多目标进化算法中选择策略的研究

谢承旺 丁立新
(武汉大学软件工程国家重点实验室 武汉 430072)

摘 要 在多目标进化算法(multiobjective evolutionary algorithms,MOEAs)的文献中,对算法的选择策略进行系统研究的还很少,而MOEAs的选择策略不仅引导算法的搜索过程、决定搜索的方向而且对算法的收敛性有重要的影响,它是算法能否成功求解多目标优化问题的关键因素之一。在统一的框架下,首先讨论了多目标优化问题中适应度函数的构造问题,然后根据MOEAs的选择机制和原理将它们的选择策略重新分成了6种类型。一般文献中很少对多目标进化算法的操作算子采用符号化描述,这样不利于对算子的深层次理解,符号化描述了各类选择策略的操作机制和原理,并分析了各类策略的优劣性。最后,从理论上证明了具备一定特征的多目标进化算法的收敛性,证明的过程表明了将算法运行终止时得到的P_{known}作为多目标优化问题的Pareto最优解集或近似最优解集的合理性。

关键词 多目标进化算法,适应度函数,选择策略,收敛性

中图法分类号 TP301　　**文献标识码** A

Study on Selection Strategies of Multiobjective Evolutionary Algorithms

XIE Cheng-wang DING Li-xin
(State Key Laboratory of Software Engineering,Wuhan University,Wuhan 430072,China)

Abstract It is scarce for literatures devoted to the multiobjective evolutionary algorithms (MOEAs) to systematically research on selection strategies,however,these strategies are crucial to MOEAs for solving some multiobjective optimization problems successfully,as they not only guide the process of search and determine the search directions,but also exert great effect on the convergence of MOEAs. With the unified framework,the paper first discussed how to construct an appropriate fitness function in multiobjective optimization problem,then,selection strategies were classified as six categories based on MOEA's selection mechanism and principle through systematically analyzing various MOEAs. As it is rare for expressing the operators of the MOEAs symbolized in most literatures,which is not conducive to comprehend them deeply. This paper described the principle and mechanism of each selection strategy symbolized and analyzed its advantages and weaknesses respectively. At last,the paper proved the convergence of MOEAs with certain features,and the process of proof has shown that it is reasonable to regard P_{known} achieved from the final results of MOEAs as P_{true} or the approximated Pareto optimal set.

Keywords Multiobjective evolutionary algorithms,Fitness function,Selection strategy,Convergence

1 引言

现实中许多工程应用问题实际上是多目标优化问题(Multiobjective Optimization Problem,MOP),而且问题的目标之间可能相互冲突。它与单目标优化问题的本质区别是,MOP问题的解方案不是唯一的,而是存在一个最优解集。解决MOP问题的最终手段是在各个目标之间进行协调权衡和折衷处理,使各目标函数尽可能达到最优。

进化算法(Evolutionary Algorithms,EAs)具有一些适于求解MOP问题的特征:首先,它能同时处理一组解,每运行一次算法就能获得多个有效解;其次,进化算法对均衡面的形状和连续性不敏感,能很好地逼近非凸性或不连续的均衡面或曲线。因此,多目标进化算法近年来一直用于解决MOP问题。

MOEAs的研究目标主要是使群体尽快收敛,并使获得的最优解集尽量均匀分布于非劣最优解域。与此同时,设计MOEAs需要考虑两个基本问题:(1)如何保证进化进程朝Pareto集定向搜索;(2)如何保持非劣解集的多样性。其中,第一个问题主要考虑如何适当赋予适应度值,第二个问题需要考虑进化算法采用的选择机制,以避免在目标空间或决策空间出现太多的相似个体,这样有利于生成分布较广的Pareto最优解集。这两个目标关系紧密,其中个体的适应度赋值是选择操作的基础和依据,本文将这两者结合在一起,构成多目标进化算法中所谓的选择策略。进化算法的选择策略在MOEAs的设计中具有重要的地位,它引导算法的搜索过程,决定搜索的方向,而且对算法的收敛性有重要影响,是算法能

到稿日期:2008-10-28 返修日期:2009-01-22 本文受教育部博士点基金项目(编号:20070486081)资助。
谢承旺(1974-),男,博士生,主要研究领域为智能计算、数据挖掘和分布式计算技术,E-mail:chengwangxie@163.com;丁立新(1967-),男,教授,博士生导师,主要研究领域为智能计算、智能信息处理。

否成功求解 MOP 问题的关键因素之一。

本文第 2 节是多目标优化问题和基本概念；第 3 节是 MOEAs 中的适应度函数；第 4 节是 MOEAs 的选择策略，是本文的主要部分；第 5 节是算法的收敛性分析；最后是全文总结。

2 多目标优化问题和基本概念

为不失一般性，考虑下面 n 个自变量和 k 个目标函数的多目标函数最大化问题(MOP)。

$$\text{Max}: y=f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))$$
$$\text{S. T.}\ e(x)=(e_1(x),e_2(x),\cdots,e_m(x))\leqslant 0 \quad (1)$$

其中，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X\subset R^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in Y\subset R^k$，$x$ 表示决策向量，y 表示目标向量，X 表示决策向量 x 形成的决策空间，Y 表示目标向量 y 形成的目标空间，约束条件 $e(x)\leqslant 0$ 确定决策变量 x 的可行取值范围。本文仅讨论无约束 MOP 问题。

为方便本文讨论，首先定义 MOP 问题的可行解集的概念。

定义 1(可行解集) 可行解集 X_f 为满足式(1)中约束条件 $e(x)$ 的决策向量 x 的集合，即 $X_f=\{x\in X|e(x)\leqslant 0\}$。

对 MOP 问题而言，一般 X_f 不可以全部排序，而只能针对某个指标进行排序，即部分排序，其情形比单目标优化问题复杂。为此需要在决策空间和目标空间上分别定义向量之间的这种偏序关系。

定义 2(决策空间中的支配关系) 对于决策向量 $a,b\in X_f$，$a\succ b$(a 优于 b)：当且仅当 $\forall i\in(1:k):f_i(a)\geqslant f_i(b)\wedge\exists j\in(1:k):f_j(a)>f_j(b)$ 。

定义 3 (目标空间中的支配关系) 设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 和 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$是目标空间中两个向量，称 u 支配 v，记为 $u\succ v$，当且仅当 $u_i\geqslant v_i\ (i=1:k)\wedge\exists j\in(1:k):u_j>v_j$。

由定义 2,3 可知，决策空间中的支配关系与目标空间中的支配关系是一致的，因为决策空间中的支配关系实质上是由目标空间中的支配关系决定的。

定义 4(Pareto 最优解) 给定一个多目标优化问题 max $f(x)$，若 $x^*\in X_f$，且不存在其它的$\overline{x^*}\in X_f$使得 $f_i(x^*)\leqslant f_i(\overline{x^*})(i=1:k)$成立，且其中至少有一个是严格不等式，则称 x^* 是 max $f(x)$的 Pareto 最优解。其中，X_f 为定义 1 中的可行解集。

定义 5(Pareto 最优解集) 给定一个多目标优化问题 max $f(x)$，它的最优解集 P^* 或 P_{true} 定义为：$P^*=\{x^*\}=\{x\in X_f|\neg x'\in X_f,f_j(x')\geqslant f_j(x),j=1:k\}$，其中 X_f 意义同定义 1。

定义 6(进化群体非劣解集) 设 Pop 为 MOEAs 优化过程中某一代群体，解个体 $x^*\in Pop$ 为群体的当前最优解个体或非劣解，当且仅当$\neg\exists x\in Pop:x\succ x^*$；$Pop$ 中所有非劣解个体的集合称为当前进化群体的非劣解集。

定义 7(Pareto 最优前端) 给定一个多目标优化问题 max $f(x)$和它的最优解集$\{x^*\}$，它的 Pareto 最优前端 PF^* 或 PF_{true} 定义为 $PF^*=\{f(x)=f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)|x\in\{x^*\}\}$。

3 MOEAs 中的适应度函数

选择算子的任务是从较差个体中逐渐选出优良的解个体。通常采取在第$(t-1)$代对两个群体 $P^{(t-1)}$ 和 $P^{*(t-1)}$ 进行个体排序或分级，然后产生出第 t 代的新群体 $P^{(t)}$。排序分级是根据标量适应度值 $\Phi(x)$对当前已存储的所有个体 $x\in(P^{(t-1)}\cup P^{*(t-1)})$进行操作，而这里的映射 Φ 并非决策方案的严格的纯函数关系。

由于 MOP 中适应度的赋值和选择必须要考虑多个目标，而在 MOEAs 中不存在所谓已知的适应度值，它需要定义和间接构造。其次，MOEAs 中赋值问题的关键在于适应度函数要与决策方案的给定偏好排序进行恰当的关联，使得排序过程在实数集上产生一个正则化序列[1]。如果适应度函数 Φ 构造不当，致使个体的排序过程不能在实数集上产生正则化序列，则很难判断个体之间的优劣，选择操作就无法进行。

假设有一多目标背包问题的适应度赋值函数定义如下：

$$\Phi:=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\cdot f_i(x),\omega_i\in R \quad (2)$$

若 $\omega_1=2,\omega_2=-1$，对于上述背包问题的决策方案集 A，适应度计算如下：

$A=\{a,b,c,d\}$

$a=\{\},f(a)=(0,0),\Phi(a)=0$

$b=\{1\},f(b)=(4,1),\Phi(b)=7$

$c=\{3\},f(c)=(4,2),\Phi(c)=6$

$d=\{1,2,4\},f(d)=(7,4),\Phi(d)=10$

显然 b 的适应度好于 c 的适应度，则方案 b 优于方案 c。但这种表述存在缺陷，例如对于 a,b,d 3 种方案，从各自的子目标值来看，它们 3 者是相互非劣的。但从适应度值的角度看 d 却好于 b，b 好于 a。算法运行到该阶段时只有 4 个个体，无法再找到真正优于这 3 个方案的个体。但是在比较方案 b 和 c 时，已经确认 c 劣于方案 b，因而断定 c 不是最优解，但将 c 与方案 a,d 比较，却发现它们是相互非劣的。

因为按照加权和法确定的适应度值与 Pareto 支配之间存在矛盾，所以需要引入新的概念和方法[1]。

定义 8(序态射) 假设 R 和 S 分别为集合 A,B 上的一种二进制关系，对于函数 $u:A\rightarrow B$，

(1)如果 $\forall a,b\in A:aRb\Rightarrow u(a)Su(b)$，则称函数 u 是序同态的；

(2)如果 $\forall a,b\in A:aRb\Leftrightarrow u(a)Su(b)$，则称函数 u 是序同构的。

如果 B 为实数集，序同构 u 也称为优胜关系$\geq$的一种表示。理想的情形是适应度函数 Φ 能够作为优胜关系的一种反映形式，使得 S 成为实数集上一种典范次序关系。这意味着在决策方案的优于关系中存在一对一的关联对应，使优胜关系在适应度函数值上有确定的对应。而下面的定理可以对上述的理想情形给出明确的界定。

定理 1 假设 A 为一个有限集合，$\geq$和$>$为 A 中元素之间两两比较的二元关系。在 A 上对于实值函数 u，如果以下充要条件成立：

(1)$a\geq b\Leftrightarrow u(a)\geqslant u(b)$，则称$\geq$是完全全序关系，即弱优胜于关系。

(2)$a>b\Leftrightarrow u(a)>u(b)$，则称$>$是严格弱序关系，即优胜于的关系。

根据上述定理，适应度函数 Φ 不可能作为一种排序表达式，因为弱优胜关系通常不具有连通性，而优胜关系$>$不具备反向传输特性。

适应度函数为了保证与决策者偏好结构保持一致，至少在实数域上是同态的，因此序同态是实现适应度赋值的最低要求。从另一个方面来说，序同构的情形一般不存在。由此可知，MOEAs 中适应度赋值函数的定义和构造是一项十分重要的工作。

4 MOEAs 的选择策略

多目标进化算法中的选择策略在 MOEAs 的设计中具有十分主要的地位，是算法能否成功求解 MOP 问题的关键因素之一。自 Schaffer 在 1985 年提出第一个真正意义的多目标进化算法 VEGA[2] 以来，MOEAs 的发展很快，其中出现了不同类型的选择策略，这些选择策略之间区别很大，包括它们的操作机制原理、操作方式及优劣点等，各具特点。深入理解各种不同的选择策略有助于设计不同的 MOEAs 来解决不同的 MOP 问题。

为避免混淆 MOEAs 算子之间的细微差别，采用了严格的数学描述形式来表达不同的选择机制，现对描述中用到的一些符号定义如下：

定义 9(形式化描述符号)

(1)I 为个体空间中的一个非空集合，个体 $i\in I$；

(2)$\mu,\mu'\in Z^+$，分别代表父代和子代种群规模，则映射 $T:I^\mu\rightarrow I^{\mu'}$ 称为一个种群变换；

(3)X 为参数空间，Ω 为采样空间，则称映射 $X\rightarrow T(\Omega,T(I^\mu,\bigcup_\mu I^{\mu'}))$ 为一个进化算子；

(4)$I^{\mu^{(i)}}$ 和 $I^{\mu'^{(i)}}$ 分别表示进化过程的第 i 代种群及其经进化算子作用后的子代种群。

(5)$I^{\mu'^{(i)}+\mu^{(i)}}$ 表示操作算子当前可作用的个体集合。

4.1 子群体并列选择

Schaffer 提出的 VEGA[2] 算法是这种选择策略的代表，它将一个规模为 N 的群体均分成 k 个子群体并分别针对不同的目标各自独立地进化，每个子群体产生各自的新子群，然后将 k 个新子群混合起来进行交叉和变异操作，如此重复实施上述迭代过程。

定义 10(子群体并列选择)

$$s^{(i)}:X_s^{(i)}\times T(I,R^k)\rightarrow T(\Omega_s^{(i)},T(\bigcup_{j=1}^{k}(I^{\mu_j'^{(i)}+\mu_j^{(i)}}),I^{\mu^{(i+1)}}))$$

其中，$I^{\mu_j'^{(i)}}$ 和 $I^{\mu_j^{(i)}}$ 分别等于$\frac{I^{\mu_j'^{(i)}}}{k}$和$\frac{I^{\mu_j^{(i)}}}{k}$，即每个子群体具有相同的基数。

这种选择策略中每个子群体都是针对其中一个目标函数进行评估的，这就与 Pareto 支配之间是一对矛盾。因为一个好的 Pareto 最优解是考虑了所有目标的，它对单个目标而言并非最优解，这样的解很容易在选择操作时被“丢弃”。其次，这种选择机制在选择操作时只考虑了一个目标而忽视了其它目标，容易导致“物种形成(speciation)”。这种选择策略在本质上是一种目标函数的加权和法，容易在 Pareto 前端的始末处产生解点，且对前端曲面的非凸部敏感。

4.2 变化权重系数法

这种求解 MOP 问题的方法以 Hajela 和 Lin 提出的“可变目标权重聚合法”[3] 最具代表性。

首先，这种方法是一种非 Pareto 方法，在为个体赋予适应度值时使用加权和法，对每个目标赋一个权重，即将 k 个目标聚合成一个单目标，例如：$\max\sum_{i=1}^{k}\omega_i f_i(x)$，$i=(1,2,\cdots,k)$。这里 $\omega_i\geqslant 0$ 为第 i 个目标的权重系数，且一般满足：$\sum_i^k\omega_i=1$。为了并行搜索多个解权重 ω_i，$i=(1;k)$并不固定，权重和问题解同时实施进化操作。

Ishibuchi 和 Murata 在他们的 IMMOGLS[4] 算法中使用了同样的方法构造 MOP 问题的适应度函数，算法在选择父体时随机指定权重以形成不同的权重向量$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)$，其中 ω_i 由 $\omega_i=random_i/(random_1+\cdots+random_k)$ 产生。这样，在算法的每一代中就有 K 个搜索方向以找到不同的非支配解。

在 Jaszkiewicz 提出的 MOGLSA[5] 算法中每次迭代随机选中一个优化的标量函数来对所有使用加权的 Tchebycheff 函数或加权线性函数的正则权重向量进行同时优化。这种权重组合的依据是所有加权 Tchebycheff 函数和加权线性函数在非支配集中有最优值，因此找到整个非支配集合等价于找出所有加权 Tchebycheff 函数和加权线性函数的最优值。

这种选择方法的优点是计算效率比较高，同时可以得到一个较好的非劣解作为其它方法的初始值。而且这种策略计算的个体初始适应度值与其它个体无关，每个个体的评估都使用确定的加权组合，所有个体都有一个适应度值，以保证搜索方向朝最优解行进。但是在没有足够的关于 MOP 问题的信息时，无法确定合适的权重系数。如果权重的组合函数呈线性时无论怎样调整权重系统，都难以搜索到非凸解，如果组合函数呈非线性则可以很好解决此问题(Coello Coello et al. 2002，Jaszkiewicz 2002)。

4.3 排序分级选择法

这种选择策略在 MOEAs 中使用较多，如 Fonseca 和 Fleming 提出的 MOGA[6]，Srinivas 和 Deb 提出的 NSGA[7] 以及 Deb 与 Agrawal 等人的 NSGA2[8] 等。

这类方法根据“Pareto 最优个体”的概念，对种群中所有个体进行分级排序，依据是种群存在多少个个体优胜于该个体，以此作为适应度赋值的基础。当然，不同算法在具体赋值方式上可能存在差异。下面定义分级排序的符号化描述。

定义 11(级别赋值)　假设 a_m 为当代群体中的一个个体，其适应度向量为 u_m，即 $a_m\in P(i)$，其中 $P(i)=\{a_1(i),a_2(i),\cdots,a_\mu(i)\}\in I^{\mu^{(i)}}$，且 $m<\mu$。第 i 代的个体 a_m 的级别赋值如下：$R_i(a_m)=\sum_{n=1}^{\mu^{(i)}-1}|(u_m\leq u_n)|$，即 a_m 的级别等于群体 $P(i)$ 中优胜于 a_m 的个体数目之和。

假设第 t 代种群中的个体 x_u，其相应的目标向量为 u，定义 $r_u^{(t)}$ 为当前种群中支配目标向量 u 的个体数目，x_u 在第 t 代种群个体排序中的位置设为 $rank(x_u,t)=r_u^{(t)}$，则所有当前种群中非劣个体的排序均预设为 0。

值得注意的是：MOP 问题中，优劣性和支配关系并非定义目标向量之间的整体有序关系，只是给出部分有序的关系，因此这种级别排序不具有唯一性。

由上述 Pareto 最优个体的排序过程可知：(1)个体的适应度值与群体的规模有关；(2)排序分级选择法仅仅度量了各个个体之间的优胜次序，而未度量各个个体的分散程度，因而容易生成很多个相似的 Pareto 最优解，难以生成分布较广的 Pareto 最优解集。解决这个问题的办法是根据个体之间的

Pareto 优于关系和其它信息为个体确定适应度值。

4.4 共享函数法

在 MOP 问题求解中，一般希望得到的解方案尽可能地分散在整个 Pareto 最优集合内，而不是集中在最优解集的某一个较小区域。利用小生境技术对个体适应度进行共享可以实现这个要求，其中以 Horn 等人提出的 NPGA[9,10] 算法最具代表性。

定义 12(适应度共享和小生境) 若 $a,b\in P(i)$，且 $D(a,b)\leqslant\sigma_{share}$，其中 D 为点 a 和 b 之间的基因型或表现型距离，则对个体解点 a 和 b 的适应度进行修正，使得 $\Phi_i(a):\Phi_i(a)-X$，$\Phi_i(b):\Phi_i(b)-X$，其中 X 由 a 和 b 这两个个体之间的距离 D 来确定。

度量距离 D 是为了确定某个个体与群体中其它成员之间的距离。实际上，评估距离 D 对适应度共享的影响还需考虑该个体周围分布的其它个体数目。周围个体的数目一般用小生境数目 n_i 来表示，它是指在特定的空间区域内存在的个体数目。

定义 13(小生境数目) 小生境数目 n_i 是指在基因型空间 R^n 或表现型空间 R^k 中位于第 i 个小生境内的个体数目，即在 $P_{current}(t)$，P_{known}，$PF_{current}(t)$ 或者 PF_{known} 空间中位于某个特定区域内个体的数目之和。

将小生境操作算子与选择算子配合使用，可以限制某些个体繁衍至下一代，基于小生境的选择方式定义如下：

定义 14(基于小生境的选择算子) 如果对两个非劣个体 a 和 b 实施基于小生境的选择，设 $n_i(a)$，$n_i(b)$ 分别为个体 a 和 b 在第 i 个小生境内的小生境数目，则从 $\min(n_i(a),n_i(b))$ 中选择相应的个体，即选中具有最小小生境数目的个体。

下面给出 NPGA[10] 中共享选择方法的过程(以二进制锦标赛选择为例)：

1. 从种群中随机挑选 k 个个体组成比较集合 C，其中 k 为预设的比较集合规模。

2. 从群体中随机选择两个个体组成个体联赛集合 T，这里的联赛规模 $t_{dom}=2$。

3. 分别比较联赛集合 T 中的两个个体与集合 C 中所有个体之间的优胜关系，根据比较结果，按如下方式从联赛集合 T 中选择一个个体遗传到下一代：

(1)如果集合 T 中一个个体(记为 x)比集合 C 中所有个体都优胜，而另一个体不比 C 中所有个体优胜，则 x 遗传至下一代；

(2)如果由(1)未能选出胜出者，则利用定义 14 中的选择方法从等价群体中选择小生境数最小的个体胜出。

这种选择策略的优点是能够得到多种不同的 Pareto 最优解点，但不足之处在于：一方面由于每次进行选择操作都需要进行大量的个体之间优于关系的评价和比较运算，使得算法的搜索效率较低；另一方面确定合适的小生境参数 σ_{share} 有时很困难。

事实上，除了利用小生境技术评估个体的密度信息外，NSGA2[8] 通过计算个体的拥挤距离来估计密度信息，SPEA2[11] 算法通过计算个体与其第 k 个最近邻在目标空间的距离来修正个体的适应度值以及 PAES[12] 算法采用自适应的网格算子来评估个体的密度信息等等。基于密度选择的性能与密度估计技术的精确性密切相关[13]。

4.5 外部种群辅助选择

为了存储算法在运行中得到的非支配解，防止由于随机因素导致优化过程中优秀解个体的丢失，很多 MOEAs 算法通过构造一个辅助种群，即所谓档案(Archive)来维护当代群体中的满意个体，使其能够复制到下一代。同时，由于内存资源的限制，档案规模的大小必须有限。这类选择方法的典型代表就是 Zitzler 和 Thiele 提出的 SPEA[14] 算法。

外部种群辅助选择方法有几个与众不同的特征：(1)将每代中的非劣个体存储在外部的一个附属可更新群体里；(2)种群中个体的适应度与外部辅助集中优于该个体的数目有关；(3)使用聚类技术对外部档案中的非支配解进行剪枝而不破坏均衡面的特征。

下面给出基于聚类的存档算子描述。

定义 15(基于聚类的存档算子) 设个体 $a_m\in P$ 是种群 P 中的非劣解，考虑将其放到外部辅助种群 P'，P' 的最大规模限制为 N'。如果 $|P'|<N'$，则 $P'=P'\cup\{a_m\}$；否则执行操作 $P'=P'\cup\{a_m\}$，当且仅当下面两项条件之一成立：

(1)新解 a_m 支配外部种群中的部分解，则将 P' 中这些受支配的解个体移除；

(2)将新解 a_m 和 P' 中的保留解共同进行聚类剪枝而且 a_m 能得以保留。

MOEAs 大多利用 Pareto 优胜关系和个体的密度信息挑选最优个体，并将其保存在每代的群体档案中，但是这样可能存在退化问题，即第 t 代群体档案中的个体可能劣于第 t' 代群体档案中的个体($t'<t$)。Laumanns 等人提出了一种群体档案策略来克服这种退化现象[15]。其次，一些 MOEAs 并未区分 P 中的非劣解与 P' 中非劣解在适应度取值上的差别，实际上，P' 中非劣解点通常优于种群 P 中的非劣解，因而适应度赋值应考虑结合外部种群。

4.6 结合决策偏好的选择

基于 Pareto 优胜关系的选择方法已被广泛采用，这类 MOEAs 在理论上能找到任意 Pareto 最优解，但搜索空间的维数影响了它的性能，正如 Fonseca 和 Fleming 所说[16]："基于 Pareto 的单纯 EAs 不能正确地优化含很多个目标的问题，由于均衡面的大小和维数过高，导致不能产生满意解"。崔逊学等人[17,18] 提出的"多目标协调进化算法(MOCEA)"就是这种选择方法的例子。

在高维空间内的有限规模的进化群体中，各个体之间很难进行 Pareto 排序比较，有时甚至会出现所有个体均是 Pareto 最优解，从而无法实施正常的进化选优。在这种情形下不能采用通常的 Pareto 优于关系对个体进行优劣排序，而必须采用新的概念和方法。为方便论述，现定义如下概念[1]。

定义 16(级别不劣于关系) 对于给定方案集 R 中的任一对方案 x' 和 x''，若 x' 的级别不劣于 x''，当且仅当根据决策者的偏好序和来自各个目标 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$ 的信息，人们有理由相信 x' 优于 x''，记作 $x'Sx''$。反之称非 $x'Sx''$，记作 $not\ x'Sx''$，当且仅当根据决策者的偏好序和关于各属性 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)$ 的信息，人们没有理由相信 $x'Sx''$。

定义 17(级别无差异关系) 给定方案集 R 及 R 中的两个方案 x',x''，我们说 $x'\bar{S}x''$，当且仅当存在方案 $b_1,b_2,\cdots,b_j\in R$，$c_1,c_2,\cdots,c_k\in R(j\geqslant1,k\geqslant1)$，使 $x'Sx''$ 且 $x''Sx'$，或 $x'Sb_1$，$b_1Sb_2,\cdots,b_jSx''$ 且 $x''Sc_1,c_1Sc_2,\cdots,c_kSx'$。

性质 1 级别不劣于关系 S 具有如下性质：

(1)关系 S 不保证方案之间有传递性。

(2)对于任一方案 x，关系 S 是自反的，即 $xSx(\forall x \in R)$。

(3)R 中的任一对方案在关系 S 下不一定是可比较的。

多目标协调模型的基本思路是根据某种指示值对方案集 R 中各方案的级别关系进行检验，淘汰其中级别较低的方案，以便决策者能从保留的方案中直接选择好方案。实质是利用一种比"Pareto 优于关系"较弱的"级别不劣于关系"进行排序。

协调模型常用方法是 ELECTRE 法，基本思想是利用比不劣于关系较弱的级别不劣于关系 S 进行排序，这种排序关系是"建立在决策者愿意承担由于承认假设 x'不劣于 x''所产生的一定的风险的基础上"。该方法的关键技术是构造级别关系来形成最小优势子集供优化决策。

MOCEA 算法将决策者偏好信息融合到搜索过程，用个体之间经过协调检验的"级别不劣于关系"取代"Pareto 优于关系"，以此来产生方案偏好排序集，为现实中的高维多目标优化问题提供一种有效途径。但是，由于在优化领域中存在"没有免费的午餐"定理，因此不可盲目将 MOCEA 照搬地应用到任何问题的求解中。

5 算法的收敛性分析

在 EA 进化过程中，对应于当前 EA 群体确定一个局部的 Pareto 最优解集，被称为 $P_{current}(t)$，t 表示进化代数。很多 MOEAs 使用外部辅助群体来存储逐代累积产生的非劣个体，称此辅助群体为 $P_{known}(t)$，$P_{known}(0)$ 定义为空集，P_{known} 定义为进化终止时的最终 Pareto 解集。

在第 t 代 $P_{current}(t)$ 被加入到已有的群体 $P_{known}(t)$，即 $P_{current}(t) \cup P_{known}(t)$，但每个个体均要经过 Pareto 解集进行过滤检测，其中劣点被剔除，剩下的形成 $P_{known}(t+1)$。整个进化过程重复进行直至结束。如此形成的 P_{known} 与理论上的 Pareto 最优解集(P_{true})可能有一定区别。定义 $P_{current}(t)$，$P_{known}(t)$，P_{known} 和 P_{true} 的 Pareto 前端分别为 $PF_{current}(t)$，$PF_{known}(t)$，PF_{known} 和 PF_{true}。

假设 1 用 EA 求解 MOP 问题时，假设满足如下隐含条件之一：$P_{known}(t)=P_{true}$，或 $P_{known}(t) \subset P_{true}$，或 $PF_{known}(t) \in [PF_{true}-\epsilon, PF_{true}]$。

引理 1 在假设 1 条件下，对于给定的非空解集，至少存在一个 Pareto 最优解[19]。

证明见文献[1]中 P130－P131，略。

定理 2(算法收敛性定理) 具有无限规模且具备一定特征的 MOEAs 能以概率 1 收敛于 MOP 问题的全局最优解，即 Pareto 前端 F^*，它至多由无穷多个向量 $V_1^*, V_2^*, \cdots, V_N^*$ 组成，数学描述是：$P\{\lim\limits_{t\to\infty} F^* \in P(t)\}=1$，其中 $P(t)=P_{current}(t)$。

证明：Back 已证明 EA 如果满足如下两个条件，则能以概率 1 收敛[20]。(1) $\forall F^*, F' \in I$，F'能由 F 通过交叉和变异获得；(2)整个群体的次序 $P(0)$，$P(1)$，…是单调的，即对于 $\forall t$，有 $\min\{\phi(F(t+1)) \mid F(t+1) \in P(t+1)\} \leqslant \min\{\phi(F(t)) \mid F(t) \in P(t)\}$

假设 MOEAs 具有无限精度，在无限群体规模情况下采用的交叉和变异算子均不随进化代数变化，进化过程即能访问到搜索空间中任意一点，这样可以满足条件(1)。

要证明 MOEAs 的群体次序是单调的，必须要求 MOEAs 的适应度函数和选择算法是单调的，如果赋值方法保证占优的个体具有更好的适应度，则适应度函数具有单调性。在 MOEAs 的选择方法中，对当代群体中的个体进行排序，产生某代的 Pareto 最优解集 $P_{current}(t)$，它由一些非劣解组成，且总是非空集合。在 $P_{current}(t)$ 与 $P_{known}(t)$ 进行并集运算时过滤劣解后可以认为 $P_{known}(t+1) \subset P_{true}$，即满足假设 1 之条件。

如果 MOEAs 中的父代个体与它们的子代个体一起参与选择并适者生存，根据引理 1，$P_{known}(t)$ 中至少存在一个 Pareto 最优解，它被合并至 $P_{known}(t+1)$，保证了$(t+1)$代的最佳适应度值至少等于 t 代的最佳适应度值；因 $P_{current}(t)$ 可能出现更优的非劣解，它(们)在 $P_{current}(t) \cup P_{known}(t)$ 形成 $P_{known}(t+1)$ 时获得更好的适应度值，至少不会出现劣于 t 代的结果。因此选择方式能满足单调性。

综合上述证明过程，具备一定特征的 MOEAs 算法满足 Back 提出的两个条件，其收敛性得证。

由于计算资源的限制，通常是在算法运行至某一预设的最大代数时终止。由定理 2 可知，算法得到的 P_{known} 逼近 P_{true}，所以将 P_{known} 作为 MOP 问题的 Pareto 最优解集或近似解集是完全合理的。

结束语 本文在统一的框架下研究了 MOEAs 中的选择策略。由于在 MOP 问题中，适应度函数赋值与 Pareto 支配之间可能存在矛盾，文章首先讨论了 MOP 问题中适应度函数的构造问题，要求适应度函数在实数域至少是同态的，但是一般情形下，序同构是很难达到的。随后，研究了 MOEAs 中的选择策略问题，采用一种新的方法对这些选择策略进行了分类，依据这些选择策略的操作机制和原理不同将它们分为子群并列选择法、变化权重系数法、排序分级选择法、共享函数法、外部种群辅助选择法和结合决策偏好选择法。其中子群并列选择法和变化权重系数法是非 Pareto 方法的；而排序分级选择法、共享函数法和外部种群辅助选择法都是基于 Pareto 优胜关系选择方法的；结合决策偏好的选择法基于级别不劣于关系的选择方法，它是一种比 Pareto 优胜关系要弱的一种比较关系，以克服 Pareto 关系在高维搜索空间中的不足。

文章对各类选择策略的操作机制原理和操作方式采用符号化描述是为了深层次理解 MOEAs 的操作算子，这样不仅有利于 MOEAs 的改进而且有助于研究人员依据 MOP 问题特点设计出更适合问题求解的算法。

文章最后对具备一定特征的 MOEAs 的收敛行为进行了分析，从理论上证明了算法的收敛性。所谓"具备一定特征"是指算法具有无限精度，在进化过程中对于搜索空间中任意一点均是可达的，其次算法的适应度函数和选择算子都应该具有单调性，以保证不会出现"退化现象"。收敛性的证明说明了将算法运行终止时得到的 P_{known} 作为 MOP 问题的 Pareto 最优解集或近似解集的合理性。

参 考 文 献

[1] 崔逊学. 多目标进化算法及其应用[M]. 北京：国防工业出版社，2006

[2] Schaffer J D. Multiple objective optimization with Vector evaluated genetic algorithms[C]// Grefenstette J J, eds. Proc. First

Int. Conf. on Genetic Algorithms. Lawrence Erlbaum, 1985: 93-100

[3] Hajela P, Lin C Y. Genetic search strategies in multicriterion optimal design[J]. Structural Optimization, 1992, 4: 99-107

[4] Ishibuchi H, Murata T. Multi-objective Genetic Local Search Algorithm and its Application to Flowshop Scheduling[J]. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. C, Aug. 1998, 28: 392-403

[5] Jaszkiewicz A . On the performance of Multiple - objec Genetic Local Search on the 0/1 Kna psack Problem- A Comparative Experiment[J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2002, 6: 402-412

[6] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithms for Multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo, California, 1993

[7] Srinivas N , Deb K . Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms[R]. Dept. Mechanical Engineering, Kanput, India, 1993

[8] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al, A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA II[M]. Parallel Problem Solving from Nature(PPSN VI), Berlin, 2000

[9] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization[C]// IEEE World Congress on Computation. Piscataway, NJ, 1994

[10] Horn , Jeffrey , Nafpliotis N. Multiobjective Optimization using the Niched Pareto Genetic Algorithm [R]. IlliGAL Report 93005. University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, USA, 1993

[11] Zitzler E , Laumanns M , Thiele L. Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization[C]// EUROGEN 2001, Evolutionary Methods for Design, Optimization and Contorl with Applications to Industrial Problems. Septermber 2001

[12] Knowles J D , Corne D W . The Pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for Pareto multiobjective optimization[C]// Congress on Evolutionary Computation(CEC99). Piscataway, NJ, 1999

[13] Laumanns M, Zitzler E, Thiele L. On the effects of archiving, elitism, and density based selection in evolutionary multi-objective optimization[C]// Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2001). 2001

[14] Zitzler E , Thiele L . Multiobjective evolutionary algorithms : A comparative case study and strength Pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3: 257-271

[15] Laumanns M, Zitzler E, Thiele L. On the effects of archiving, elitism, and density based selection in evolutionary multi-objective optimization[C]// Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2001). 2001

[16] Fonseca C M, Fleming P J. An overview of evolutionary algorithms in multi-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 1995, 3: 1-16

[17] 崔逊学,李淼,方廷健. 多目标协调进化算法研究[J]. 计算机学报, 2001, 24(9): 979-984

[18] Cui Xun-Xue, Lin Chuang. A Preference-Based Multi-Objective Concordance Genetic Algorithm[J]. Journal of Software, 2005, 16(05): 761-770

[19] Veldhuizen D A V, Lamont G B. Evolutionary Computation and Convergence to a Pareto Front[C]// Late Breaking Papers at the Genetic Programming 1998 Conference. Stanford University, California, 1998

[20] Back T. Evolutionary Algorithms in Theory and Practice[M]. NewYork: Oxford University Press, 1996

(上接第 105 页)

[3] Xun Yi, Chik How Tan, Chee Kheong Siew. A New Block Cipher Based on Chaotic Tent Maps [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 2002, 49(12): 1826-1829

[4] Jakimoski G, Kocarev L. Chaos and cryptography: Block encryption ciphers based on chaotic maps [J]. IEEE Trans. Circuits Syst, 2001, 48(2): 163-169

[5] Stojanovski T, Kocarev L. Chaos-based random number generators—Part I: Analysis [J]. IEEE Trans. Circuits Syst, 2001, 48 (3): 281-288

[6] Stojanovski T, Kocarev L. Chaos-based random number generators—Part II: Practical realization [J]. IEEE Trans. Circuits Syst, 2001, 48(3): 382-385

[7] Wong W K, Lee L P, Wong K W. A modified chaotic cryptographic method [J]. Comput Phys Commun, 2000, 138: 234-236

[8] Li Shujun , Mou Xuanqin , Cai Yuanlong . Pseudo - random Bit Generator Based on Couple Chaotic Systems and Its Applications in Stream-Cipher Cryptography[C]// Progress in Cryptology-IndoCrypt 2001. Lecture Notes in Computer Science. 2247, Dec. 2001: 316-329

[9] Wheeler D D. Problems with chaotic cryptosystems [J]. Cryptologia, 1989, 13(3): 243-250

[10] Wheeler D D, Mathews R A J. Supercomputer investigations of a chaotic encryption algorithm [J]. Cryptologia, 1991, 15(2): 140-152

[11] Wei Jun, Liao Xiaofeng, Wong Kwok-wo, et al. A new chaotic cryptosystem[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30: 1143-1152

[12] Goldberg D, Priest D. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic [J]. ACM Comp. Surv, 1991, 23(1): 5-48

[13] Fridrich J. Symmetric Ciphers Based on Two-dimensional Chaotic Maps [J]. Int. J. Bifurcat Chaos, 1998, 8(6): 1259-84

[14] Knuth D E. Seminumerical algorithms[M]. The Art of Computer Programming 3rd edition. Reading, MA: Addison Wesley, 1998, 2

[15] Kohda T , Tsuneda A . Statistics of Chaotic Binary Sequences [J]. IEEE Transactions on information theory, 1997, 43 (1): 104-112

[16] 陈勇源. 一种抗掩密分析的图像 LSB 掩密算法[J]. 重庆邮电大学学报: 自然科学版, 2008, 20(6): 758-762