

最长路径问题研究进展

王建新 杨志彪 陈建二

(中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)

摘要 最长路径问题是著名的 NP 难问题,在生物信息学等领域中有着重要的应用。参数计算理论产生后,参数化形式的 k -Path 问题成了研究的热点。介绍了现有求解最长路径问题的几种算法,包括近似算法、参数化算法和特殊图的多项式时间算法;着重分析和比较了参数化算法中利用着色、分治和代数法研究 k -Path 问题的最新结果。最后,提出了该问题的进一步研究方向。

关键词 最长路径, k -Path 问题, NP 难, 参数计算

Algorithms for Longest Path: A Survey

WANG Jian-xin YANG Zhi-biao CHEN Jian-er

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract The longest path problem is well-known NP-Hard, and has significant applications in many fields such as bioinformatics. After the emerging of parameterized computation theory, the parameterized k -Path problem becomes one of the most concerned research problems. We introduced several algorithms to solve the longest path problem, including approximate algorithms, parameterized algorithms and polynomial time algorithms on special graphs. We put emphasis on the analysis and comparison of the latest results in parameterized algorithm, which use color-coding, divide-and-conquer and algebra techniques to solve k -Path problem. At last, we presented some further research directions for this problem.

Keywords Longest path, k -Path problem, NP-hard, Parameterized computation

1 引言

在图论中,最长路径(Longest path)问题是在给定的图中找一条最长的简单路径。而 k -Path 问题是指在给定的图中找一条长度为 k 的简单路径,是最长路径问题的一种特殊情况。

k -PATH 问题在生物信息学等领域中有着重要的应用。将蛋白质作为节点,蛋白质与蛋白质之间的相互作用作为边,相互作用发生的概率作为边的权值,从而构成生物蛋白质作用网络。J. Scott 等人在文献[4]中指出,蛋白质网络中权值大的简单路径更有可能是信号的传输路径。因此,找出网络中最大权值的 k -Path 对于研究生物蛋白质间的相互作用具有重要的意义。J. Scott 等人在酵母菌蛋白质作用网络中查找蛋白质路径,可以在 1min 内查找到 8-Path^[4]。接着, T. Shlomi 等人实现了一个用于查找生物网络的框架,名为 QPath^[5]。最近, F. Hüffner 等人改进了 k -Path 问题的研究成果。将其与启发式算法结合,便能在数秒内计算 13-Path^[6]。 k -Path 问题在生物子网匹配中也有应用^[7]。 k -Path 问题的应用不限于生物信息学, R. Borndörfer 等人在文献

[8,9]中指出交通网络图的线路价格问题也是一个最长路径问题。通过在城市交通图中找最大权重的简单路径,将其应用于路径规划。

然而,一般图上的最长路径问题是著名的 NP-难问题^[3],现有的研究主要基于近似算法和参数化算法。经过研究者们的努力,最长路径问题的研究取得了重大进展。特别是近年来,大量的文献都在研究该问题的参数化算法。本文主要总结在最长路径问题和 k -Path 问题上的研究成果,并讨论该问题的进一步研究方向。

本文第2节介绍最长路径问题的多项式时间近似算法;第3节介绍参数化算法,重点分析利用着色、分治和代数法研究 k -Path 问题的最新结果;第4节介绍特殊图上的多项式时间算法;最后是总结和展望。

2 近似算法

一般图上的最长路径问题属于典型的 NP 难问题^[3],其具体定义如下。

定义 1(最长路径问题) 给定一个图 $G(V, E)$, 在 G 中找出一条最长的简单路径。

到稿日期:2009-01-13 返修日期:2009-03-16 本文受国家自然科学基金(60773111),国家 973 前期研究专项(2008CB317107),湖南省杰出青年基金(06JJ10009),新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0683)和国家教育部创新团队资助计划(IRT0661)资助。

王建新 男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为计算机算法、网络优化理论、生物信息学, E-mail: jxwang@mail.csu.edu.cn; 杨志彪 男,硕士研究生,主要研究方向为参数计算; 陈建二 男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为生物信息学、计算机理论、计算复杂性及优化。

NP 难问题是不存在一个多项式时间的确定性算法,然而这类问题又频繁地出现在实际应用中。为了解决此类问题,人们常采用近似算法来得到一个近似解。D. Karger 等人在文献[10]中提出了一种多项式时间近似算法用于求最长路径。随后的十多年中,关于最长路径近似算法的研究取得了一系列成果。表 1 列出了最长路径问题近似算法的主要研究进展,其中 L 表示图中最长路径的长度。

表 1 最长路径问题的近似算法比较

文献	无向图路径长度	有向图路径长度
[1,2]	$\Omega(\log L / \log \log L)$	$\Omega(\log L / \log \log L)$
[10]	$\Omega(\log L)$	$\Omega(\log L)$
[22]	$O(\log L)$	$O(\log L)$
[11,13]	$\Omega((\log L / \log \log L)^2)$	
[14]	$\Omega(\log^2 L / \log \log L)$	
[15,16]		$\Omega(\log^2 L / \log \log L)$
[17]	$\exp(\Omega(\sqrt{\log L / \log \log L}))$	

Monien 在文献[1]中提出了一种固定参数算法,用来求长度为 k 的简单路径。算法时间复杂度为 $O(k! \cdot nm)$,其中 n 为图中节点的数目, m 为图中边的数目。当 $k \leq \log L / \log \log L$ 时,算法能在多项式时间内求解。Bodlaender 在此基础上,利用动态规划技术,将算法时间复杂度改进到 $O(k! \cdot 2^k n)^{[2]}$,然而所求路径长度的上界仍为 $\Omega(\log L / \log \log L)$ 。随后, D. Karger 等人在文献[10]中将结果改进到 $\Omega(\log L)$ 。

Alon 等人在文献[22]中提出一项重要的技术——彩色编码(Color Coding),利用该技术在图中寻找长度为 k 的简单路径。当路径长度 k 为 $O(\log L)$ 时,算法能在多项式时间内求解,从而肯定了 C. Papadimitriou 等人在文献[18]中提出的 LOG PATH 问题是多项式时间可解的猜想。

S. Vishwanathan 在文献[11]中提出了一个在无向汉密尔顿图中找最长路径为 $\Omega((\log L / \log \log L)^2)$ 的多项式时间算法。A. Björklund 等人将这一结果扩展到一般无向图^[13],路径长度仍为 $\Omega((\log L / \log \log L)^2)$ 。此外, T. Feder 等人提出了在稀疏的汉密尔顿图中找更长路径的近似算法^[12]。

H. N. Gabow 等人^[14]基于深度优先搜索,将 A. Björklund 等人在无向图上的结果改进到 $\Omega(\log^2 L / \log \log L)$ 。进一步,利用环扩展环的方法, H. N. Gabow 在文献[17]中得到了 $\exp(\Omega(\sqrt{\log L / \log \log L}))$ 的改进结果,这是目前无向图中近似算法的最好结果。A. Björklund 等人在文献[15,16]中给出了一个有向图中找长度为 $\Omega(\log^2 L / \log \log L)$ 的简单路径算法,但算法只适用于节点出度受限的汉密尔顿有向图。尽管如此,该结果也是目前有向图中近似算法的最好结果。

可以看到,最长路径的近似算法在不断改进,但同时存在一些近似难度方面的限制。D. Karger 等人指出,在无向图中,获得最长路径的因子近似算法是 NP 难的,同时指出对任意的 $\epsilon > 0$,因子为 $2^{O(\log^{1-\epsilon} n)}$ 的近似是准 NP 难(quasi-NP-hard)的^[10]。对于有向图, A. Björklund 等人在文献[16]中证明了不能在多项式的时间内找到长度为 $\Omega(f(n) \log^2 n)$ 的有向简单路径。因此,长度为 $\Omega(\log^2 n / \log \log n)$ 的结果¹⁾已非常接近近似算法的最好结果。

3 参数化算法

在某些实际应用中,近似算法获得的近似解并不能满足

人们的要求。近年来,参数计算理论^[24]在这一领域中发展十分迅猛。参数计算理论是处理 NP-难问题的新思路,根据工程应用的实际情况,将所给难解问题参数化。在实际工程应用中所取参数只在一个小的范围内变化,从而充分利用“小参数”这一特殊性质,快速解决这一类难解问题。参数计算理论将计算理论与计算实践两者有效地结合了起来。

通常选择所求路径的长度作为参数 k ,从而将最长路径问题参数化为 k -Path 问题,其定义如下。

定义 2(k -Path 问题) 给定一个图 $G(V, E)$ 和正整数 k , 在图 G 中找出一条包含 k 个节点的简单路径或报告这样的路径不存在。

k -Path 问题与很多著名的 NP 难问题(如最长路径、汉密尔顿路径等问题)相近,也是 NP 难的。实际应用中,路径长度 k 通常远小于节点数 n ,满足“小参数”特性。Monien 首先提出了一个复杂度为 $O(k! \cdot nm)$ 的算法^[1],从而证明了 k -Path 问题是固定参数可解²⁾(Fixed Parameter Tractable, FPT)的。Bodlaender 利用动态规划技术,将算法复杂度改进到 $O(k! \cdot 2^k n)$,这是第一个与问题规模线性相关的参数算法。

对于参数算法中的 FPT 问题,通常都是考虑设计有效的 FPT 算法。FPT 算法设计中,核心化(Kernelization)是一项重要的技术。利用核心化预处理,可以迅速降低待解问题的规模。如果一个问题的任意实例 Q 能在多项式的时间内归约到该问题的一个更小实例 Q' ,则称该问题是可核心化的。J. Chen 等人在文献[24]中指出,固定参数可解与可核心化是等价的。显然, k -Path 问题是可核心化的。

最近, Fellows 等人在文献[21]中利用经典判定问题的一类新算法,称作蒸馏算法(Distillation Algorithm),设计了一个通用的核下界判断标准。同时指出, k -Path 问题不存在多项式的核。因此,利用核心化对 k -Path 问题设计有效 FPT 算法的意义不大。

表 2 列出了 k -Path 问题的参数化算法结果及其相关技术。目前,关于参数化随机算法的最好结果是文献[29]给出的复杂度为 $O^*(2^k)$ 的算法,确定算法的最好结果是文献[27]给出的复杂度为 $O^*(4^k)$ 的算法。从表 2 可以看出,设计 k -Path 问题的 FPT 算法时主要用到了以下 3 种技术:着色法、分治法和代数法。下面将根据算法技术分类进行介绍。

表 2 k -Path 问题的参数化算法比较

文献	随机算法	确定算法	相关技术
[1]	$O(k! \cdot nm)$		
[2]	$O(k! \cdot 2^k n)$		动态规划
[22]	$O^*(5.44^k)$	$O^*(2^{O(k)})$	着色法
[6]	$O^*(4.32^k)$		着色法
[26]	$O^*(4^k)$	$O^*(16^k)$	分治法
[25]	$O^*(4^k)$	$O^*(12.2^k)$	分治法、着色法
[27]	$O^*(4^k)$	$O^*(4^k)$	分治法
[28]	$O^*(2.83^k)$		代数法
[29]	$O^*(2^k)$		代数法

3.1 着色法

Alon 等人对 k -Path 问题进行了深入研究,指出 k -Path 问题的难点在于对路径简单性的要求,阐明了解决该问题的

1) 汉密尔顿有向图中最长路径的长度 L 与 n 相等。

2) 如果一个参数化 NP 难问题在时间 $f(k)n^{O(1)}$ 内可解,其中 $f(k)$ 是仅关于 k 的一个函数,那么称此问题是固定参数可解的,简称 FPT^[19]。

本质是在图 G 的所有 n 个节点中选择 k 个节点,并基于这一观察,于 1995 年首次提出了彩色编码 (Color Coding) 技术^[22]。该算法的思想是首先将图中的 n 个节点随机着为 k 种颜色,根据颜色分为 k 类,再利用动态规划在 k 段图上找颜色互不相同的 k 个节点构成的路径,从而将限制条件由节点不重复转化为颜色不重复,通过额外的限制减小目标解的搜索空间。整个求解过程分为着色和动态规划两个独立的部分,着色法研究的重点是如何对 n 个节点着色。

Alon 等人利用彩色编码设计了一种 k -Path 问题的随机算法,然后利用完美哈希函数将其确定化。随后的研究大致沿用了这一思路。由于算法所用的着色方式不同,产生了随机着色和确定着色两种算法。

3.1.1 随机着色法

将图中的 n 个节点随机着为 k 种颜色,正确解(如果存在)所包含的 k 个节点一共有 k^k 种可能的着色情况。其中有 $k!$ 种情况被正确着色,即此时 k 个节点的颜色各不相同。因此,正确着色的概率就是 $k! / k^k$ 。利用 Stirling 近似公式可知,一次着色正确的概率大于 e^{-k} 。通过重复足够的次数来保证获得的解具有一定的正确率,在实际求解的过程中,通常着色次数取 $O(e^k)$ 。结合动态规划过程,Alon 等人提出了复杂度为 $O^*(5.44^k)$ 的随机算法求解 k -Path 问题^[22]。

Fellows 等人在文献^[23]中指出,增大颜色数目可以增大正确着色的概率,从而减少重复着色的次数,但同时增大了动态规划过程的复杂度。F. Hüffner 等人在文献^[6]中利用 ak 种颜色着色,其中 $a > 1$ 。经过分析,正确着色的概率大于 $(a / (a-1))^{(a-1)k} \cdot e^{-k}$ 。此时,可以取着色次数为 $O(((a-1)/a)^{(a-1)k} \cdot e^k)$ 。而动态规划过程的复杂度为 $O^*(2^{ak})$,因此整个 k -Path 问题随机算法的复杂度为 $O^*((((a-1)/a)^{(a-1)k} \cdot e^k \cdot 2^{ak}))$ 。F. Hüffner 等人经过理论分析,证明了当 a 取值为 1.3,即颜色数目为 $1.3k$ 时,算法复杂度取得最优值,从而得到了复杂度为 $O^*(4.32^k)$ 的随机算法求解 k -Path 问题^[6]。

3.1.2 确定着色法

确定着色法的研究思路就是利用完美哈希函数将随机着色过程确定化,从而获得相应的确定算法。此前最好的关于完美哈希函数的研究成果是 Schmidt 等人构造的大小为 $O(2^{O(k)} \log n)$ 的完美哈希函数族^[20]。Alon 等人利用这一结果,结合随机算法,得到了复杂度为 $O^*(2^{O(k)})$ 的确定算法求解 k -Path 问题^[22]。

最近,J. Chen 等人大幅改进了确定着色法的研究结果,给出了复杂度为 $O^*(12 \cdot 2^k)$ 的确定算法。算法采用了 4 层散列处理来避免冲突。具体构造过程中,首先利用核心化技术将 (n, k) 着色问题在多项式时间内归约到 (k^2, k) 着色问题,然后将 k^2 个元素散列到 $k/4$ 个位置上,再利用另一组散列函数分别将每个位置的元素重新散列到 $c_j (c_j - 1)$ 个位置上来解决冲突,最后使用已有的 $(c_j (c_j - 1), c_j)$ 着色方案构造总体着色方案。J. Chen 等人证明了算法的正确性,并分析了确定着色过程的复杂度为 $O^*(6 \cdot 1^k)$ 。利用这一结果,结合动态规划过程,得到了复杂度为 $O^*(12 \cdot 2^k)$ 的确定算法求解 k -Path 问题^[25]。

3.2 分治法

在计算机科学中,分治法是一种很重要的算法。核心思想是“分而治之”,就是把一个复杂的问题分成两个或更多相

同的子问题,再把子问题分成更小的子问题,直到最后子问题可以简单地直接求解,再逐层合并子问题的解,得到原问题的解。

利用分治法求解 k -Path 问题的思想就是将长度为 k 的路径平分分为两段,分别求出两个长度为 $k/2$ 的路径,再将二者连接起来,得到长度为 k 的路径。由于对路径的划分方式不同,产生了随机分治和确定分治两种算法。

3.2.1 随机分治法

J. Chen 等人利用分治思想,给出了一个复杂度为 $O(4^k m^{3.42})$ 的随机算法求解 k -Path 问题^[25]。首先,随机地将图 G 中的节点分为两部分 V_L 和 V_R ,与 V_L 和 V_R 对应的生成图为 G_L 和 G_R 。再分别递归地找出 G_L 和 G_R 中长度为 $k/2$ 的所有路径,最后根据 G_L 和 G_R 中的路径端点在原图 G 中是否相邻,得到该划分下图 G 中的所有长度为 k 的路径。通过重复足够的次数便可保证随机算法具有较高的正确率。

J. Kneis 等人在文献^[26]中也给出了相近的算法,复杂度为 $O^*(4^k)$ 。同样基于分治思想,提出了划分着色 (Divide and Color) 的概念。算法首先将图 G 中的所有节点随机着为黑白两种颜色,从而将节点分为 V_B 和 V_W 两部分,对应的生成子图为 G_B 和 G_W ,接下来的处理过程与 J. Chen 等人的算法基本一致。最近,他们一起合作,将算法统一起来,详见文献^[27]。另外,J. Chen 在文献^[31]中对随机分治法进行了总结。

3.2.2 确定分治法

确定分治法的研究思路就是将随机算法的划分过程确定化,从而获得相应的确定算法。现有的研究主要基于以下两种思想:完美哈希函数和全集^[30] (Universal set)。

利用 Alon 等人关于完美哈希函数的研究结果^[22],J. Kneis 等人将文献^[26]中的划分着色算法确定化,得到了复杂度为 $O^*(16^k)$ 的确定算法。最近,J. Chen 等人在文献^[27]中利用全集的研究结果,构造了一个大小为 $n^{2k+12\log^2 k+2}$ 的确定 (n, k) 全集,枚举全集中的元素将划分过程确定化,从而得到一个复杂度为 $O^*(4^k)$ 的确定算法。这是现有求解 k -Path 问题确定算法的最好结果。

3.3 代数法

代数法的主要思想就是将 k -Path 问题实例转化成代数表达式求解。最近,Koutis 等人在文献^[28]中给出了一个复杂度为 $O^*(2^{3k/2}) \leq O^*(2 \cdot 83^k)$ 的随机算法用于求解 k -Path 问题,并同时提出了一个复杂度为 $O^*(2^k)$ 的算法来检测图中是否存在大小为 k 且包含奇数条 k 长路径的生成子图。

R. Williams 随后扩展了 Koutis 等人的研究结果,将 k -Path 问题随机算法的复杂度改进到 $O^*(2^k)$,这是现有随机算法的最好结果^[29]。R. Williams 用 A 表示图 G 的邻接矩阵, $x_1, \dots, x_n$ 表示变量,定义矩阵 B 满足 $B[i, j] = A[i, j]x_i$ 。令 $\vec{1}$ 表示 A 中第一行的向量, $\vec{x}$ 表示 A 中满足 $\vec{x}[i] = x_i$ 的列向量,从而定义 k 路径为 $P_k(x_1, \dots, x_k) = \vec{1} \cdot B^{k-1} \cdot \vec{x}$ 。利用快速傅立叶变换,算法能在 $O^*(2^k)$ 的时间内求解。R. Williams 从代数的角度,进一步证明了该算法的正确性。

4 特殊图多项式时间算法

参数化算法的基础是小参数理论,要求路径长度 k 远小

于图中节点数目 n 。当这种限制条件不成立时,如 $k=0, 1n$,参数化算法变得很不实用。这样,人们又将目光转向了特殊图,利用特殊图的性质,设计多项式时间的算法。表3列出了特殊图上最长路径问题的研究进展,其中 n 表示图中点的个数, m 表示边的条数。

表3 特殊图最长路径问题的多项式时间算法比较

文献	特殊图	算法复杂度
[32]	tree	$O(n+m)$
[35]	weighted tree	$O(n+m)$
[33,35]	block graph	$O(n+m)$
[33,35]	cacti graph	$O(n^2)$
[33,34,35]	bipartite permutation	$O(n+m)$
[33,35]	interval biconvex	$O(n^3(m+n\log n))$

在图论中,树是一个不存在回路的连通图。Dijkstra 在上世纪 60 年代最早提出了树中寻找最长路径的算法,复杂度为 $O(n+m)$ 。R. W. Bulterman 等人在文献[32]中对 Dijkstra 算法的复杂度给出了严格的证明。

文献[35]中,R. Uehara 等人扩展了 Dijkstra 算法,在(点或边)带权树上,将路径长度定义为路径上所有点和边的权值之和,并给出了一个复杂度为 $O(n+m)$ 的算法用于求解带权树上的最长路径问题。

块图(block graph)是一个连通图,且任意极大的 2 连通子图都是团。块图可以看作是将树中的边用团代替,团与团之间最多只有一个公共点。R. Uehara 等人给出了一个复杂度为 $O(n+m)$ 的算法用于求解块图中的最长路径问题^[33,35]。

仙人掌图(cacti graph)是一个连通图,且任意一条边最多属于一个环。仙人掌图可以看作是将树中的边用环代替,环与环之间最多只有一个公共点。R. Uehara 等人给出了一个复杂度为 $O(n^2)$ 的算法,用以求解仙人掌图中的最长路径问题^[33,35]。

若图 G 和它的补图都是可比较图,则称图 G 为置换图。若置换图同时也是二分图,则称为二部置换图(bipartite permutation graph)。R. Uehara 等人给出了一个复杂度为 $O(n+m)$ 的算法,求解二部置换图中的最长路径问题^[33-35]。

区间双凸图(interval biconvex graph)是一个与某个区间图有相同区间表示的双凸图。R. Uehara 等人给出了一个复杂度为 $O(n^3(m+n\log n))$ 的算法,用以求解区间双凸图中的最长路径问题^[33,35]。

结束语 最长路径问题是著名的 NP 难问题,特别是其参数化的 k -Path 问题,在很多领域都有应用。人们对该问题做了大量的研究。总结起来,大致可以分为以下 3 个方面:

(1)多项式时间近似算法。设计一种在适用性和复杂度方面折中的算法,快速地解决最长路径问题,在一定程度上获得可用结果。

(2)参数化算法。设计有效的 FPT 算法,求解参数化的最长路径问题(k -Path 问题),满足实际工程应用需求。

(3)特殊图的多项式时间算法。充分利用特殊图的性质,设计有效的多项式时间算法。

最近,最长路径问题的研究进展非常迅速,特别是其参数化算法的研究,逐渐成为研究的热点。近两年来,无论是随机还是确定算法,其结果都得到了重大的改进。但同时,最长路径问题的研究还未完善,进一步的研究可以从以下 4 个方面考虑:

(1)最近 J. Chen 等人利用局部贪婪(Greedy Localization)结合彩色编码,大幅度地改进了 Packing 和 Matching 问题的研究结果^[36]。同样可以利用彩色编码求解的 k -PATH 问题,能否利用局部贪婪技术设计出更好的 FPT 算法。

(2) k -Path 问题现有最好的随机算法复杂度为 $O^*(2^k)$,能否将随机算法确定化,得到复杂度低于 $O^*(4^k)$ 的确定算法。

(3)在一些重要的特殊图,如正则图(Regular graph)和树宽受限图(Bounded-Treewidth graph)上,能否设计多项式时间算法来求最长路径。

(4)结合生物信息学中的实际应用和 k -Path 问题的研究进展,研究如何解决蛋白质路径、代谢路径等问题。

参 考 文 献

- [1] Monien B. How to find long paths efficiently[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1985, 25: 239-254
- [2] Bodlaender H L. On linear time minor tests with depth - first search[J]. Algorithms, 1993, 14(1): 1-23
- [3] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness[M] // Freeman W H. San Francisco, 1979
- [4] Scott J, Ideker T, Karp R M, et al. Efficient algorithms for detecting signaling pathways in protein interaction networks[J]. Journal of Computational Biology, 2006, 13(2): 133-144
- [5] Shlomi T, Segal D, Ruppin E, et al. QPath: a method for querying pathways in a protein-protein interaction network[J]. BMC Bioinformatics, 2006, 7(1): 199
- [6] Kelley B P, Sharan R, Karp R M, et al. Conserved pathways within bacteria and yeast as revealed by global protein network alignment[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003, 100(20): 11394-11399
- [7] Hüffner F, Wernicke S, Zichner T. Algorithm engineering for color-coding to facilitate signaling pathway detection[C] // Proceedings of the 5th Asia-Pacific Bioinformatics Conference (APBC '07). Advances in Bioinformatics and Computational Biology. World Scientific, 2007
- [8] Borndörfer R, Grötschel M, Pfetsch M E. A path-based model for line planning in public transport[R]. 05-18. ZIP Berlin, 2005
- [9] Borndörfer R, Grötschel M, Pfetsch M E. Models for line planning in public transport[R]. 04-10. ZIP Berlin, 2004
- [10] Karger D, Motwani R, Ramkumar G D S. On approximating the longest path in a graph[J]. Algorithmica, 1997, 18: 82-98
- [11] Vishwanathan S. An approximation algorithm for finding a long path in Hamiltonian graphs[C] // Proc. 11th SODA. 2000: 680-685
- [12] Feder T, Motwani R, Subi C S. Finding long paths and cycles in sparse Hamiltonian graphs[C] // Proceedings 32th STOC. 2000: 524-529
- [13] Björklund A, Husfeldt T. Finding a path of superlogarithmic length[J]. SIAM J. Comput, 2003, 32(6): 1395-1402
- [14] Gabow H N, Nie S. Finding a long directed cycle[C] // Proc. 15th Annual ACM-SIAM Symp. Disc. Alg. 2004: 49-58
- [15] Björklund A, Husfeldt T, Khanna S. Approximating longest directed path[R]. Electronic Colloq. on Comp. Complexity, Rept. No. 32. 2003

(下转第 31 页)

- structures[C]//Proceedings of the 5th European Wireless Conference (EW'04), Barcelona, 2004; 442-448
 - [3] Le F, Patil B, Perkins C E, et al. Diameter mobile IPv6 application. Internet IETF Draft (working in progress)
 - [4] Engelstad P, Haslestad T, Paint F. Authenticated access for IPv6 supported mobility[C]//Proceedings of the IEEE International Symposium on Computers and Communication (ISCC'03), Kemer-Antalya, 2003; 569-575
 - [5] 田野, 张玉军, 刘莹, 等. 移动 IPv6 网络基于身份的快速认证方法[J]. 软件学报, 2006, 17 (9): 1980-1988
 - [6] 田野, 张玉军, 张瀚文, 等. 移动 IPv6 网络基于身份的层次化接入认证机制[J]. 计算机学报, 2007, 30(6): 905-915
 - [7] Katz J, Wang N. Efficiency Improvements for Signature Scheme with Tight Security Reductions [C] // ACM-CCS' 2003. Washington, DC, USA; ACM, 2003. 155-164
 - [8] 南相浩. CPK 标识认证[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006; 186-210
 - [9] Boneh D, Lynn B, Shacham H. Short Signatures from the Weil Pairing[C]//Advance in Cryptology-ASIACRYPT 2001, LNCS 2248. Gold Coast, Australia; Springer Verlag. 2001; 213-229
 - [10] Soliman H, Castelluccia C, Malki K E, et al. Hierarchical Mobile IPv6 mobility management (HMIPv6). IETF Internet Draft (working in progress), 2003
 - [11] Barreto PSLM, Kim H Y, Lynn B, et al. Efficient algorithms for pairing-based cryptosystems [C] // Advances in Cryptology Crypto'02. LNCS 2442. Heidelberg; Springer-Verlag, 2002; 354-368
 - [12] Galbraith S, Harrison K, Soldera D. Implementing the Tate pairing[C]//Proceedings of the Algorithm Number Theory Symposium. LNCS 2369. Heidelberg; Springer-Verlag, 2002; 324-337
 - [13] 毛文波. 现代密码学理论与实践[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004
 - [14] Pointcheval D, Stern J. Security proofs for signature Scheme[C] // Advances in Cryptology-Eurocrypt 1996. LNCS 1070. Heidelberg; Springer-Verlag, 1996; 387-398
 - [15] Pointcheval D, Stern J. Security arguments for digital signature and blind signature[J]. Journal of Cryptology, 2000, 13(3): 361-396
-
- (上接第 4 页)
- [16] Björklund A, Husfeldt T, Khanna S. Approximating longest directed paths and cycles [C] // Proc. 31th International Colloquium (ICALP). Automata, Languages and Programming, 2004
 - [17] Gabow H N. Finding paths and cycles of superpolylogarithmic length[C]//Proc. 36th STOC. 2004
 - [18] Papadimitriou C, Yannakakis M. On limited nondeterminism and the complexity of the V-C dimension[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1996, 53; 161-170
 - [19] Downey R, Fellows M. Fixed parameter tractability and completeness. Complexity Theory: Current Research [M]. Cambridge University Press, 1992
 - [20] Schmidt J P, Siegel A. The spatial complexity of oblivious k-probe hash functions[J]. SIAM Journal on Computing, 1990, 19 (5): 775-786
 - [21] Bodlaender H L, Downey R G, Fellows M R, et al. On problems without polynomial kernels [C] // Proc. 35th ICALP. volume 5125 of LNCS, Springer, 2008; 563-574
 - [22] Alon N, Yuster R, Zwick U. Color-coding[J]. J. ACM, 1995, 42 (4): 844-856
 - [23] Fellows M R, Knauer C, Nishimura N, et al. Faster fixed parameter tractable algorithms for matching and packing problems[C] //Lecture Notes in Computer Science 3221, (ESA 2004). 2004; 311-322
 - [24] Chen Jianer. Parameterized computation and complexity; a new approach dealing with NP-hardness[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2005, 20; 18-37
 - [25] Chen Jianer, Lu Songjian, Sze Sing - Hoi , et al. Improved algorithms for path, matching, and packing problems[C]//Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA). 2007; 298-307
 - [26] Kneis J, Mölle D, Richter S, et al. Divide-and-color[C]//Proceedings of the International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG). LNCS 4271, Springer, 2006; 58-67
 - [27] Chen J, Kneis J, Lu Songjian, et al. Randomized Divide-and-Conquer Improved Path, Matching, and Packing Algorithms[manuscript]. 2008
 - [28] Koutis I. Faster algebraic algorithms for path and packing problems[C]//Proceedings of the International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP). LNCS 5125, Springer, 2008; 575-586
 - [29] Williams R. Finding paths of length k in $O^*(2^k)$ time. arXiv: 0807. 3026. July 2008
 - [30] Naor M, Schulman L, Srinivasan A. Splitters and near-optimal derandomization[C]//Proc. 36th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS 1995). 1995; 182-190
 - [31] Chen J. Randomized Disposal of Unknowns and Implicitly Enforced Bounds on Parameters[C]//IWPEC. 2008; 1-8
 - [32] Bulterman R W, van der Sommen F W, Zwaan G, et al. On computing a longest path in a tree[J]. Information Processing Letters, 2002, 81; 93-96
 - [33] Uehara R, Uno Y. Efficient algorithms for the longest path problem[C]//Proc. 15th Annual International Symposium on Algorithms and Computation. volume 3341 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2004; 871-883
 - [34] Uehara R, Valiente G. Linear Structure of Bipartite Permutation Graphs and the Longest Path Problem[J]. Information Processing Letters, 2006
 - [35] Uehara R, Uno Y. On Computing Longest Paths in Small Graph Classes[J]. Int. J. Foundations Comput. Science, 2007, 18; 911-930
 - [36] Liu Y, Lu S, Chen J, et al. Greedy localization and color-coding; improved matching and packing algorithms[C]//Proc. 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation. Lecture Notes in Computer Science 4169, 2006; 84- 95