

基于 Floyd 算法的多重最短路问题的改进算法

左秀峰 沈万杰

(北京理工大学管理与经济学院 北京 100081)

摘要 路径分析是网络分析最基本的问题,其核心是对最短路径的求解。Floyd 算法是一种求取最短路的经典算法。分析发现,两点间可能存在多条权重相同的最短路径,而这一点 Floyd 算法没有涉及。以无向联通图为研究对象,设计了基于 Floyd 求解多重等价最短路算法,并分析计算了一个实际算例。计算结果表明,基于 Floyd 的多重等价最短路算法可以有效解决多重等价最短路问题。

关键词 无向图, Floyd 算法, 多重等价最短路

中图分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.05.041

Improved Algorithm about Multi-shortest Path Problem Based on Floyd Algorithm

ZUO Xiu-feng SHEN Wan-jie

(School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract Find the shortest path is the core of the path analysis, which is the fundamental problem of the network analysis. Floyd algorithm is one of the most classical algorithms to solve the shortest path problem. Through analyzing practical problems, there maybe exist multiple shortest paths with the same weight that the Floyd algorithm are not addressed. This paper designed the multi-shortest paths algorithm for undirected graph based on Floyd algorithm and offered an example to exam the correctness of the algorithm. The experimental results show that the algorithm can effectively solve the problem of muti-shortest paths.

Keywords Undirected graph, Floyd algorithm, Muti-shortest path

1 概述

1.1 多重等价最短路问题的研究意义

最短路问题是图与网络技术研究中的一个经典问题,一直在路径规划、地理信息系统和通信等领域有着十分广泛的应用。对该问题的求解算法进行设计和改进有着重要的理论和应用价值。而在复杂图中,最短路可能不止存在一条,即存在多重等价最短路问题,而这种多重等价最短路问题的研究也具有实际意义,可以提供多种可行方案,为后续的决策扩大基础可行集。

本文重点研究多重等价最短路问题的求解,旨在设计一种可以求解无向联通图中所有顶点之间的所有等价最短路的算法,为动态决策提供多方案支持。

1.2 最短路问题的研究综述

对于最短路问题,1959 年 Dijkstra^[1]提出了一种单源最短路径的算法,该算法可求解从一个初始点到所有顶点的最短路;1962 年 Floyd^[2]给出了寻找给定加权图中任意两顶点之间最短路径的算法。

国内外对最短路问题的研究已经取得了显著的成果,且已经有了许多优化改进算法。例如, NICHOLSON 提出的

Dijkstra 正反交替搜索算法^[3-4], HART 和 NICHOLSON 提出的*启发式搜索算法^[5], GUTMAN 提出的 Reach 剪枝算法^[6]等;刘建美^[7]研究了基于改进的 Dijkstra 算法的动态最短路计算方法,张德全^[8]提出了 Floyd 加速算法及优化方法,林澜^[9]提出了动态网络最短路问题的复杂性近似算法,龙光正^[10]通过引入并行处理的概念提出了优化最短路算法,郑四发^[11]在研究复杂路网多客户最短路径时提出了扇面 Dijkstra 算法。通过分析发现,这些算法大多是基于 Dijkstra 算法进行改进的,对于 Floyd 算法的改进研究则相对较少。

现阶段,对多条最短路问题的研究可以分为两个方向:一种是严格的等价最短路算法,另一种是广义的 K 最短路(K Shortest Paths, KSP)算法研究。KSP 算法由 Hoffman^[12]首次提出,用于求解前 K 条最短路径,对该算法及应用的研究已经比较充分,徐涛^[13]已对此做了比较全面的总结。而对于严格多重等价最短路,只有少量学者进行了研究;王丽星^[14]对多条最短路径中存在的自回归现象进行了算法优化;王志坚^[15]通过修改临时标号法修正 Dijkstra 算法,得到最短路径图从而求得多重等价最短路;王树西^[16]也通过改进 Dijkstra 算法对多重最短路问题进行探讨。

现有的改进型算法在求解单一最短路问题已经具备很高

到稿日期:2016-04-14 返修日期:2016-07-30

左秀峰(1958—),男,博士,教授,主要研究方向为复杂系统建模与仿真, E-mail: zxf200303@bit.edu.cn; 沈万杰(1990—),男,硕士,主要研究方向为复杂系统建模与仿真, E-mail: shenwanjie@bit.edu.cn。

的效率。但是在管理决策、任务分配和GPS路径规划中也会遇到多重等价最短路问题,该方向的相关算法尚未成熟。在存在多重等价最短路情况下,尚没有学者基于Floyd进行算法研究,为此,本文将基于Floyd算法求解多重等价最短路问题。Floyd算法是一个动态规划算法,也是一种插值法,通过一个图的权值矩阵求出它的每两点间的最短路径矩阵。

2 多重等价最短路算法分析

图论中的图分无向图和有向图,其中无向图有良好的对称性,多数实际最短路问题都是以无向图为基础的。因此本文以无向图作为研究对象,并用邻接矩阵表示无向图。

2.1 传统Floyd算法描述

用 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 表示网络图的顶点;邻边的距离用权值 w_{ij} 来表示,如果两点之间没有邻边,则用无穷大表示;用 $D=(d_{ij})_{n \times n}$ 记录最短距离, d_{ij} 表示 v_i 到 v_j 的最短距离;引入 $R=(r_{ij})_{n \times n}$ 记录最短路径, r_{ij} 表示 v_i 到 v_j 要经过 r_{ij} 点。

从任意 v_i 到 v_j 的最短路径只有2种可能:1)直接从 v_i 到 v_j ;2)从 v_i 经过若干个节点到 v_j 。对于每个节点 v_k ,检查 $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$ 是否成立,若成立,则令 $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$,遍历完所有节点 v_k 后, d_{ij} 记录 v_i 到 v_j 的最短路径的距离。在更新 d_{ij} 的同时更新 r_{ij} ,则可以获得记录最短路径的矩阵 R ,通过 R 追溯获得任意两点间的最短路径。

2.2 基于Floyd多重等价最短路算法分析

最短路问题中往往存在多条等价最短路径,如图1所示, $v_1 \rightarrow v_5$ 存在多条等价最短路: $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5$, $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5$, $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$, $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5$, $v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$ 。这种情况下,则无法直接使用传统的Floyd算法求出所有等价最短路径,需要基于Floyd设计新的搜索算法。

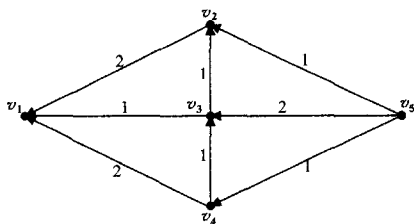


图1 多重等价路径图

在存在多重等价最短路的情况下,两点间的最短距离不会因路径条数而改变,因此最短距离矩阵 D 不变,只需重新设计求解 R 矩阵算法与寻找多条等价最短路径算法。由于存在多条等价最短路,需要将所有的等价点都记录在 R 中的元素中,因此 R 中嵌套的元素应该采用集合的形式,而且可以根据实际需要进行扩充。因此, R 中的 r_{ij} 元素是一个集合,表示从 v_i 到 v_j 的最短路径可以经过 r_{ij} 中的任意一个点,且路径长度相等。例如 $r_{ij} = \{1, 2\}$,则路径 $v_i \rightarrow v_1 \rightarrow v_j$ 与路径 $v_i \rightarrow v_2 \rightarrow v_j$ 的长度相等。

2.3 基于Floyd求多重等价最短路算法

设赋权无向图 $G=[V, W]$,其中 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集合, $W=(w_{ij})_{n \times n}$ 为 G 的邻接矩阵, w_{ij} 表示边 (v_i, v_j) 的权。求 G 中任意 v_i 到 v_j 间的最短距离和所有等价路径。等价最短路的算法包括最短路距离矩阵 D 和最短路径矩阵 R

的计算以及最短路搜索两部分。矩阵 D 和 R 的计算步骤如下。

(1) 赋初值

$$D^{(0)} = (d_{ij}^{(0)})_{n \times n} = W$$

$$R^{(0)} = (r_{ij}^{(0)})_{n \times n}, \text{其中 } r_{ij}^{(0)} = \{j\}.$$

(2) 对任意 $v_k \in V$,更新

$$D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})_{n \times n}$$

$$R^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})_{n \times n}$$

其中, $d_{ij}^{(k)}$ 表示从 v_i 到 v_j 的仅允许以 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 作为中间点的路径中最短路的长度, r_{ij} 表示从 v_i 到 v_j 的等价最短路所经过的点集。其更新计算如下:

$$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\}$$

$$r_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \{k\}, & \text{当 } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ r_{ij}^{(k-1)} \cup \{k\}, & \text{当 } d_{ij}^{(k-1)} = d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ r_{ij}^{(k-1)}, & \text{当 } d_{ij}^{(k-1)} < d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

(3) 最终得到最短路距离矩阵和路径矩阵:

$$D = D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})_{n \times n}$$

$$R = R^{(n)} = (r_{ij}^{(n)})_{n \times n}$$

当 v_k 被插入到任何两点间的最短路径时,与经典Floyd算法不同的是,如果路径 $v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_j$ 的长度与路径 $v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_j$ 的长度相等,则在原路径的基础上再添加一条经过 v_k 的等价路径,将 v_k 点添加在 R 中,而不仅仅是覆盖原路径。

基于 R 求 v_s 到 v_e 的所有等价最短路算法——由中间点集合 r_{se} 双向搜索算法如下。

(1) 初始化路径。分解 $R(s, e) = r_{se}$: $\text{MidP} = r_{se}$, $\text{len} = \| \text{MidP} \|$, $\text{NumSet} = [1, \text{len}]$, $\text{PathSet} = \{ \}$ 。

初始化路径的中间点集 PathSet : $\forall i \in \text{NumSet}, \text{PathSet} = \text{PathSet} \cup \{ \{ \text{MidP}(i) \} \}$ 。

(2) 对 PathSet 中每条路径 Pathk 进行后向搜索: $\forall \text{Pathk} \in \text{PathSet}, \text{MidP} = R(\text{Pathk}(\text{last}), e)$, $\text{numP} = \| \text{MidP} \|$, $\text{MidSet} = \{ \}$ 。

将 Pathk 分解成 NumP 个集合: $\forall i \in [1, \text{numP}], \text{MidSet} = \text{MidSet} \cup \{ \text{Pathk} \cup \{ \text{MidP}(i) \} \}$ 。

更新 PathSet : $\text{PathSet} = (\text{PathSet} \setminus \{ \text{Pathk} \}) \cup \text{MidSet}$, 直到 $\forall \text{Pathk}(\text{last}) = e$ 。

(3) 对 PathSet 中每条路径 Pathk 进行前向搜索: $\forall \text{Pathk} \in \text{PathSet}, \text{MidP} = R(\text{Pathk}(\text{first}), s)$, $\text{numP} = \| \text{MidP} \|$, $\text{MidSet} = \{ \}$ 。

将 Pathk 分解成 NumP 个集合: $\forall i \in [1, \text{numP}], \text{MidSet} = \text{MidSet} \cup \{ \{ \text{MidP}(i) \} \cup \text{Pathk} \}$ 。

更新 PathSet : $\text{PathSet} = (\text{PathSet} \setminus \{ \text{Pathk} \}) \cup \text{MidSet}$, 直到 $\forall \text{Pathk}(\text{first}) = s$ 。

(4) PathSet 就是 v_s 到 v_e 所有等价最短路径的集合。

注意,在寻找所有等价最短路时,上述算法中记录等价路径的存储结构不是无序的集合,而是有序的数据结构,用于表示路径的顺序。该数据存储结构可前后扩充,相邻两个元素不应该有重复值。

基于Floyd求多重等价最短路算法的本质是:在建立通过迭代更新距离矩阵 D 与路径矩阵 R 的基础上,通过 D 矩阵

推知任意两点之间的最短路径距离;通过 R 矩阵进行前向/后向追溯,求出所有等价最短路。无向图的正反双向路径权值相等,并且相互对称,因此可以从中间节点双向追溯起点和终点。

2.4 算法的时间复杂度

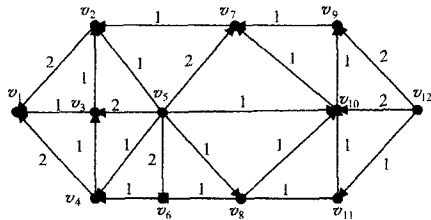
本算法是 Floyd 算法的改进,依附于 Floyd 算法的基本原理,所以该算法求解最短路径距离矩阵 R 和 D 的时间复杂度与 Floyd 算法的时间复杂度一致,都为 $O(n^3)$ 。

但是在寻找所有顶点间全部等价最短路问题时,与王树西^[16]所提及的改进 Dijkstra 算法有所区别;基于 Floyd 求多重等价最短路可以一次求解出 R ,对于后续最短路径的求解,只需通过遍历 R 矩阵的方式便可寻找剩余顶点之间的等价最短路,无需再对 W 矩阵进行计算更新。

对于有 n 个顶点的无向图,共有 $\frac{(n-1)n}{2}$ 对顶点,要求出所有顶点间的等价最短路,使用改进 Floyd 算法的时间复杂度为 $O(n^3)$;使用文献^[16]所提及的改进 Dijkstra 算法求解所有顶点间的等价最短路的时间复杂度为 $\frac{(n-1)n}{2}O(n^2) = O(n^4)$ 。因此,在求解所有顶点间等价最短路问题时,改进 Floyd 算法更为高效。

3 多重等价最短路实例分析

本节将使用该算法进行具体实例分析。如图 2 所示,图中的顶点为城市,边代表两个城市之间的联通关系,边上的权值即为距离,现在要为每一对可达的城市间设计一条公共汽车路线,要求线路的长度在有可能的方案里最短。



- 程与应用,2006,39(4):87-90.
- [6] ZHANG S H, OU J P. BP-PSO-based intelligent case retrieval method for high-rise structural form selection[J]. Science China Technological Sciences, 2013, 56(4): 940-944.
- [7] QU Z B, LIU Y J, XU X F. Discrete particle swarm optimization for solving WTA problem[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(3): 67-69. (in Chinese)
曲在滨,刘彦君,徐晓飞.用离散粒子群优化算法求解 WTA 问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(3): 67-69.
- [8] WANG B, LIU X L, HU L, et al. Antiship Missile Distribution Based on Improved Genetic Algorithm[J]. Fire Control & Command Control, 2015, 40(8): 90-93. (in Chinese)
王波,刘小利,胡亮,等.基于改进遗传算法的反舰导弹火力分配研究[J]. 火力指挥与控制, 2015, 40(8): 90-93.
- [9] WANG Y, LIU S Y, ZHANG W, et al. Intuitionistic fuzzy similarity measures reasoning method based on inclusion degrees[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(3): 494-500. (in Chinese)
王毅,刘三阳,张文,等.基于包含度的直觉模糊相似度量推理方法[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(3): 494-500.
- [10] WANG Y X, QIAN L J, GUO Z, et al. Weapon target assignment problem satisfying expected damage probabilities based on ant colony algorithm[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2008, 19(5): 939-944.
- [11] TAN G Z, BAO K, RICHARD MAINA R. A composite particle swarm algorithm for global optimization of multimodal functions[J]. Journal of Central South University, 2014, 21(5): 1871-1880.
- [12] CAO K, CHEN G H, JIANG H, et al. Guided Self-adaptive Evolutionary Genetic Algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2014, 36(8): 1884-1890. (in Chinese)
曹凯,陈国虎,江桦,等.自适应引导进化遗传算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(8): 1884-1890.
- [13] RUAN M Z, LI Q M, LIU T H. Modeling and optimization on Fleet Antiaircraft Firepower Allocation[J]. Acta Armamentarii, 2010, 31(11): 1525-1529. (in Chinese)
阮旻智,李庆民,刘天华.编队防空火力分配建模及其优化方法研究[J]. 兵工学报, 2010, 31(11): 1525-1529.
- [14] YE W, ZHU A H, OUYANG Z H, et al. Multi-UCAV Cooperation Mission Assignment Based on Hybrid Discrete Particle Swarm Optimization Algorithm[J]. Acta Armamentarii, 2010, 31(3): 331-336. (in Chinese)
叶文,朱爱红,欧阳中辉,等.基于混合离散粒子群算法的多无人作战飞机协同目标分配[J]. 兵工学报, 2010, 31(3): 331-336.

(上接第 234 页)

- [3] NICHOLSON T A J. Finding the shortest route between two points in a network[J]. Computer Journal, 1966, 9(3): 275-280.
- [4] DANTZIG G B. Linear Programming and Extensions[J]. Undergraduate Texts in Mathematics, 1963, 34(136): 242-243.
- [5] HART P E, NILSSON N J, RAPHAEL B. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths[J]. IEEE Transactions on Systems Science & Cybernetics, 1968, 4(2): 100-107.
- [6] GUTMAN R J. Reach-Based Routing: A New Approach to Shortest Path Algorithms Optimized for Road Networks[C]//Workshop on Algorithm Engineering & Experiments, 2004: 100-111.
- [7] LIU J M, MA S F, MA S Q. Computation method of the dynamic shortest path based on improved-Dijkstra algorithm[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(6): 1153-1157. (in Chinese).
刘建美,马寿峰,马帅奇.基于改进的 Dijkstra 算法的动态最短路径计算方法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(6): 1153-1157.
- [8] ZHANG D Q, WU G L, LIU D F. Accelerated and optimized method of Floyd algorithm to find out shortest path[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(17): 41-43, 46. (in Chinese)
张德全,吴果林,刘登峰.最短路径问题的 Floyd 加速算法与优化[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(17): 41-43, 46.
- [9] LIN L, YAN C G, JIANG C J, et al. Complexity and Approximate Algorithm of Shortest Paths in Dynamics Networks[J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(4): 608-614. (in Chinese)
林澜,闫春钢,蒋昌俊,等.动态网络最短路径问题的复杂性与近似算法[J]. 计算机学报, 2007, 30(4): 608-614.
- [10] LONG G Z, YANG J J. Improved Algorithm of Short-Cut[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(6): 106-108. (in Chinese)
龙光正,杨建军.改进的最短路算法[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(6): 106-108.
- [11] ZHENG S F, CAO J D, LIAN X M. Sector Dijkstra algorithm for shortest routes between customers in complex road networks[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology) 2009, 49(11): 1834-1837. (in Chinese)
郑四发,曹剑东,连小珉.复杂路网下多客户间最短路径的扇面 Dijkstra 算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2009, 49(11): 1834-1837.
- [12] HOFFMAN W, PAVLEY R. A Method for the Solution of the Nth Best Path Problem[J]. Journal of the ACM, 1959, 6(4): 506-514.
- [13] XU T, DING X L, LI J F. Review on K shortest paths algorithms[J]. Computer Engineering and Design, 2013, 34(11): 3900-3906. (in Chinese)
徐涛,丁晓璐,李建伏. K 最短路径算法综述[J]. 计算机工程与设计, 2013, 34(11): 3900-3906.
- [14] WANG L X, GAO W. Optimization on multiple shortest path algorithm[J]. Sci/Tech Information Development & Economy, 1999(2): 22-23. (in Chinese)
王丽星,郇巍.多条最短路径算法的优化[J]. 科技情报开发与经济, 1999(2): 22-23.
- [15] WANG Z J, HAN W Y, LI Y J. Shortest path problem with multiple shortest paths[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 42(9): 1428-1431. (in Chinese)
王志坚,韩伟一,李一军.具有多条最短路径的最短路问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(9): 1428-1431.
- [16] WANG S X, LI A Y. Multi-adjacent-vertexes an Multi-shortest-paths Problem of Dijkstra Algorithm[J]. Computer Science, 2014, 41(6): 217-224. (in Chinese)
王树西,李安渝. Dijkstra 算法中的多邻接点与多条最短路径问题[J]. 计算机科学, 2014, 41(6): 217-224.