

基于顶点度数的完全独立生成树研究

林政宽¹ 赵源¹ 樊建席¹ 程宝雷^{1,2}

(苏州大学计算机科学与技术学院 苏州 215006)¹

(江苏省计算机信息处理技术重点实验室 苏州 215006)²

摘要 在计算机互连网络中,完全独立生成树在信息的可靠传输、并行传输、安全分发等方面具有重要的作用。假设图 G 中存在 n 棵生成树 T_1, T_2, \dots, T_n , 若对于图 G 中任意两个顶点 u 和 v , 满足 u 和 v 之间的路径在这 n 棵树中都是顶点不相交的, 则称这 n 棵树为完全独立生成树(CISTs)。在2015年, Chang等人证明了对于包含 $n(n \geq 6)$ 个顶点的任意图 G , 如果图 G 的最小顶点度数至少为 $n-2$, 那么, G 中存在至少 $\lfloor n/3 \rfloor$ 棵 CISTs^[1]。在 Chang 等人的基础上, 文中继续深入研究了图 G 中顶点度数和 CISTs 的棵数之间的关系。对于包含 $n(n \geq 5)$ 个顶点的任意图 G , 假设图 G 的最小顶点度数至少为 $n-2$, 得出度数为 $n-2$ 的顶点的个数、度数为 $n-1$ 的顶点的个数与图 G 中 CISTs 的棵数之间关系的推导等式, 并证明了其正确性, 从而改进了文献[1]中的结果。

关键词 完全独立生成树, 可靠传输, 互连网络, 图

中图分类号 TP393 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.06.016

Research on Completely Independent Spanning Trees Based on Degree of Vertices

LIN Cheng-kuan¹ ZHAO Yuan¹ FAN Jian-xi¹ CHENG Bao-lei^{1,2}

(School of Computer Science and Technology, Suzhou 215006, China)¹

(Provincial Key Laboratory for Computer Information Processing Technology, Suzhou 215006, China)²

Abstract In the interconnection network of computers, completely independent spanning trees(CISTs) play an important role in the aspects such as reliable transmission, parallel transmission, secure distribution and others of information. Supposing that there exist n spanning trees which are T_1, T_2, \dots, T_n in a graph G , for any pair of vertices u and v in G , if the paths from u to v are node-disjoint in the n trees, T_1, T_2, \dots, T_n are called CISTs in G . In 2015, Chang et al. [1] gave the proof that for graphs of order n with $n \geq 6$, if the minimum degree is at least $n-2$, there are at least $\lfloor n/3 \rfloor$ CISTs in G . Based on the result of Chang et al., we further studied the relation between vertex degree and number of CISTs in G . For any graph of order n with $n \geq 5$, if the minimum degree of vertices is at least $n-2$, the equation between the number of vertices whose degree is $n-2$, the number of vertices whose degree is $n-1$ and the number of CISTs can be obtained. The correctness of the equation was also proved, improving the result in paper [1].

Keywords Completely independent spanning trees, Reliable transmission, Interconnection network, Graph

1 引言

一个互连网络可以用一个简单图 $G=(V, E)$ 来表示, 其中 V 代表 G 上的顶点集合, 而 E 代表 G 上的边集合。 G 上的 n 条路径如果具有相同的起点和终点, 并且这 n 条路径中任意两条路径上的顶点都不相同(除起点和终点)且边也都不同, 则称这 n 条路径为顶点不相交路径^[2]。 G 上的两棵生成树如果具有相同的根, 且这两棵生成树中由根到任一顶点的两条路径(每棵生成树各一条)为顶点不相交路径, 则称这两棵树相互独立。如果对于 G 上的两棵生成树中的任意两个

顶点 u 和 v , 满足 u 和 v 之间的路径均为顶点不相交路径, 则称这两棵树相互完全独立。若 n 棵生成树两两相互独立, 则称之为 n 棵独立生成树(Independent Spanning Trees, ISTs); 若 n 棵生成树两两相互完全独立, 则称之为 n 棵完全独立生成树(Completely Independent Spanning Trees, CISTs)。CISTs 的概念是由 Hasunuma^[3] 于 2001 年提出的。

在计算机互连网络中, CISTs 具有较好的应用。若一个互连网络 G 中存在 n 棵 CISTs, 则 G 中任意两个顶点之间存在 n 条顶点不相交路径。这 n 条路径用于在两个处理器之间传输信息时, 假设网络存在至多 $n-1$ 个故障处理器, 则这两

到稿日期: 2016-05-21 返修日期: 2016-07-14 本文受国家自然科学基金项目(61572340, 61572337), 江苏省高校自然科学研究面上项目(14KJB520034), 中国博士后科学基金面上项目(2015M581858), 2015年度“江苏省博士后科研资助计划”资助项目(1501089B)资助。

林政宽(1976—), 男, 副教授, 主要研究方向为并行计算系统、交换网络、无线网络、无线传感器网络、算法设计与分析等, E-mail: cclin@suda.edu.cn(通信作者); 赵源(1994—), 男, 主要研究方向为互连网络等; 樊建席(1965—), 男, 教授, 主要研究方向为互连网络、算法设计、图论、自动机; 程宝雷(1979—), 男, 副教授, 主要研究方向为互连网络、算法设计、图论等。

个处理器之间总存在一条无故障路径,从而达到可靠传输的目的。若所有处理器都是无故障的,则可将信息分成 n 份,每一份在一条路径上传输,从而达到并行传输的目的;当用于信息分发时,可以将每一条路径上传输的信息进行加密,以提高信息分发的安全性。

Hasunuma 指出,证明一个任意网络上 CISTs 的存在性是 NP-难的,即使只证明其上存在两棵 CISTs^[4]。Araki 证明了在顶点个数大于或等于 3 的网络中,若每个顶点的度数大于或等于 $n/2$,则该网络中存在 2 棵 CISTs^[5];Fan 等证明了对于在顶点个数大于或等于 3 的网络中,如果非相邻顶点对的度数和大于或等于 n ,则该网络中存在 2 棵 CISTs^[6]。Chang 等人证明了对于包含 n 个顶点的任意图 $G, n \geq 6$,如果图 G 的最小顶点度数至少为 $n-2$,那么存在至少 $n/3$ 棵 CISTs^[1]。

本文改进了文献[1]的结论。针对包含 n 个顶点的任意图 $G, n \geq 5$,如果图 G 的最小顶点度数至少为 $n-2$,文中给出了度数为 $n-2$ 的顶点个数、度数为 $n-1$ 的顶点个数与图 G 中 CISTs 的棵数之间的推导等式,并证明了其正确性。

2 预备知识

设图 $G=(V,E)$ 是一个简单图, V' 是图 G 中顶点集 V 的一个非空子集。以 V' 为顶点集合,以两端点均在 V' 中的全部边作为边集的子图,称为 G 中由非空顶点子集 V' 导出的子图,记 $G[V']$ 。对于 G 上任意两个顶点 u 和 v ,当且仅当 $(u,v) \in E$ 时,称 u 和 v 是相邻的。顶点 u 的邻居集合是 G 上所有与 x 相邻的顶点组成的集合,记为 $N(x)$ 。图 G 中与某个顶点 x 相连接的边的数目称为这个顶点的度数,简称度,记为 $deg(x)$ 。将图 G 的最小度数定义为 $\delta(G) = \min\{deg(x) | x \in V\}$ 。当顶点 x 和 y 之间存在相连的边时,将该边记作 xy 。文中将自然数集记为 N 。

文献[7]给出了关于二分图的定义:若把简单图 G 的顶点集合分成两个不同的非空集合 V_1 和 V_2 ,使得图中的每一条边都连接 V_1 中的一个顶点与 V_2 中的一个顶点(因此 G 中没有边连接 V_1 中的两个顶点或 V_2 中的两个顶点),则称 G 为二分图。假设图 G 的顶点集合 V 存在不相交子集 U_1 和 U_2 ,忽略 U_1 和 U_2 中存在的边,定义 $B(U_1, U_2)$ 为一个二分图。即, $V(B(U_1, U_2)) = U_1 \cup U_2$ 且 $E(B(U_1, U_2)) = \{xy | x \in U_1, y \in U_2 \text{ 且 } xy \in E(G)\}$ 。

一个图若有 k 棵 CISTs, Araki^[5] 给出了具体描述:

引理 1^[5] 图 G 有 k 棵 CISTs, 当且仅当它的顶点集合 $V(V \neq \emptyset)$ 可以划分为 V_1, V_2, \dots, V_k , 并且 V_1, V_2, \dots, V_k 满足条件:

- 1) 对于 $i \in \{1, 2, \dots, k\}, G[V_i]$ 是一个连通图;
- 2) 对于不同的整数 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, B(U_i, U_j)$ 中没有树状分支。

3 最小度数为 $n-2$ 的图中 CISTs 的棵数

假定图 G 中顶点的最小度数不小于 $n-2$, 即 $\delta(G) \geq n-2$ 。根据顶点度的不同, 顶点集合 $V(G)$ 可分为 $A = \{x | deg(x) = n-2\}$ 与 $B = V(G) - A = \{x | deg(x) = n-1\}$ 两类, 其中 $G[B]$ 可以看成是一个完全图。

当 $|A|=0$ 时, $\delta(G) = n-1$, 此时的图为完全图。 G 中存在 $\lfloor n/2 \rfloor$ 棵 CISTs^[8]。

当 $|A| \neq 0$ 时, $\delta(G) \geq n-2$, 此时可以得出以下结论。

定理 1 若最小度数为 $n-2$ 的图 G 中任意两个不同的顶点 x 和 y 满足 $xy \notin E(G)$, 则 $N(x) = N(y) = V(G) - \{x, y\}$ 。

证明: 因为 $xy \notin E(G)$, 即 x 与 y 之间不相连, 所以顶点 x 除了顶点 y 之外, 与图 G 所有点相连, 顶点 y 除了顶点 x 之外, 与图 G 所有顶点均相连, 因此, 易知 $N(x) = N(y) = V(G) - \{x, y\}$ 。

根据定理 1 的结论可以推出定理 2。

定理 2 假设 w, x 和 y 为最小度数为 $n-2$ 的图 G 中任意 3 个不同的顶点, 若 $xy \notin E(G)$, 则 $wx \in E(G)$ 且 $wy \in E(G)$ 。

根据定理 1 与定理 2 的结论, 可以推出定理 3。

定理 3 最小度数为 $n-2$ 的图 G 中任意 4 个不同的顶点 w, x, y 和 z , 若 $wz \notin E(G)$ 且 $xy \notin E(G)$, 则 $wx \in E(G)$, $wy \in E(G)$, $zx \in E(G)$, $zy \in E(G)$ 。

定理 4 在最小度数为 $n-2$ 的图 G 中, 若令顶点集合 $A = \{x | deg(x) = n-2 \text{ 且 } x \in V(G)\}$, 则 $|A|$ 是偶数。

证明: (反证法) 假设 $|A|$ 是奇数, 令图中顶点集合 $B = V(G) - A = \{x | deg(x) = n-1\}$ 。图 G 中总顶点个数 n 有奇偶两种情况。

情形 1 $n = 2t (t \geq 1, t \in N)$ 。因为 $|A|$ 是奇数, 则 $|B|$ 也是奇数。根据乘法规律: 奇数乘奇数得奇数, 偶数乘奇数得偶数, 偶数乘偶数得偶数。因此, $(n-2) \times |A|$ 是偶数, $(n-1) \times |B|$ 是奇数, 从而可以得出 $(n-2) \times |A| + (n-1) \times |B|$ 是奇数, 而 $(n-2) \times |A| + (n-1) \times |B| = 2 \times |E(G)|$ 是图 G 的总边数的两倍, 必是偶数, 从而得出矛盾。

情形 2 $n = 2t + 1 (t \in N)$ 。因为 $|A|$ 是奇数, 则 $|B|$ 也是偶数。因为 $(n-2) \times |A|$ 是奇数, $(n-1) \times |B|$ 是偶数, 从而可以得出 $(n-2) \times |A| + (n-1) \times |B|$ 是奇数, 而 $(n-2) \times |A| + (n-1) \times |B| = 2 \times |E(G)|$ 是图 G 的总边数的两倍, 必是偶数, 从而也得出矛盾。

综上所述, 假设不成立。因此, $|A|$ 是偶数。

根据定理 4, 将顶点集合 A 中的顶点编号为 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{2t}\} (t \geq 1, t \in N)$, 其中 $x_{2i-1}x_{2i} \notin E(G) (1 \leq i \leq t)$ 。

当图 G 中有 8 个度数为 $n-2$ 的顶点时(见图 1), 可以将其最多分成满足引理 1 的 3 部分(见图 2)。假设将 8 个顶点编号为 $\{x_1, x_2, \dots, x_8\}$ 。

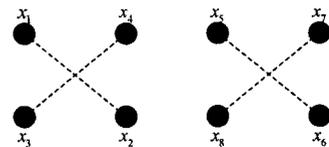


图 1 图中有 8 个度数为 $n-2$ 的顶点的情形

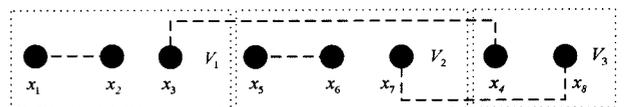


图 2 对图 1 的划分结果

图 1、图 2 中, 除虚线处不相连, 顶点之间两两相连。

根据定理 1 和定理 3, 将顶点集合 A 中的顶点按照主要存在形式划分为图 3 和图 4 两种。

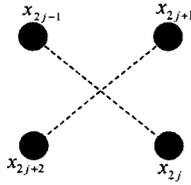


图 3 4 个度数为 $n-2$ 的点为一组的划分

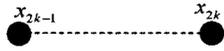


图 4 2 个度数为 $n-2$ 的点为一组的划分

在图 G 中, 若有图 3 形式的度数为 $n-2$ 的顶点的基本组合, 除顶点 x_{2j-1} 和 x_{2j} 不相连、顶点 x_{2j+1} 和 x_{2j+2} 不相连外, 顶点 $x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1}$ 和 x_{2j+2} 与图 G 中其他所有顶点均相连; 若有图 4 形式的度数为 $n-2$ 的顶点的基本组合, 除顶点 x_{2k-1} 和 x_{2k} 不相连, 顶点 x_{2k-1} 和 x_{2k} 分别与图 G 中其他所有顶点相连。

下面具体讨论最小度数为 $n-2$ 的图 G 。因为当顶点集合 $V(G)$ 中顶点的个数为 3 或者 4 时, 很明显顶点集合 $V(G)$ 已经无法分割, 此时最小独立生成树的最小棵数为 1, 所以这里限定 $n \geq 5$ 继续进行讨论。给定度数为 $n-2$ 的顶点的个数与度数为 $n-1$ 的顶点的个数, 求出存在 CISTs 的最小棵数。因为每 8 个度数为 $n-2$ 的顶点可以划分为 3 棵 CISTs, 所以顶点集合 A 的个数有 4 种情况: $|A| \in \{8p, 8p-2, 8p-4, 8p-6\} (p \geq 1, p \in N)$, 而 $|B|$ 主要有两种情况: $|B| \in \{2q, 2q+1\} (q \in N)$ 。

定理 5 令图 G 的最小顶点度数为 $n-2 (n \geq 5)$, G 中顶点分为 $A = \{x | \deg(x) = n-2\}$ 和 $B = \{x | \deg(x) = n-1\}$ 两类。记 $|B| \in \{2q, 2q+1\}$ 。那么, G 中存在 CISTs 的最小棵数情况如下:

$$\begin{cases} 3p+q, & |A|=8p, |B| \in N \\ 3p+q-1, & |A|=8p-2, |B| \in N \text{ 或} \\ & |A|=8p-4, |B|=2q+1 \\ 3p+q-2, & |A|=8p-4, |B|=2q \text{ 或} \\ & |A|=8p-6, |B|=2q+1 \\ 3p+q-3, & |A|=8p-6, |B|=2q \end{cases}$$

证明: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{2t}\} (t \geq 1, t \in N)$, 其中 $x_{2i-1}, x_{2i} \notin E(G) (1 \leq i \leq t)$, 其余顶点相互之间均相连; $B = \{y_1, y_2, \dots, y_q\} (q \geq 1, q \in N)$, 其中顶点相互之间均相连。

因为每 8 个度数为 $n-2$ 的顶点可以划分为 3 棵 CISTs, 所以根据顶点集合 A 中顶点的个数和顶点集合 B 中顶点的个数分情况讨论。

情形 1 $|A|=8p (p \geq 1, p \in N)$, 则 A 中顶点均以图 3 中的形式存在。将 A 中的顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p)$ 与 $V_{2p+j} = \{x_{8j-4}, x_{8j}\} (1 \leq j \leq p)$ 。

情形 1.1 $|B|=0$, 即此时 $q=0$ 。图 G 中的顶点均为 A 中的顶点, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p$ 棵 CISTs。

情形 1.2 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将 B 中的顶点划分为 $V_{3p+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q$ 棵 CISTs。

情形 1.3 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将 B 中的顶点划分为顶点集合 $V_{3m+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q-1)$ 与 $V_{3p+q} = \{y_{2q-1}, y_{2q}, y_{2q+1}\}$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q$ 棵 CISTs。

因此, 当 $|A|=8p (p \geq 1, p \in N)$ 时, 记 $|B| \in \{2q, 2q+1\} (q \geq 0, q \in N)$, 图 G 中至少存在 $3p+q$ 棵 CISTs。

情形 2 $|A|=8p-2 (p \geq 1, p \in N)$, 则 A 中有 $8p-4$ 个顶点以图 3 中的形式存在, 2 个顶点以图 4 中的形式存在。将 A 中的顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-1)$, $V_{2p+j-2} = \{x_{8j-12}, x_{8j-8}\} (2 \leq j \leq p)$ 与 $V_{3p-1} = \{x_{8p-4}, x_{8p-3}, x_{8p-2}\}$ 。

情形 2.1 $|B|=0$, 即此时 $q=0$ 。顶点均为 A 中的顶点, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p-1$ 棵 CISTs。

情形 2.2 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将 B 中的顶点划分为顶点集合 $V_{3p-1+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-1$ 棵 CISTs。

情形 2.3 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将 B 中的顶点划分为顶点集合 $V_{3p-1+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q-1)$, $V_{3p-1+q} = \{y_{2q-1}, y_{2q}, y_{2q+1}\}$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-1$ 棵 CISTs。

因此, 当 $|A|=8p-2 (p \geq 1, p \in N)$ 时, $|B| \in \{2q, 2q+1\} (q \geq 0, q \in N)$, 图 G 中至少存在 $3p+q-1$ 棵 CISTs。

情形 3 $|A|=8p-4 (p \geq 1, p \in N)$, 则 A 中有 $8p-4$ 个顶点均以图 3 中的形式存在。因为 $p=1$ 时, $|A|=4$; $p \geq 2$ 时, $|A|=8p-4 > 5$, 所以下面先就 p 的取值进行分类讨论。

情形 3.1 $p=1$ 。因 $|V(G)| \geq 5$ 且 $|A|=4$, 故 $|B| \geq 1$ 。

情形 3.1.1 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, V_2 = \{y_1, y_2, y_4\}$ 与 $V_{k+2} = \{y_{2k+1}, y_{2k+2}\} (1 \leq k \leq q-1)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $q+1$ 棵 CISTs。

情形 3.1.2 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, V_2 = \{x_4, y_{2q+1}\}$ 与 $V_{k+2} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $q+2$ 棵 CISTs。

情形 3.2 $p \geq 2$ 。

情形 3.2.1 $|B|=0$, 此时 $q=0$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-1)$, $V_{2p+k-3} = \{x_{8j-20}, x_{8j-16}\} (3 \leq j \leq p)$ 与 $V_{3p-2} = \{x_{8p-12}, x_{8p-8}, x_{8p-4}\}$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p-2$ 棵 CISTs。

情形 3.2.2 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-1)$, $V_{3p-2} = \{x_{8p-12}, x_{8p-8}, x_{8p-4}\}$ 与 $V_{3p-2+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-2$ 棵 CISTs。

情形 3.2.3 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-1)$, $V_{2p+k-2} = \{x_{8p-12}, x_{8j-8}\} (2 \leq j \leq p)$, $V_{3p-1} = \{x_{8p-4}, y_{2q+1}\}$ 与 $V_{3p-1+k} =$

- [11] CARDIERI P. Modeling interference in wireless ad hoc networks[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2010, 12(4): 551-572.
- [12] ZHOU Y, LIU J, ZHENG L. Link-utility-based cooperative MAC protocol for wireless multi-hop networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2011, 10(3): 995-1005.
- [13] MAO G. Research on wireless multi-hop networks; Current state and challenges [C] // 2012 International Conference on

Computing, Networking and Communications, 2012: 593-598.

- [14] CAI L X, CAI L, SHEN X. REX: A randomized exclusive region based scheduling scheme for mmWave WPANs with directional antenna[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, 9(1): 113-121.
- [15] LIU P, TAO Z F, NARAYANAN S. CoopMAC: A cooperative MAC for wireless LANs[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2007, 25(2): 340-354.

(上接第 96 页)

$\{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-1$ 棵 CISTs。

因此, 当 $|A|=8p-4 (p \geq 1, p \in N)$ 时, 若 $|B|=2q (q \geq 0, q \in N)$, 图 G 中至少存在 $3p+q-2$ 棵 CISTs; 若 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$, 图 G 中至少存在 $3p+q-1$ 棵 CISTs。

情形 4 $|A|=8p-6 (p \geq 1, p \in N)$, 则 A 中有 $8p-8$ 个顶点均以图 3 中的形式存在, 2 个顶点以图 4 中的形式存在。 $p=1$ 时, $|A|=8p-6=8 \times 1-6=2 < 5$; $p \geq 2$ 时, $|A|=8p-4 > 5$ 。下面就 p 的取值进行分类讨论。

情形 4.1 $p=1$ 。因 $|V(G)| \geq 5$ 且 $|A|=2$, 故 $|B| \geq 3$ 。

情形 4.1.1 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_1 = \{x_1, x_2, y_{2q}\}$, $V_2 = \{y_{2q-3}, y_{2q-2}, y_{2q-1}\}$ 与 $V_{k+2} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q-2)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 q 棵 CISTs。

情形 4.1.2 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_1 = \{x_1, x_2, y_{2q+1}\}$ 与 $V_{k+1} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $q+1$ 棵 CISTs。

情形 4.2 $p \geq 2$ 。

情形 4.2.1 $|B|=0$, 即此时 $q=0$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-2)$, $V_{2p+k-3} = \{x_{8j-20}, x_{8j-16}\} (3 \leq j \leq p)$ 与 $V_{3p-3} = \{x_{8p-12}, x_{8p-8}, x_{8p-7}, x_{8p-6}\}$ 。此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p-3$ 棵 CISTs。

情形 4.2.2 $|B|=2q (q \geq 1, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-2)$, $V_{2p+j-4} = \{x_{8j-20}, x_{8j-16}\} (3 \leq j \leq p)$, $V_{3p-3} = \{x_{8p-6}, x_{8p-7}, y_{2p-1}\}$, $V_{3p-2} = \{x_{8p-8}, x_{8p-12}, y_{2p}\}$ 与 $V_{3p-2+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q-1)$ 。此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-3$ 棵 CISTs。

情形 4.2.3 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 。可以将顶点划分为顶点集合 $V_i = \{x_{4i-3}, x_{4i-2}, x_{4i-1}\} (1 \leq i \leq 2p-2)$, $V_{2p+j-3} = \{x_{8j-12}, x_{8j-8}\} (2 \leq j \leq p)$, $V_{3p-2} = \{x_{8p-6}, x_{8p-7}, y_{2q+1}\}$ 与 $V_{3p-2+k} = \{y_{2k-1}, y_{2k}\} (1 \leq k \leq q)$, 此时划分的所有顶点集合满足引理 1, 所以图 G 中至少存在 $3p+q-2$ 棵 CISTs。

因此, 当 $|A|=8p-6 (p \geq 1, p \in N)$ 时, 若 $|B|=2q (q \geq 0, q \in N)$, 图 G 中至少存在 $3p+q-3$ 棵 CISTs; 若 $|B|=2q+1 (q \geq 0, q \in N)$ 时, 图 G 中至少存在 $3p+q-2$ 棵 CISTs。

结束语 本文讨论的对象为包含不少于 5 个顶点且最小度数为 $n-2 (n \geq 5)$ 的图 G , 若已知其度数为 $n-2$ 的顶点的

点的个数等于 $|A|$, 以及度数为 $n-1$ 的顶点的个数等于 $|B|$, 可以推导出图 $G(V)$ 所包含的完全独立生成树的最小棵数。顶点集合 A 的个数有 4 种情况: $|A| \in \{8p, 8p-2, 8p-4, 8p-6\} (p \geq 1, p \in N)$, 而 $|B|$ 主要有两种情况: $|B| \in \{2q, 2q+1\} (q \in N)$ 。具体图中完全独立生成树的最小棵数情况如下:

$$\begin{cases} 3p+q, & |A|=8p, |B| \in N \\ 3p+q-1, & |A|=8p-2, |B| \in N \text{ 或} \\ & |A|=8p-4, |B|=2q+1 \\ 3p+q-2, & |A|=8p-4, |B|=2q \text{ 或} \\ & |A|=8p-6, |B|=2q+1 \\ 3p+q-3, & |A|=8p-6, |B|=2q \end{cases}$$

由结论可以发现, 所寻找的完全独立生成树的最小棵数依赖于度数为 $n-2$ 的顶点的个数以及度数为 $n-1$ 的顶点的个数。Araki 证明了, 当图 G 的最小度数不小于 $n/2$ 时, 图 G 存在着 2 棵完全独立生成树。假设图 G 中的顶点度数至少为 $n-k (k \geq 3)$, 且已知图 G 中不同顶点度的顶点个数时, 是否可以判断图 $G(V)$ 所包含的完全独立生成树的棵数, 还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] CHANG H Y, WANG H L, YANG J S, et al. A note on the degree condition of completely independent spanning trees[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2015, 98(10): 2191-2193.
- [2] HSU L H, LN C K. Graph theory and interconnection networks [M]. CRC press, 2008.
- [3] HASUNUMA T. Completely independent spanning trees in the underlying graph of a linegraph[J]. Discrete Math., 2001, 234(1-3): 149-157.
- [4] HASUNUMA T. Completely independent spanning trees in maximal planar graphs[J]. Proceedings of 28th Graph Theoretic Concepts of Computer Science (WG2002), 2002, 2573: 235-245.
- [5] ARAKI T. Dirac's condition for completely independent spanning trees[J]. Graph Theor., 2014, 77(3): 171-179.
- [6] FAN G, HONG Y, LIU Q. Ore's condition for completely independent spanning trees[J]. Discrete Appl. Math., 2014, 177(177): 95-100.
- [7] ROSE K H. 离散数学及其应用(第七版)[M]. 徐六福, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2014: 552.
- [8] PAI K J, TANG S M, CHANG J M, et al. Completely independent spanning trees on complete graphs, complete bipartite graphs and complete tripartite graphs[M] // Advances in Intelligent Systems and Applications-Volume 1. Springer Berlin Heidelberg, 2013: 107-113.