具有还原性的多重多维模糊推理算法*)

何映思[1,2] 全海金[3] 邓辉文[1,2]
(西南大学计算机与信息科学学院 重庆 400715)[1] (西南大学逻辑与智能研究中心 重庆 400715)[2]
(西南大学数学与统计学院 重庆 400715)[3]

摘 要 Zadeh提出的CRI算法是模糊推理中运用最广泛的算法,但它不具还原性。王国俊教授提出的全蕴涵三I算法,以及已有的基于相似度的模糊推理算法是在单一规则下的模糊推理算法,在单一规则情形满足还原性条件。本文在给出多重多维模糊推理具有还原性的定义的基础上,先用例子说明,全蕴涵三I算法和已有的基于相似度的算法在多重多维推理的情况下不具有还原性,同时本文提出一种新的基于相似度的模糊推理算法,在多重多维推理时满足还原性条件。

关键词 模糊推理,CRI算法,三I算法,相似度,还原性

An Algorithm of General Fuzzy Inference with the Reductive Property

HE Ying-Si[1,2] QUAN Hai-Jin[3] DENG Hui-Wen[1,2]
(School of Computer & Information Science, Southwest University, Chongqing 400715)[1] (Logic and Intelligence Research Center, Southwest University, Chongqing 400715)[2] (School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715)[3]

Abstract Zadeh's CRI method is applied in fuzzy reasoning wildly, but it is not reductive. First examples are given to show that Wang Guojun's Triple I Method and other similarity-based fuzzy reasoning methods do not have the reductive property for multi-rules fuzzy inference. Then an algorithm are proposed of general fuzzy inference with the reductive property.

Keywords Fuzzy inference, CRI method, Triple I method, Similarity measure, Reductive property

1 引言

模糊推理是模糊逻辑及模糊控制的理论基础,一直受到模糊理论界的广泛关注。Zadeh 于 1975 年首先提出 CRI (Compositional Rule of Inference)算法[1],作为模糊推理的基本算法,获得了普遍的接受,并有许多学者对该算法进行了多种形式的推广。

由于CRI推理算法的逻辑语义不很清楚,王国俊教授[2]提出了模糊推理的全蕴涵三I算法。该算法的每一步推理都使用了蕴涵关系,在一定程度上解决了这个问题。但全蕴涵三I算法在多条模糊推理规则情形下不具有还原性。

基于蕴涵关系的推理算法,因涉及模糊关系矩阵的计算较复杂,于是一些学者又根据所给事实与规则前件的相似程度进行推理,提出了多种算法[3],但这些算法在多重多维的情形下仍不具有还原性。本文针对多条规则多个前提的一般情形下的模糊推理(即多重多维模糊推理)给出一种基于相似度的模糊推理算法,并举例说明了该算法具有还原性。

2 基本概念

2.1 模糊推理的一般形式

跟经典逻辑推理不同,由于模糊推理本身的特殊性,特别是应用在工程问题中时,都是考虑多条规则多个前提的模糊推理,所以本文主要考虑多重多维的模糊推理。

通常所指的模糊推理为模糊前向推理 FMP(Fuzzy Modus Ponens,又称为模糊分离规则或模糊取式)。模糊前向推理的一般形式如下:

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_{11} \text{ and } A_{12} \text{ and } \cdots \text{ and } A_{1m} \to B_1 \\ & \cdots\cdots \\ & A_{n1} \text{ and } A_{n2} \text{ and } \cdots \text{ and } A_{nm} \to B_n \\ \text{且给定} & A_1^* \text{ and } A_2^* \text{ and } \cdots \text{ and } A_m^* \\ \hline \text{求} & \qquad\qquad\qquad B^* \end{array} \tag{1}$$

对于一个模糊推理算法,有时候也讨论其模糊后向推理 FMT(Fuzzy Modus Tollens,又称为模糊拒式推理)的性质,FMT 的一般形式为:

$$\begin{array}{ll} \text{已知} & A_{11} \text{ and } A_{12} \text{ and } \cdots \text{ and } A_{1m} \to B_1 \\ & \cdots\cdots \\ & A_{n1} \text{ and } A_{n2} \text{ and } \cdots \text{ and } A_{nm} \to B_n \\ \text{且给定} & \qquad\qquad\qquad B^* \\ \hline \text{求} & A_1^* \text{ and } A_2^* \text{ and} \cdots \text{and} A_m^* \end{array} \tag{2}$$

这里 A_{ij} 与 A_j^* 分别是论域 X_j 上的模糊集($j=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n$),$B_i$ 与 B^* 是论域 Y 上的模糊集($i=1,2,\cdots,n$)。

注记 1 在本文的讨论中,均假定在规则库中,没有两条规则,其前件完全相同,而后件不同。否则,可以将这两条规则合并成一条。

2.2 模糊集合相似度的公理化定义

两个模糊集合的相似度是对两个模糊集彼此靠近程度的一种度量。

定义 2.1[4] 设 $S: F(X)\times F(X)\to[0,1]$如果满足

*)西南师范大学青年基金《模糊逻辑在智能控制中的应用研究》(SWNUQ2005012)资助。**何映思** 助教,从事模糊逻辑研究学。**全海金** 硕士,讲师,从事人工智能研究。**邓辉文** 博士后,教授,博士生导师,从事人工智能及其应用研究。

S_1：$S(A,A)=1,\forall A\in F(X)$；

S_2：$S(A,A^c)=0,\forall A\in P(X)$；

S_3：$\forall A,B,C,D\in F(X)$，如满足$\int_X|A(x)-B(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_X|C(x)-D(x)|\mathrm{d}x$，则有

$S(A,B)\leqslant S(C,D)$。特别地，若$A\subseteq B\subseteq C$，则$S(A,C)\leqslant\min\{S(A,B),S(B,C)\}$，就称$S$为$F(X)$上的一个相似度。

注记 2 对于S_1，我们做如下理解：$S(A,B)=1\Leftrightarrow A=B$。有的文献就用它取代$S_1$。

2.3 多重多维模糊推理算法的还原性定义

在模糊推理理论中，对于推理算法的优劣，目前尚没有公认的标准。但是，算法具有还原性是对算法的最基本的要求，这已成为诸多专家学者的共识，其基本定义可参见文[2，5]。下面引出多重情形下算法还原性的定义。

定义 2.2(多重多维情形下 FMP 问题的还原性) 一个模糊推理算法，在有多条多前提推理规则(1)的情形下，若对于$i,1\leqslant i\leqslant n$，能由$A_j^*=A_{ij}$推出$B^*=B_i(\forall j,1\leqslant j\leqslant m)$，则称该算法具有多重多维情形的 FMP 问题还原性。

定义 2.3(多重多维情形下 FMT 问题的还原性) 一个模糊推理算法，在有多条多前提推理规则(2)的情形下，若对于$i,1\leqslant i\leqslant n$，能由$B^*=B_i$推出$A_j^*=A_{ij}(\forall j,1\leqslant j\leqslant m)$，则称该算法具有多重多维情形的 FMT 问题还原性。

3 全蕴涵三 I 算法及其还原性讨论

由于传统 CRI 算法逻辑语义不清楚，王国俊教授提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法[2]。

最基本的模糊推理形式如下：

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A\to B\\ \underline{\text{且给定}\quad A^*} & \\ \text{求} & B^*\end{array}\tag{3}$$

其中，A,A^*是论域X上的模糊集，B,B^*是论域Y上的模糊集。要求式(3)中的解B^*是使得$A\to B$最大程度地支持$A^*\to B^*$，即

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))$$

对一切$x\in X$与$y\in Y$取得最大的可能值的$F(Y)$中的最小模糊集。

使用 FITA 法与 FATI 法[6]，具有多条规则的模糊推理(1)最后都可以归结为单一规则的模糊推理形式。但进一步研究发现，对于问题(1)，当$A_j^*=A_{ij}(j=1,2,\cdots,m;i=1,2,\cdots,n)$时，根据全蕴涵三 I 算法计算得到的$B^*$并不一定能等于$B_i$，即全蕴涵三 I 算法在多重多维情形下不具有 FMP 问题的还原性，下面将给出一个例子说明这个问题。

由于 FITA 法与 FATI 法在全蕴涵三 I 算法下等价，下面只讨论 FITA 法一种。由文[6]知，(1)式的 FITA 型解可表示为$B^*=\bigvee_{i=1}^{n}B_i^*$，这里$B_i^*$是

$$\begin{array}{ll}\text{已知} & A_{i1}\text{ and }A_{i2}\text{ and }\cdots\text{ and }A_{im}\to B_i\\ \underline{\text{且给定}\quad A_1^*\text{ and }A_2^*\text{ and }\cdots\text{ and }A_m^*} & \\ \text{求} & B_i^*\end{array}$$

的解，$B_i^*\in F(Y)(i=1,2,\cdots,n)$。

例 1 设$X_j=Y=[0,1]$，$A_{ij},B_i,A_j^*,B^*\in F(Y)$，$(i,j=1,2)$，其中

$$A_{11}(x_1)=\frac{1}{3}(3-x_1),A_{12}(x_2)=\frac{1}{3}(x_2+2),$$

$$B_1(y)=1-y,$$

$$A_{21}(x_1)=1-x_1,A_{22}(x_2)=1-\frac{1}{2}x_2,$$

$$B_2(y)=\frac{1}{2}(y+1),$$

$$A_1^*(x_1)=1-x_1,A_2^*(x_2)=1-\frac{1}{2}x_2。$$

假定只有两条模糊规则：

规则 1：若A_{11}且A_{12}，则B_1；规则 2：若A_{21}且A_{22}，则B_2。计算推理结论B^*。

解：蕴涵算子R_0与文[2]相同，即$R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ (1-a)\vee b, & a>b\end{cases}$。首先，根据规则 1 求出$B_1^*=(A_1^*\wedge A_2^*)\circ(A_{11}\wedge A_{12}\to B_1)=(A_1^*\circ(A_{11}\to B_1))\wedge(A_{12}\to B_1))$。根据文[2]的定理 1，基于前件$A_{11}$的推理结果的计算公式为：

$$\begin{aligned}B_{A_{11}}^*(y)&=(A_1^*\circ(A_{11}\to B_1))(y)\\&=\sup_{x_1\in E_y}[A_1^*(x_1)\wedge R_0(A_{11}(x_1),B_1(y))]\end{aligned}$$

其中$E_y=\{x_1\in[0,1]\mid 1-A_1^*(x_1)<R_0(A_{11}(x_1),B_1(y))\}$($E_y$的定义见文[2])。由此计算得，$B_{A_{11}}^*(y)=1-y$。

同理可得基于前件A_{12}的推理结果：

$$B_{A_{12}}^*(y)=A_2^*\circ(A_{12}\to B_1)=\begin{cases}1, & y\leqslant\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\vee(1-y), & y>\frac{1}{3}\end{cases}$$

由此可知$B_1^*(y)=B_{A_{11}}^*(y)\wedge B_{A_{12}}^*(y)=1-y$。

然后，根据规则 2 可得出$B_2^*(y)=\frac{1}{2}(y+1)$。故最终结果为

$$B^*(y)=B_1^*(y)\vee B_2^*(y)=\begin{cases}1-y, & y\leqslant\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}(y+1), & y>\frac{1}{3}\end{cases}$$

显然，有$B^*\neq B_2$。

4 基于相似度的模糊推理算法及其还原性讨论

4.1 已有相似度算法的还原性研究

很多学者已经注意到模糊推理算法具有还原性的重要意义，也提出了多种基于相似度推理的算法[3,7,8]，这些算法在简单情形或单一规则多维推理情形下是具有还原性的，但在多重多维情形下却不具有还原性，见下例。

例 2 用文[7]的算法计算例 1 中的推理结论B^*。

解：由文[7]知，计算采用的相似度函数可为：

$SM(A,B)=(1+\frac{1}{b-a}\int_a^b|A(u)-B(u)|\mathrm{d}u)^{-1}$，$U$为连续论域。

因此有

$$B_1^*=SM(A_{11},A_1^*)B_1\cap SM(A_{12},A_2^*)B_1=\frac{3}{4}(1-y),$$

$B_2^*=SM(A_{21},A_1^*)B_1\cap SM(A_{22},A_2^*)B_2=\frac{1}{2}(y+1)$或

$B_1^*=\min\{1,B_1/SM(A_{11},A_1^*)\}\cap\min\{1,B_1/SM(A_{12},A_2^*)\}=\begin{cases}1, & y<\frac{1}{13}\\ \frac{13}{12}(1-y), & y\geqslant\frac{1}{13}\end{cases}$

$B_2^*=\min\{1,B_1/SM(A_{21},A_1^*)\}\cap\min\{1,B_2/SM(A_{22},A_2^*)\}=\frac{1}{2}(y+1)$。

$$故\ B^*=B_1^*\cup B_2^*=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y), & y\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{1}{2}(y+1), & y>\frac{1}{5}\end{cases}\ 或\ B^*=B_1^*\cup B_2^*$$

$$=\begin{cases}1, & y<\frac{1}{13}\\ \frac{13}{12}(1-y), & \frac{1}{13}\leqslant y<\frac{7}{19}\\ \frac{1}{2}(y+1), & y\geqslant\frac{7}{19}\end{cases}$$

显然，$B^*\neq B_2$。

通过这个例子可以看出文[7]提出的相似度的模糊推理算法在多重多维的情形下也不具有还原性。事实上，其它的基于相似度的算法在多重多维的情形下也不具有还原性，限于篇幅，这里不再赘述。

4.2 一种新的基于相似度的模糊推理算法 FPATI

由上面的两个例子可以看出，已有的模糊推理算法不能保证(1)式的还原性。这是由于对同一条推理规则 A_{i1} and A_{i2} and $A_{im}\rightarrow B_i(1\leqslant i\leqslant n)$，各个推理前提对于推理结论所起的作用都是相同的，这显然是不太合理的。

下面就多重多维模糊推理情形，给出一种新的基于相似度模糊推理算法，该算法具有 FMP 还原性及在一定条件下具有 FMT 还原性。

为了使讨论更具有一般性，类似于文[7]，对每条规则给出一个可使用的阈值 $\tau_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\tau_i\in[0,1]$，用以判断该条规则是否可以启用。若可以启用，则激活规则(fire rule)。引入阈值后的模糊前向推理 FMP 的一般形式为：

$$\begin{array}{ll}已知 & A_{11}\ \text{and}\ A_{12}\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_{1m}\rightarrow B_1,\tau_1\\ & \cdots\cdots\\ & A_{n1}\ \text{and}\ A_{n2}\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_{nm}\rightarrow B_n,\tau_n\\ 且给定 & A_1^*\ \text{and}\ A_2^*\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_m^*\\ \hline 求 & B^*\end{array}\tag{5}$$

引入阈值的模糊后向推理 FMT 的一般形式为：

$$\begin{array}{ll}已知 & A_{11}\ \text{and}\ A_{12}\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_{1m}\rightarrow B_1,\tau_1\\ & \cdots\cdots\\ & A_{n1}\ \text{and}\ A_{n2}\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_{nm}\rightarrow B_n,\tau_n\\ 且给定 & B^*\\ \hline 求 & A_1^*\ \text{and}\ A_2^*\ \text{and}\cdots\text{and}\ A_m^*\end{array}\tag{6}$$

下面将给出用于求解式(5)的基于相似度的推理算法 FPATI，该算法是先分别基于各前件聚合再求交。

Step 1 首先计算每条规则的各前件与给定前提相应前件的相似度 $\alpha_{ij}=N(A_{ij},A_j^*)$，$i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m$。

设 π_i 表示第 i 条规则所求出的相似度的最小值，即 $\pi_i=\min(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{im})$。根据所考虑的阈值 τ_i，有结论：若 $\pi_i\geqslant\tau_i$，则该条规则被激活，反之，则该条规则将被禁止。

Step 2 假定第 i 条规则被触发，则按下面的方法计算基于此条规则的第 j 个前件推出的结论 B_{ij}^*。第一种方法：$B_{ij}^*=\alpha_{ij}B_i$(Reduction form)[3]；也可按第二种方法 $B_{ij}^*=\min\{1,B_i/\alpha_{ij}\}$(More or less form or Expansion form)[3]来计算所有的 B_{ij}^*。

Step 3 对于任意 j，$1\leqslant j\leqslant m$，考虑由所有被激活规则的第 j 个前件推出的结论适当加上权重后，再计算出它们的"并"集 B_j^*。权重中涉及到参数 β_j，其定义为 $\beta_j=\max\limits_{第i条规则被激活}(\alpha_{ij}\pi_i)$。

令 $I=\{i|$第 i 条规则被激活，且 $\alpha_{ij}\pi_i=\beta_j,1\leqslant i\leqslant n\}$，给 B_{ij}^* 加上权重 $\frac{1+\beta_j}{2}$，令

$$B'_{j1}=\bigcup_{i\in I}\frac{1+\beta_j}{2}B_{ij}^*$$

其余的由被激活规则第 j 个前件推出的结论 $B_{ij}^*(i\notin I)$ 加上权重 $\frac{1-\beta_j}{2}$，令

$$B'_{j2}=\bigcup_{第i条规则激活且i\notin I}\frac{1-\beta_j}{2}B_{ij}^*$$

最后算出基于第 j 个前件的推理结果为：

$$B_j^*=B'_{j1}\cup B'_{j2}\tag{7}$$

Step 4 所有规则的最终推出的结论为这些 B_j^* 的交：

$$B^*=\bigcap_{j=1}^{m}B_j^*,(8)$$

其中"$\cap$"表示取交运算。

例 3 用我们提出的多重多维模糊推理算法计算例 1 的推理结果 B^*。设阈值 $\tau_1=0.5$，$\tau_2=0.7$。

解：本例中计算采用的相似度函数[9]为

$N_H(A,B)=(1-\frac{1}{b-a}\int_a^b|A(u)-B(u)|\mathrm{d}u)$，$U$ 为连续论域。

(1)计算相似度：$\alpha_{11}=\frac{2}{3}$，$\alpha_{12}=\frac{11}{12}$；$\alpha_{21}=1$，$\alpha_{22}=1$。

$\pi_1=\frac{2}{3}>\tau_1$，$\pi_2=1>\tau_2$，两条规则都被激活。

(2)按第二种方法计算 B_{11}^*、B_{12}^*、B_{21}^* 和 B_{22}^*：

$B_{11}^*=\frac{2}{3}(1-y)$，$B_{21}^*=\frac{1}{2}(y+1)$，

$B_{12}^*=\frac{11}{12}(1-y)$，$B_{22}^*=\frac{1}{2}(y+1)$。

(3)计算 $B_j^*(j=1,2)$：$\beta_1=\alpha_{21}\pi_2=1$，故 $B_1^*=\frac{1+\beta_1}{2}B_{21}^*\cup\frac{1-\beta_1}{2}B_{11}^*=\frac{1}{2}(y+1)$，

$\beta_2=\alpha_{22}\pi_2=1$，故 $B_2^*=\frac{1+\beta_2}{2}B_{22}^*\cup\frac{1-\beta_2}{2}B_{12}^*=\frac{1}{2}(y+1)$。

(4)最终结果 $B^*=B_1^*\cap B_2^*=\frac{1}{2}(z+1)=B_2$。

4.3 算法合理性讨论

将现有相似度算法与本文新的相似度算法比较后发现，对于原有的相似度算法，在多重多维的情形下，若各条规则求得的相似度最小值不变，则无论前件怎样变化，所得结论都不会改变，即结论对前件变化不敏感。这是因为在这些算法中，只有相似度最小的前件参与了结论的聚合，所以导致结论对前件变化不敏感。而对于本文提出的算法，各条规则的所有前件都参与了结论的聚合，所以只要前件有变化，都能引起结论的变化。

在本文的算法中，考虑到前件 A_{ij} 与 A_j^* 相似度最大的规则应该对推理结果最起作用，而前件 A_{ij} 与 A_j^* 相似度小的规则对推理结果起的作用应小于前件与 A_j^* 相似度大的规则，则推理结果聚合时要根据相似度大小对推理结果加权，相似度最大的前件，其对应结果的权值也是最大的：$\frac{1+\beta_j}{2}$；相似度较小的前件，其对应结果的权值也应较小：$\frac{1-\beta_j}{2}$。这样的聚合方法比以往算法单纯取并要合理得多。并且根据前提中相似度的不同使得不同的规则，对推理结果所起的轻重作用

也不同,下面证明对于 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,当 $A_j^*=A_{ij}(\forall j, j=1,2,\cdots,m)$时,推理结果 B^* 等于 B_i。

4.5 小结

本算法与已有算法有以下不同:

(1)已有算法只研究了单条规则的模糊推理且只满足单条规则的还原性,而对多重多维的情况未作详细讨论。本文给出的是多重多维情形下的推理算法,在多重多维情形下都具有还原性。

(2)提出的算法的推理机制与已有模糊推理算法不同。本文的算法既不同于 FATI,也不同于 FITA(参见文[6])。

(3)已有算法一般默认规则前件中的各前件对于规则后件的重要性是一样的,但在实际应用中却并非如此。故若考虑规则前件中的各前件对于规则后件的重要性,算法中还应对各前件加权。对于后件影响大的前件其权值也应该大,则各前件对后件的综合影响程度 θ 可视为其与给定条件前件的相似度 N 和其权值 w 的乘积,即 $\theta=wN$,则其相应推理结果为 $B^*=\min\{1,B/\theta\}$或 $B^*=\theta B$。

(4)已有的基于相似度的算法[3]中,相似度的计算方法往往是固定的,而本算法中相似度的计算方法却可以是任意的,只要满足相似度定义即可。算法在使用时可以根据需要选择不同的相似度,这样使算法更具有灵活性。

结论 本文得到了一种新的模糊推理算法 FPATI,并举例说明了这种算法在多重多维推理的情况下,满足还原性条件,保证了推理结果的合理性。当然,算法的还原性还需要进一步完整的证明。另外,我们还可以类似于文[10]考虑各条规则的置信度因子以及对推理前件进行加权,以期更充分地反映各规则的客观性,这些都是今后工作研究的一个内容。

参考文献

1 Zadeh L A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, part1-3 . Inform. Science, 1975(8): 199~249,301~357, 1975(9):43~80

2 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法. 中国科学(E辑),1999, 29(1):43~53

3 Yeung D S, Tsang E C C. A comparative study on similarity-based fuzzy reasoning methods. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, PartB: Cybernetics, 1997,27(2):216~227

4 林宗振. σ模糊度、σ相似度及σ距离. 暨南大学学报(自然科学版),2002,23(3):8~14

5 裴道武. FMT问题的两种三I算法及其还原性. 模糊系统与数学,2001,15(4):1~7

6 王国俊. 模糊推理的一个新方法. 模糊系统与数学,1999,13(3):1~10

7 Tursken I B, Zhong Zhao. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 1988,18(6):1049~1056

8 Chen S M. A new approach to handling fuzzy decision-making problems. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, 1988,18(6):1012~1016

9 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海:上海科技出版社,1983

10 何新贵. 加权模糊逻辑及其广泛应用. 计算机学报,1989,21(6):458~464