \wedge a_4$, $\prec$ -约简是 $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\prec$ -核为 $\{a_1, a_3, a_4\}$ 。

$\Delta^> (x_1) = \bigwedge \{ \bigvee D_{ij}^> : D_{ij}^> \in M_0^> \} = a_1 \wedge (a_2 \vee a_3) = (a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3)$, x_1 的 $\succ$ -约简是 $\{a_1, a_2\}$ 与 $\{a_1, a_3\}$ 。

$\Delta^< (x_1) = a_4$, x_1 的 $\prec$ -约简是 $\{a_4\}$ 。

类似地可得:

x_2, x_4 的 $\succ$ -约简是 $\{a_1\}$, x_3 的 $\succ$ -约简是 $\{a_1, a_4\}$, x_5 的 $\succ$ -约简是 $\{a_3\}$ 与 $\{a_2, a_4\}$, x_6 的 $\succ$ -约简是 $\{a_2, a_3\}$; x_2, x_3 的 $\prec$ -约简是 $\{a_3\}$, x_4 的 $\prec$ -约简是 $\{a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$ 与 $\{a_3, a_4\}$, x_5 的 $\prec$ -约简是 $\{a_1\}$, x_6 的 $\prec$ -约简是 $\{a_1, a_4\}$ 。

结束语 集值信息系统反映了信息的不确定性, 亦即信息是有噪声的。在信息不确定的情况下, 不依赖于领域专家清除噪声, 直接建立知识发现方法, 具有一定现实意义。基于此, 本文利用属性集值的取值大小在集值信息系统上定义了两种不同类型的优势关系, 它们都是经典信息系统上优势关系的推广。然后根据粗糙集方法讨论了在这两种优势关系下集值信息系统的知识约简与对象的相对约简, 给出了知识约简与对象的相对约简的判定, 并利用布尔推理方法得到了集值信息系统在这两种优势关系下的知识约简与对象的相对约简的具体操作方法。至于集值决策信息系统在这两种优势关系下的知识约简与决策规则的提取与优化, 我们将另文叙述。

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough set[J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough set: Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [3] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京: 科学出版社, 2003
- [4] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multi-criteria decision analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129: 1-47
- [5] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112: 39-49
- [6] Kryszkiewicz M. Rules in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1999, 113: 271-292
- [7] Leung Y, Li D Y. Maximal consistent block technique for rule acquisition in incomplete information systems[J]. Information Sciences, 2003, 153: 85-106
- [8] Guan Yan-Yong, Wang Hong-Kai. Set-valued information systems[J]. Information Sciences, 2006, 176: 2507-2525
- [9] 宋笑雪, 解争龙, 张文修. 集值决策信息系统的知识约简与规则提取[J]. 计算机科学, 2007, 34(4): 182-184
- [10] 陈子春, 秦克云. 集值信息系统基于变精度相容关系的属性约简[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(9): 27-29
- [11] Skowron A, Rauszer C. The Discernibility Matrices and Functions in Information Systems [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992: 331-362