

可变多重代价决策粗糙集模型

陈玉金 李续武 贾英杰 张鑫

(空军工程大学防空反导学院 西安 710051)

摘要 通过分析乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的不足之处,提出一种 δ -可变多重代价矩阵的融合规则,进而建立一种可变多重代价决策粗糙集模型。引入非线性映射 sigmoid 函数,将可变域拓展到实数域范畴。研究了可变多重代价决策粗糙集、乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的性质和关系,分析了它们之间的度量和代价关系。实例分析结果验证了该模型的可行性。

关键词 决策粗糙集,可变精度,多重代价

中图分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.06.042

Variable Multi-cost Based Decision Theoretic Rough Sets

CHEN Yu-jin LI Xu-wu JIA Ying-jie ZHANG Xin

(Air and Missile Defense College, Air-force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract By analyzing the limitations of the optimistic multi-cost decision-theoretic rough set and pessimistic multi-cost decision-theoretic rough set, the fusion rules of variable precision multi-cost matrix was proposed and its decision-theoretic rough set was established. By introducing nonlinear mapping function called sigmoid, variable domain expands to real number domain. Furthermore, the properties and relations of these kinds of rough sets were discussed and the measure and cost relations of them were analyzed. Finally, The experimental results show the effectiveness of the model.

Keywords Decision-theoretic rough set, Variable precision, Multi-cost

1 引言

粗糙集理论^[1-2]是 Pawlak 教授于 1982 年提出的一种处理不精确与不确定的数学工具。经过学者三十余年的不懈努力,粗糙集理论在数据挖掘、智能信息处理、模式识别等领域得到了广泛的应用。1990 年 Yao 等人在 Pawlak 粗糙集模型的基础上引入了贝叶斯风险分析,提出了决策粗糙集模型^[3-9,11-12]。决策粗糙集以概率形式表达近似集,并通过代价矩阵来求得构建概率粗糙近似所需的一对阈值。近年来,决策粗糙集模型在决策分析^[7]、图像分割^[8]、智能电网^[9]等方面得到了广泛的应用。在此基础上,马兴斌等^[4]针对 Yao 的模型没有考虑代价本身固有的多样性和变化性的问题,提出了多重代价矩阵来构建新的决策粗糙集模型,进而提出了乐观与悲观两种多重代价决策粗糙集方法,并对其进行了分析。

经过研究分析^[4],乐观粗糙集过于宽松的融合规则使其正域过于宽松。在实际情况中,多个专家给出的代价矩阵本身就存在主观性过强的问题。而选取 α_i, β_i 中的最小值会进一步放大这种主动性过强的问题,没有反映出符合实际的情况。而悲观决策粗糙集则过于严格,也不能反映实际情况。本文认为应该采取可变精度的融合决策规则,使所选取的 α_i, β_i 可以代表多个代价矩阵的普遍情况。通过调节参数 δ 值可

以使融合决策规则符合特定需求下的松紧情况,进而解决乐观决策粗糙集过于宽松和悲观粗糙集过于严格的问题。为此,本文给出了一种基于可变参数 δ 的融合规则,在此基础上提出了一种可变多重代价决策粗糙集模型,讨论了可变多重代价决策粗糙集与乐观决策粗糙集、悲观决策粗糙集之间的关系,并研究了其相关性质。

2 基本概念

2.1 决策粗糙集

设一个信息系统为一个二元组 $\langle U, AT \rangle$,其中 U 是一个被称为论域的非空有限的对象集合, AT 是所有的有限属性集合。根据 Yao 的决策粗糙集理论,可以根据是否属于集合 X 对对象 x 进行分类,即对象的状态空间可表示为 $\Theta = \{X, \bar{X}\}$ 。给定决策分类集合 $A = \{a_P, a_B, a_N\}$,设 a_P, a_B, a_N 表示对一个对象 x 进行分类决策的行动,即对象 x 确定属于、可能属于、确定不属于集合 X 。以 a_P, a_B, a_N 为行,以 $X, \bar{X}$ 为列,给出如下的代价矩阵:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_{PP} & \lambda_{PN} \\ \lambda_{BP} & \lambda_{BN} \\ \lambda_{NP} & \lambda_{NN} \end{bmatrix}$$

其中, $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ 表示当一个对象 x 属于集合 X 时,采取

到稿日期:2016-04-27 返修日期:2016-08-11

陈玉金(1992—),男,硕士,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理,E-mail:ivan@mail.dlut.edu.cn;李续武(1959—),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理等;贾英杰(1992—),男,硕士,主要研究方向为自抗扰控制和反演控制;张鑫(1992—),男,硕士,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理。

a_P, a_B, a_N 决策时所需的代价; $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 表示当一个对象不属于集合 X 时, 采取 a_P, a_B, a_N 决策时所需的代价。在决策粗糙集中, 根据贝叶斯最小风险决策原则, 可以给出如下决策规则:

- (i) if $P(X|[x]_R) \geq \alpha, x \in POS(X)$;
- (ii) if $\beta < P(X|[x]_R) < \alpha, x \in BND(X)$;
- (iii) if $P(X|[x]_R) \leq \beta, x \in NEG(X)$;

$$\text{其中, } \begin{cases} \alpha = \frac{\lambda_{PN} - \lambda_{BN}}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})} \\ \beta = \frac{\lambda_{BN} - \lambda_{NN}}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})} \end{cases} \text{ 且满足 } 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1.$$

在此基础上, 定义决策粗糙集的下、上近似分别为:

$$\begin{aligned} \underline{A}_D(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) \geq \alpha\} \\ \overline{A}_D(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) > \beta\} \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 多重代价决策粗糙集

多重代价决策粗糙集的提出是为了解决个别专家提出的代价矩阵不能反映实际情况且容易出现主观性错误的问题。设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, 则第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 个代价矩阵如下:

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_{PP}^i & \lambda_{PN}^i \\ \lambda_{BP}^i & \lambda_{BN}^i \\ \lambda_{NP}^i & \lambda_{NN}^i \end{bmatrix}$$

其中, $\lambda_{PP}^i, \lambda_{BP}^i, \lambda_{NP}^i$ 表示当一个对象 x 属于集合 X 时, 采取 a_P, a_B, a_N 决策时所需的代价; $\lambda_{PN}^i, \lambda_{BN}^i, \lambda_{NN}^i$ 表示当一个对象不属于集合 X 时, 采取 a_P, a_B, a_N 决策时所需的代价。相应的决策规则如下:

- (i') if $P(X|[x]_R) \geq \alpha_i, x \in POS(X)$;
- (ii') if $\beta_i < P(X|[x]_R) < \alpha_i, x \in BND(X)$;
- (iii') if $P(X|[x]_R) \leq \beta_i, x \in NEG(X)$;

$$\text{其中, } \begin{cases} \alpha_i = \frac{\lambda_{PN}^i - \lambda_{BN}^i}{(\lambda_{PN}^i - \lambda_{BN}^i) + (\lambda_{BP}^i - \lambda_{PP}^i)} \\ \beta_i = \frac{\lambda_{BN}^i - \lambda_{NN}^i}{(\lambda_{BN}^i - \lambda_{NN}^i) + (\lambda_{NP}^i - \lambda_{BP}^i)} \end{cases}.$$

马兴斌等^[4]将 n 个代价矩阵的不同分类规则进行融合, 提出了乐观与悲观决策规则:

- (i'') if $P(X|[x]_R) \geq \hat{\alpha}, x \in POS(X)$;
- (ii'') if $\hat{\beta} < P(X|[x]_R) < \hat{\alpha}, x \in BND(X)$;
- (iii'') if $P(X|[x]_R) \leq \hat{\beta}, x \in NEG(X)$;

其中, 当 $\hat{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i, \hat{\beta} = \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i$ 时, 这种融合规则记为乐观决策规则; 当 $\hat{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i, \hat{\beta} = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i$ 时, 这种融合规则记为悲观决策规则。根据乐观、悲观决策规则, 可以构建相应的乐观、悲观决策粗糙集。

2.2.1 乐观决策粗糙集

定义 1 令 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $\forall X \subseteq U, X$ 的乐观决策下、上近似分别为:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{oo}}(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i\} \\ \overline{A}_{\text{oo}}(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) > \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i\} \end{aligned} \quad (2)$$

将二元关系 $\langle \underline{A}_{\text{oo}}(X), \overline{A}_{\text{oo}}(X) \rangle$ 称为集合 X 关于代价矩

阵 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 的乐观决策粗糙集下、上近似集。可以得到相应的正域、边界域、负域集合:

$$\begin{aligned} POS_{\text{oo}}(X) &= \underline{A}_{\text{oo}}(X) \\ BND_{\text{oo}}(X) &= \overline{A}_{\text{oo}}(X) - \underline{A}_{\text{oo}}(X) \\ NEG_{\text{oo}}(X) &= U - \overline{A}_{\text{oo}}(X) \end{aligned} \quad (3)$$

2.2.2 悲观决策粗糙集

定义 2 令 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $\forall X \subseteq U, X$ 的悲观决策下、上近似分别为:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\text{pd}}(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i\} \\ \overline{A}_{\text{pd}}(X) &= \{x \in U | P(X|[x]_R) > \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i\} \end{aligned} \quad (4)$$

将二元关系 $\langle \underline{A}_{\text{pd}}(X), \overline{A}_{\text{pd}}(X) \rangle$ 称为集合 X 关于代价矩阵 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 的悲观决策粗糙集下、上近似集。可以得到相应的正域、边界域、负域集合:

$$\begin{aligned} POS_{\text{pd}}(X) &= \underline{A}_{\text{pd}}(X) \\ BND_{\text{pd}}(X) &= \overline{A}_{\text{pd}}(X) - \underline{A}_{\text{pd}}(X) \\ NEG_{\text{pd}}(X) &= U - \overline{A}_{\text{pd}}(X) \end{aligned} \quad (5)$$

3 可变多重代价决策粗糙集

3.1 δ -可变多重代价决策的融合规则

由上节的乐观决策规则可知, $\forall X \subseteq U$, 乐观决策规则只采用 $\hat{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ 和 $\hat{\beta} = \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i$ 来决策对象 x 的分类决策行动, 这是最宽松的融合规则。类似地, $\forall X \subseteq U$, 悲观决策规则只采用 $\hat{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ 和 $\hat{\beta} = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i$ 来决策对象 x 的分类决策行动, 这是最严格的融合规则。本文认为在 n 个代价矩阵 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 中, 需要通过一个可以反映普遍情况、能够使得融合决策不过松过紧的决策规则来进行融合, 记为 δ -可变多重代价决策规则。 δ -可变多重代价决策规则说明决策规则的松紧程度可以通过参数 δ 来调节, 可以根据特定的需求来确定决策规则的松紧程度。那么, 可变多重代价决策规则多重代价矩阵的融合规则为:

$$\begin{aligned} & \text{(i''')} \text{ if } P(X|[x]_R) \geq \hat{\alpha}, x \in POS(X); \\ & \text{(ii''')} \text{ if } \hat{\beta} < P(X|[x]_R) < \hat{\alpha}, x \in BND(X); \\ & \text{(iii''')} \text{ if } P(X|[x]_R) \leq \hat{\beta}, x \in NEG(X); \\ & \text{其中, } \begin{cases} \hat{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i + \delta(\max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i - \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i) \\ \hat{\beta} = \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i + \delta(\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i - \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i) \end{cases} \text{ 且满足 } 0 \leq \delta \leq 1. \end{aligned}$$

可变参数代表了一种可变的语义解释, 是一种能够满足特定需求的决策规则融合方式。通过调节参数 $\delta, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 的值可以在各自的最大值和最小值之间的闭区间中连续变化。当 $\hat{\delta} = 0$ 时, 可变多重代价决策规则就退化为乐观决策规则; 当 $\hat{\delta} = 1$ 时, 可变多重代价决策规则就退化为悲观决策规则; 当 $0 < \hat{\delta} < 1$ 时, 可以得到任意松紧程度的融合规则以满足特定需求。因此, 乐观和悲观决策规则是 δ -可变多重代价决策规则的两种特殊情况, δ -可变多重代价是乐观和悲观决策规则的一般情况。

在此基础上, 引入一个非线性映射 sigmoid 函数。sig-

mold 函数的引入将参数的可变域从 $[0, 1]$ 扩充到整个实数域,使决策规则更具有一般性。于是定义

$$\hat{\delta} = \frac{1}{1+e^{-\delta}} \quad (6)$$

其中, $-\infty < \delta < +\infty$ 。

$$\text{那么, } \alpha = \frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i + \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i}{1+e^{-\delta}}, \beta = \frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i + \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i}{1+e^{-\delta}}.$$

此时,有序二元组 $(\frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}}, \frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}})$ 表示两个极限情况 $(\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i,$

$\max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i), (\min_{1 \leq i \leq n} \beta_i, \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i)$ 的权重。当 $\delta \rightarrow -\infty$ 即 $(\frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}},$

$\frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}}) = (1, 0)$ 时,可变多重代价决策规则就退化为最易接受、最不易拒绝决策的决策规则,即乐观决策规则。此时,决策规则倾向于“乐观”地接受更多的决策,容错率强,但决策准确性偏低。当 $\delta \rightarrow +\infty$, 即 $(\frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}}, \frac{e^{-\delta}}{1+e^{-\delta}}) = (0, 1)$ 时,可变

多重代价决策规则就退化为最不易接受、最易拒绝的决策规则,即悲观决策规则。此时,决策规则倾向于“悲观”地筛选决策,决策准确率高,但是容错率低。当 $0 < \delta < 1$ 时,对两个极限情况 $(\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i, \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i)$ 和 $(\min_{1 \leq i \leq n} \beta_i, \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i)$ 进行加权,寻找符合实际松紧程度的决策规则,以满足特定情况下的应用需求。

3.2 可变多重代价决策粗糙集的定义

定义 3 令 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $\forall X \subseteq U, X$ 的可变多重代价决策下、上近似分别为:

$$\underline{A}_{\delta D}(X) = \{x \in U | P(X|[x]_R) \geq \alpha\} \quad (7)$$

$$\overline{A}_{\delta D}(X) = \{x \in U | P(X|[x]_R) > \beta\}$$

$$\text{其中, } \alpha = \frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i + \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i}{1+e^{-\delta}}, \beta = \frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i + \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i}{1+e^{-\delta}}.$$

将二元关系 $\langle \underline{A}_{\delta D}(X), \overline{A}_{\delta D}(X) \rangle$ 称为集合 X 关于代价矩阵 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 的可变多重代价决策粗糙集下、上近似集。可以得到相应的正域、边界域、负域集合:

$$POS_{\delta D}(X) = \underline{A}_{\delta D}(X)$$

$$BND_{\delta D}(X) = \overline{A}_{\delta D}(X) - \underline{A}_{\delta D}(X) \quad (8)$$

$$NEG_{\delta D}(X) = U - \overline{A}_{\delta D}(X)$$

定理 1 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $-\infty < \delta < +\infty, \forall X \subseteq U$, 则可变多重代价决策粗糙集与乐观和悲观粗糙集之间有如下关系:

$$\underline{A}_{\alpha D}(X) \supseteq \underline{A}_{\delta D}(X) \supseteq \underline{A}_{\beta D}(X)$$

$$\overline{A}_{\alpha D}(X) \supseteq \overline{A}_{\delta D}(X) \supseteq \overline{A}_{\beta D}(X)$$

证明: $\forall x \in \underline{A}_{\beta D}(X)$, 由定义 2 知, $P(X|[x]_R) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$

成立,故显然有 $P(X|[x]_R) \geq \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \geq \alpha$, 即 $x \in \underline{A}_{\alpha D}(X)$,

$\underline{A}_{\beta D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(X)$ 。同理可证, $\underline{A}_{\alpha D}(X) \supseteq \underline{A}_{\delta D}(X)$ 。类似地, 易证 $\overline{A}_{\alpha D}(X) \supseteq \overline{A}_{\delta D}(X) \supseteq \overline{A}_{\beta D}(X)$ 。

定理 2 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $-\infty < \delta < +\infty, \forall X \subseteq U$, 有如下性质:

$$1) \underline{A}_{\delta D}(X) \subseteq X \subseteq \overline{A}_{\delta D}(X)$$

$$\overline{A}_{\delta D}(\emptyset) = \underline{A}_{\delta D}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\overline{A}_{\delta D}(U) = \underline{A}_{\delta D}(U) = U$$

$$2) \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \underline{A}_{\delta_1 D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta_2 D}(X)$$

$$\underline{A}_{\delta_1 D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta_2 D}(X)$$

$$3) X \subseteq Y \Rightarrow \underline{A}_{\delta D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(Y)$$

$$\underline{A}_{\delta D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(Y)$$

$$4) \overline{A}_{\delta D}(X \cap Y) \subseteq \overline{A}_{\delta D}(X) \cap \overline{A}_{\delta D}(Y)$$

$$\underline{A}_{\delta D}(X \cup Y) \supseteq \underline{A}_{\delta D}(X) \cup \underline{A}_{\delta D}(Y)$$

$$5) \overline{A}_{\delta D}(\sim X) = \sim \underline{A}_{\delta D}(X)$$

$$\underline{A}_{\delta D}(\sim X) = \sim \overline{A}_{\delta D}(X)$$

证明: 1) 由定义 3 易证。

$$2) \text{ 设 } x \in \underline{A}_{\delta_2 D}(X), \text{ 由定义 3 得 } P(X|[x]_R) \geq \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_2 = \frac{e^{-\delta_2} \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i + \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i}{1+e^{-\delta_2}} \text{ 成立, 那么显然有 } \hat{\beta}_1 =$$

$$\frac{e^{-\delta_1} \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i + \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i}{1+e^{-\delta_1}} \leq \hat{\beta}_2 \text{ 成立, 进而有 } P(X|[x]_R) \leq \hat{\beta}_1 \text{ 成}$$

立。因此 $\underline{A}_{\delta_1 D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta_2 D}(X)$ 成立。同理可得 $\underline{A}_{\delta_1 D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta_2 D}(X)$ 。

3) 设 $X \subseteq Y$, 则 $X \cup Y = Y$, 所以 $\underline{A}_{\delta D}(X \cup Y) = \underline{A}_{\delta D}(Y)$ 。由(2)可知, $\overline{A}_{\delta D}(Y) = \overline{A}_{\delta D}(X) \cup \overline{A}_{\delta D}(Y)$, 因此, $\overline{A}_{\delta D}(X) \subseteq \overline{A}_{\delta D}(Y)$ 成立。同理可得, $\underline{A}_{\delta D}(X) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(Y)$ 。

4) 因为 $X \cap Y \subseteq X, X \cap Y \subseteq Y$, 所以 $\underline{A}_{\delta D}(X \cap Y) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(X), \underline{A}_{\delta D}(X \cap Y) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(Y)$ 。因此, $\underline{A}_{\delta D}(X \cap Y) \subseteq \underline{A}_{\delta D}(X) \cap \underline{A}_{\delta D}(Y)$ 成立。同理可得, $\underline{A}_{\delta D}(X \cup Y) \supseteq \underline{A}_{\delta D}(X) \cup \underline{A}_{\delta D}(Y)$ 。

5) 由定义 3 知, 令 $X = \sim X$, 则有 $\sim \underline{A}_{\delta D}(\sim X) = \underline{A}_{\delta D}(X)$, 即 $\underline{A}_{\delta D}(\sim X) = \sim \overline{A}_{\delta D}(X), \overline{A}_{\delta D}(\sim X) = \sim \underline{A}_{\delta D}(X)$ 。

3.3 可变多重代价决策粗糙集的评价

从 Pawlak 经典模型的角度评价粗糙集模型的度量时,通常考虑通过近似精度 γ 、近似程度 ρ 等度量进行分析和验证其边界域的精确度^[10]。

令 $I = \langle U, AT \rangle$ 为一信息系统, $\forall A \subseteq AT, B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵, $\forall X \subseteq U$, 可变多重代价决策粗糙集以及乐观、悲观决策粗糙集的近似精度分别为:

$$\gamma_{\delta D} = \frac{|\underline{A}_{\delta D}(X)|}{|\overline{A}_{\delta D}(X)|}$$

$$\gamma_{\alpha D} = \frac{|\underline{A}_{\alpha D}(X)|}{|\overline{A}_{\alpha D}(X)|} \quad (9)$$

$$\gamma_{\beta D} = \frac{|\underline{A}_{\beta D}(X)|}{|\overline{A}_{\beta D}(X)|}$$

$$\text{那么, 由定理 1 易得 } \frac{|\underline{A}_{\alpha D}(X)|}{|\overline{A}_{\alpha D}(X)|} \geq \frac{|\underline{A}_{\delta D}(X)|}{|\overline{A}_{\delta D}(X)|} \geq$$

$\frac{|\underline{A}_{\beta D}(X)|}{|\overline{A}_{\beta D}(X)|}$, 因此, $\gamma_{\alpha D} \geq \gamma_{\delta D} \geq \gamma_{\beta D}$ 。类似地, 设可变多重代价决策粗糙集以及乐观、悲观决策粗糙集的精确近似程度分别为:

$$\rho_{\delta D} = \frac{|\underline{A}_{\delta D}(X)|}{|U|}$$

$$\rho_{\alpha D} = \frac{|\underline{A}_{\alpha D}(X)|}{|U|} \quad (10)$$

$$\rho_{\beta D} = \frac{|\underline{A}_{\beta D}(X)|}{|U|}$$

那么, 一定有 $\rho_{\alpha D} \geq \rho_{\delta D} \geq \rho_{\beta D}$ 。由以上分析可得, 可变多重代价决策粗糙集的各度量指标是介于乐观决策粗糙集和悲

观决策粗糙集的相应度量指标之间的。

从决策粗糙集的角度评价模型时,正域、边界域和负域的代价是衡量粗糙集的另一个数字特征。第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个代价矩阵 B_i 都有相应的正域、边界域、负域代价。

令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统,对于决策属性 $D\subseteq AT,U/IND(D)=\{D_1,D_2,\cdots,D_n\}$ 为其在论域上的划分, $POS(D_j)$, $BND(D_j)$, $NEG(D_j)$ 表示任意决策粗糙集的正域、边界域和负域。那么,根据可变多重代价决策粗糙集以及乐观、悲观决策粗糙集的定义,正域代价 $\hat{\sigma}$ 、边界域代价 $\hat{\tau}$ 、负域代价 $\hat{\theta}$ 为:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sum_{j=1}^n \sum_{x \in POS(D_j)} (P(D_j|[x]_R) \hat{\lambda}_{PP}^{i,j} + (1-P(D_j|[x]_R)) \hat{\lambda}_{PN}^{i,j}) \\ \hat{\tau} &= \sum_{j=1}^n \sum_{x \in BND(D_j)} (P(D_j|[x]_R) \hat{\lambda}_{BP}^{i,j} + (1-P(D_j|[x]_R)) \hat{\lambda}_{BN}^{i,j}) \\ \hat{\theta} &= \sum_{j=1}^n \sum_{x \in NEG(D_j)} (P(D_j|[x]_R) \hat{\lambda}_{NP}^{i,j} + (1-P(D_j|[x]_R)) \hat{\lambda}_{NN}^{i,j})\end{aligned}\tag{11}$$

其中, $(\hat{\lambda}_{PP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{PN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NN}^{i,j})$ 的值如表 1 所列。

表 1 $(\hat{\lambda}_{PP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{PN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NN}^{i,j})$ 的取值

代价符号	代价值
$\hat{\lambda}_{PP}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{PP}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{PP}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$
$\hat{\lambda}_{PN}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{PN}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{PN}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$
$\hat{\lambda}_{BP}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{BP}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{BP}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$
$\hat{\lambda}_{BN}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{BN}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{BN}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$
$\hat{\lambda}_{NP}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{NP}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{NP}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$
$\hat{\lambda}_{NN}^{i,j}$	$\frac{e^{-\delta} \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_{NN}^{i,j} + \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_{NN}^{i,j}}{1 + e^{-\delta}}$

当 $-\infty < \delta < +\infty$ 时, $\hat{\sigma} = \sigma_{\delta D}$, $\hat{\tau} = \tau_{\delta D}$, $\hat{\theta} = \theta_{\delta D}$ 分别为可变多重代价决策粗糙集的正域代价、边界域代价和负域代价。
当 $\delta \rightarrow -\infty$, 即 $(\hat{\lambda}_{PP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{PN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NN}^{i,j})$ 分别取最小值

时, $\hat{\sigma} = \sigma_{\delta D}$, $\hat{\tau} = \tau_{\delta D}$, $\hat{\theta} = \theta_{\delta D}$ 分别为乐观决策粗糙集的正域代价、边界域代价和负域代价。当 $\delta \rightarrow +\infty$, 即 $(\hat{\lambda}_{PP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{PN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{BN}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NP}^{i,j}, \hat{\lambda}_{NN}^{i,j})$ 分别取最大值时, $\hat{\sigma} = \sigma_{PD}$, $\hat{\tau} = \tau_{PD}$, $\hat{\theta} = \theta_{PD}$ 分别为悲观决策粗糙集的正域代价、边界域代价和负域代价。

由上述 3 种代价可以得到可变多重代价决策粗糙集以及乐观、悲观决策粗糙集的总决策代价分别为:

$$\begin{aligned}SUM_{\delta D} &= \sigma_{\delta D} + \tau_{\delta D} + \theta_{\delta D} \\ SUM_{\delta D} &= \sigma_{\delta D} + \tau_{\delta D} + \theta_{\delta D} \\ SUM_{PD} &= \sigma_{PD} + \tau_{PD} + \theta_{PD}\end{aligned}\tag{12}$$

易得, $\sigma_{PD} \geq \sigma_{\delta D} \geq \sigma_{\delta D}$, $\tau_{PD} \geq \tau_{\delta D} \geq \tau_{\delta D}$, $\theta_{PD} \geq \theta_{\delta D} \geq \theta_{\delta D}$ 。因此, $SUM_{PD} \geq SUM_{\delta D} \geq SUM_{\delta D}$ 。由以上分析可得, 可变多重代价决策粗糙集的总决策代价指标是介于乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的总决策代价指标之间的。

4 实验分析

为了验证可变多重代价决策粗糙集和乐观、悲观粗糙集的一些数字特征, 选用 UCI 机器学习数据集上的 tic-tac-toe, zoo, post-operative 和 dermatology 4 个数据集进行仿真实验, 数据描述如表 2 所列。数据集的不完备信息样本不予采用; 若数据集中含有多个决策类, 则将多个决策类看作多个 2 类问题进行解决^[11-12]。

表 2 数据描述

数据集	样本个数	条件属性	决策类别
tic-tac-toe	958	9	2
zoo	101	16	7
post-operative	87	8	3
dermatology	366	34	6

实验选取了 210 个代价矩阵分别求出 4 组数据集在 $\delta \rightarrow -\infty$ (乐观决策粗糙集), $\delta = -8$ ($\delta = 3.35 \times 10^{-4}$), $\delta = -2$ ($\delta = 0.119$), $\delta = 0$ ($\delta = 0.500$), $\delta = 2$ ($\delta = 0.880$), $\delta = 8$ ($\delta = 0.999$) 和 $\delta \rightarrow +\infty$ (悲观决策粗糙集) 时的总决策代价。在实验过程中, 采用正态分布生成代价矩阵; 代价矩阵的数目以 20 为基数依次递增, 结果如图 1 所示。

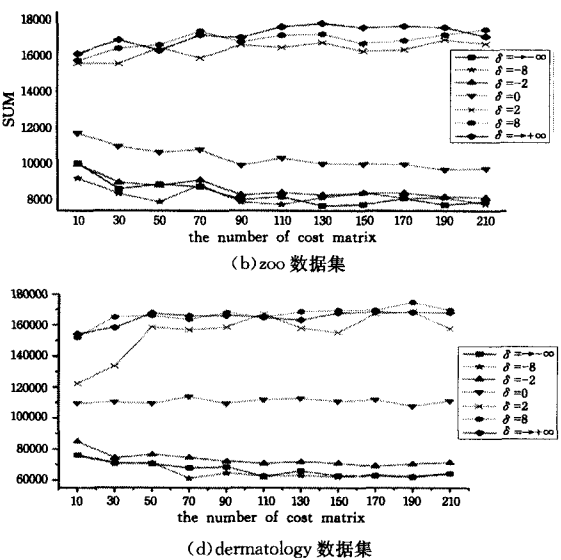
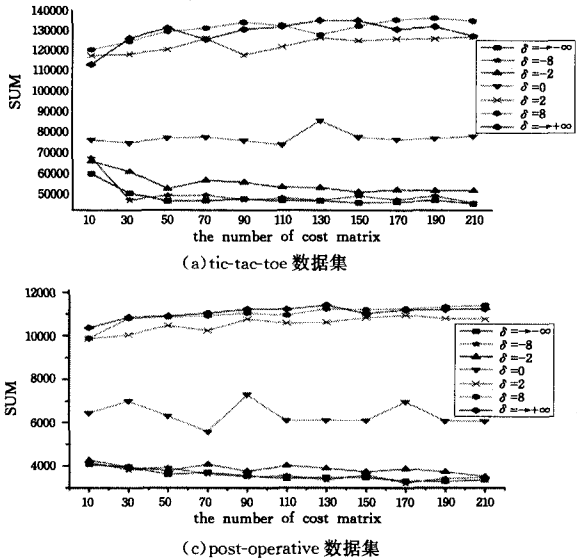


图 1 数据集总代价

实验选取了 tic-tac-toe 数据集一个条件属性在 $\delta \rightarrow -\infty$ (乐观决策粗糙集), $\delta=0$ ($\hat{\delta}=0.500$) 和 $\delta \rightarrow +\infty$ (悲观决策粗糙集) 时的近似精度值进行比较, 代价矩阵的数目以 40 为基数依次递增, 结果如图 2 所示。

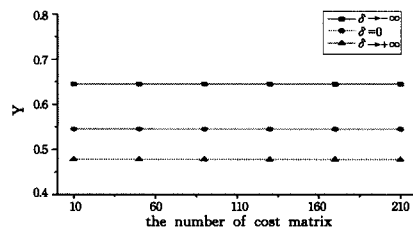


图2 tic-tac-toe 近似精度

实验结果表明: 1) 可变多重代价粗糙集的总代价值和近似精度分别介于乐观粗糙集、悲观粗糙集的总代价值和近似精度之间。2) 当 $\delta \rightarrow -\infty$ 时, 可变多重代价粗糙集就退化为乐观决策粗糙集; 同时, 当 $\delta = -8$ ($\hat{\delta} = 3.35 \times 10^{-4}$), 即 $\delta < -7$ 时, 可近似看作乐观决策粗糙集。3) 当 $\delta \rightarrow +\infty$ 时, 可变多重代价粗糙集就退化为悲观决策粗糙集; 同时, 当 $\delta = 8$ ($\hat{\delta} = 0.999$), 即 $\delta > 7$ 时, 可近似看作悲观决策粗糙集。4) 对于同一组数据集, 随着 δ 的增大, 近似精度减小。5) 对于同一数据集同一 δ 值, 随着代价矩阵数量的增加, 总代价在一定区间内趋于稳定, 且近似精度保持不变。

由此可见, 可变多重代价决策粗糙集是乐观决策粗糙集、悲观决策粗糙集的一般形式。可变多重代价决策粗糙集通过改变参数 δ 使多重代价同步地同向改变以接受边界域、拒绝边界域的规模。其仅考虑最大、最小的极限情况可以降低模型复杂度, 但无法全面反映所有专家的决策。通过调节参数值可以实现对决策融合规则松紧的调节, 以满足特定应用需求。此外, 两种极限情况即乐观决策粗糙集、悲观决策粗糙集在特定应用中可通过实数值来近似表达。

结束语 基于贝叶斯理论的决策粗糙集是粗糙集研究领域的一个重要方面, 本文通过从多重代价矩阵的角度对比乐观和悲观决策粗糙集模型, 提出一种可变多重代价决策粗糙集模型, 该模型兼有乐观和悲观决策粗糙集的特点和性质, 通过调节 δ 的取值可使其在一定程度上满足特定情况的应用需求。将 δ 的可行域拓展到整个实数域, 使得模型更具有普遍性。下一步将继续对可变多重代价决策粗糙集的参数取值问题进行研究。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
[2] PAWLAK Z. Rudiments of Rough Sets [J]. Information Sci-

ce, 2007, 177(1): 3-27.

- [3] YAO Y Y, WONG S K M, LINGRAS P. A decision-theoretic rough set model [C] // The 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, North-Holland. New York, 1990: 17-25.
- [4] MA X B, JU H R, YANG X B, et al. Multi-cost based decision-theoretic rough sets in incomplete information systems[J]. Journal of Nanjing University(Natural Sciences), 2015, 51(2): 335-342. (in Chinese)
马兴斌, 鞠恒荣, 杨习贝, 等. 不完备信息系统中的多重代价决策粗糙集[J]. 南京大学学报(自然科学), 2015, 51(2): 335-342.
- [5] LI H X, LIU D, ZHOU X Z. Review on decision-theoretic rough set model[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2010, 22(5): 624-630. (in Chinese)
李华雄, 刘盾, 周献中. 决策粗糙集模型研究综述[J]. 重庆邮电大学学报, 2010, 22(5): 624-630.
- [6] MA X A. Study on attribute reduction theory and method of probabilistic rough sets[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
马希骛. 概率粗糙集属性约简理论及方法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2014.
- [7] YANG X P, YAO J T. Modeling multi-agent three-way decisions with decision-theoretic rough sets[J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115(2/3): 157-171.
- [8] LI F, MIAO D Q, LIU C H, et al. Image segmentation algorithm based on the decision-theoretic rough set model [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2014, 9(2): 143-147. (in Chinese)
李峰, 苗奋谦, 刘财辉, 等. 基于决策粗糙集的图像分割[J]. 智能系统学报, 2014, 9(2): 143-147.
- [9] LI R, GAO C Y, ZHANG L Y. The distributed fault diagnosis of power networks based on Bayesian rough set method[J]. Journal of North China Electric Power University(Natural Science Edition), 2010, 37(3): 1-7. (in Chinese)
栗然, 高聪颖, 张烈勇. 基于粗糙集-贝叶斯方法的分布式电网故障诊断[J]. 华北电力大学学报(自然科学版), 2010, 37(3): 1-7.
- [10] ZHANG M, TANG Z M, XU W Y, et al. Variable Multigranulation Rough Set Model[J]. PR & AI, 2012, 25(4): 709-720. (in Chinese)
张明, 唐振民, 徐维艳, 等. 可变多粒度粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能, 2012, 25(4): 709-720.
- [11] LIU D, LI T R, LI H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets[J]. Fundamenta Informaticae, 2012, 115(2/3): 173-188.
- [12] YAO Y Y, ZHAO Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models [J]. Information Sciences, 2008, 178: 3356-3373.