

一种求解函数优化问题的新算法^{*}

高汉平^{1,2} 康立山¹ 陈毓屏¹(武汉大学软件工程国家重点实验室 武汉430072)¹ (黄冈师范学院计算机系 黄冈438000)²

A New Algorithm for Solving Function Optimization Problem

GAO Han-Ping^{1,2} KANG Li-Shan¹ CHEN Min-Ping¹(State Key Lab of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072)¹(Computer Department, Huanggang Normal College, Huanggang 438000)²

Abstract For overcoming the weakness of the population climbing evolutionary algorithm, we design a new algorithm that randomly chooses many parents from the population to recombine and the worse individuals to mutate so as to decrease the size of population, accelerate the convergence rate and improve the performance. The results of numerical experiments including seven non-linear optimization problems show that the new algorithm is characteristic of robust and high efficiency, and can quickly find the global solutions which are better than those got by MATLAB and other methods.

Keywords Genetic algorithm, Biological evolution, Function optimization

1. 引言

遗传算法的基本思想来源于达尔文(Darwin)的进化论和门德尔(Mendel)的遗传学说。达尔文的进化论认为:每一物种在不断的发展过程中越来越适应环境,在个体的生存与发展中那些适应环境的个体则被保留下来,体现了“适者生存”的原理。与此相应,门德尔的遗传学说则认为:遗传是作为一种指令码封装在每个细胞中,并以基因的形式包含在染色体中。通过基因杂交和基因突变可产生对环境适应强的后代,并通过优胜劣汰的自然选择,适应值高的基因则被保留下来。

霍兰德(Holland)等人正是综合了上述两种学说的基本思想,创立了遗传算法。遗传算法是一种基于自然选择和群体遗传机理的搜索算法,它模拟了自然遗传过程中发生的繁殖、交配和突变现象。它将每个可能的解看作是群体中的一个个体,并将每个个体编码成字符串形式,根据预定的目标函数对每个个体进行评价,给出一个适合度值。开始时总是随机地产生一些个体(即候选解),然后根据这些个体使用遗传算子(选择、杂交、交叉)进行重新组合,得到一群新的个体。这一群新的个体由于继承了上一代的一些优良特性,因而明显优于上一代,这样逐步朝着更优解的方向进化。

遗传算法是一种广泛用于求解最优化问题^[1]的算法,它通过模拟生物进化的过程来寻求问题的最优解。作为求最优解的优化算法,遗传算法具有对目标函数要求低、简单、通用等优点。因此,它在许多领域得到了广泛的应用^[2,3],并已形成了一套较为完整的算法体系。但是,仍有许多问题需要改进,如遗传算法存在群体爬山能力弱,收敛速度缓慢等不足。本文针对遗传算法存在上述的不足,提出一种随机地从群体中挑选多个父体进行杂交和按较差个体进行变异的新算法。通过实验验证,证实该算法群体爬山能力强,收敛速度快,且明显

优于目前著名的数学计算软件 MATLAB 计算的结果。

2. 新算法的描述

本文针对遗传算法存在群体爬山能力差的弱点,以及在进化的过程中收敛速度缓慢等现象,在求解不等式约束条件下的函数优化问题时提出了一种基于多父体杂交和按排序的优劣对较差个体进行顺序变异的改进策略,从而增强了演化算法的群体爬山能力,加快了收敛速度,提高了搜索效率,能快速获得全局最优解。改进算法如下:

对于求解不等式约束下的函数优化的问题:

求 $x^* \in S$ 使得 $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S, S = \{x \in D | g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, l\}, D = \{x \in R^n | l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。提出了如下演化算法:用逻辑函数 $\text{better}(x_1, x_2)$ 表示测试点 x_1 优于测试点 x_2 :

$$\text{记 } h_i(x) = \begin{cases} 0, & g_i(x) \leq 0 \\ g_i(x), & g_i(x) > 0 \end{cases}$$

$$H(X) = \sum_{i=1}^m h_i(x),$$

$$\text{定义: } \text{better}(x_1, x_2) = \begin{cases} H(x_1) < H(x_2), & \text{true} \\ H(x_1) > H(x_2), & \text{false} \\ H(x_1) = H(x_2) \cap f(x_1) \leq f(x_2), & \text{true} \\ H(x_1) = H(x_2) \cap f(x_1) > f(x_2), & \text{false} \end{cases}$$

记 M 个测试点(即 M 个 n 维向量) $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T, i = 1, 2, \dots, M$ 。以 M 个测试点(向量)所张成的子空间 $V = \{x | x \in D, x = \sum_{i=1}^M a_i x_i\}$ 作为搜索子空间,其中 a_i 满足条件 $\sum_{i=1}^M a_i = 1, -0.5 \leq a_i \leq 1.5$ 。

新算法的求解步骤如下:

1) 参数设置:最大代数 N_{gen} , 群体规模 N , 杂交个体数 M , 变异概率 P_m ;

^{*} 本课题得到国家自然科学基金资助(编号:60133010, 60073043, 70671042)。高汉平 副教授,主要从事计算机软件和计算机科学理论、演化计算的研究。康立山 教授,博士生导师,主要研究方向为计算机科学理论、并行计算、演化计算。陈毓屏 副教授,主要研究方向为计算机软件和计算机科学理论、并行计算、演化计算。

2) $t:=0$; 随机初始化种群 $P(t)=(x_1, x_2, \dots, x_N), x_i \in S$;
 3) 计算当前群体中每个个体的适应值 $f(x_i), (i=1, 2, \dots, N)$; 并选出最好个体 X_{best} 和最差个体 X_{worst} , 使得 $\forall x \in S, \text{better}(X_{best}, x)$ 和 $\text{better}(x, X_{worst})$ 成立;

4) if $(t > N_{gen})$ then 转到6) else 执行下列步骤:

① 从 $P(t)$ 中随机选取

$X'_1, x'_2, \dots, x'_{m-1}$ 和 X_{best} 共 M 个点进行杂交, 计算 $\bar{x} = \sum_{i=1}^m a_i x'_i, \bar{x} \in S$; // 多父体杂交, 其中 $\sum_{i=1}^m a_i = 1, -0.5 \leq a_i \leq 1.5$;

② if $\text{better}(\bar{x}, X_{worst})$ then $X_{worst} := \bar{x}$;

③ 重新计算每个个体适应值并排序;

④ 将适应值最差的 h 个个体按公式(1)进行非均匀变异操作 ($x_i \in S, j=1, 2, \dots, h$), 组成新一代群体;

5) $t:=t+1$, 返回3);

6) 输出最优解, 终止算法。

其中: X_{best} 和 X_{worst} 分别表示从 N 个个体适应值中选取最好和最差个体, 而 $X_{worst} := \bar{x}$ 表示用杂交后的个体 $\bar{x}$ 替代最差个体 X_{worst} 。上述算法中: 非均匀变异策略是由随机数 $r = \text{random}(0, 1)$, 作如下运算:

当 $r \leq 0.5$ 时:

$$x'_{ij} = x_{ij} + \Delta(t, (\tilde{x}_j - x_{ij}))$$

当 $0.5 < r$ 时:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \Delta(t, (x_{ij} - \hat{x}_j)) \quad (1)$$

其中: $\tilde{x}$ 和 $\hat{x}$ 分别表示第 j 个变量的上下界, x'_{ij} 为变异后的变量值, 而函数 $\Delta(t, y)$ 返回一个在区间 $[0, y]$ 里的值。于是随着 t 的增加 (t 为代数), $\Delta(t, y)$ 靠近0的概率就会增加。这种性质使算子初期可均匀地在解空间中搜索 (当 t 很小时), 而后期则具有局部搜索性质。我们使用下面的函数:

$$\Delta(t, y) = y * r * (1 - t / N_{gen})^b$$

其中 N_{gen} 为最大代数, b 为确定非均匀度的系数 $b \in [2, 7]$ 。

3. 数值试验

我们对新算法进行了数值实验, 其中5例与文[4, 5]中用计算软件 MATLAB 计算的结果进行了比较, 其他2例与文[6~8]中的结果进行了比较。

例1 求解下面二次规划问题

$$\min f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_2 - 6x_2$$

$$\text{服从约束条件} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

文[4]用 MATLAB 计算的结果: 当点 $x^* = (0.6667, 1.3333)$ 时, 最优解: $f_1(x_1, x_2) = -8.2222$

例2 求解下面无约束多元函数最小值

$$\min f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^2 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

文[4]用 MATLAB 计算的结果: 当点 $x^* = (1.0016, 0.8335)$ 时, 最优解: $f_2(x_1, x_2) = -3.324088$

例3 求解一元函数在区间 $(0, 1)$ 内的最小值

$$\min f_3(x) = \frac{x^3 + \cos x + x \log x}{e^x}$$

文[4]用 MATLAB 计算的结果: 当点 $x^* = 0.5223$, 最优解: $f_3(x^*) = 0.3974$

例4 求解具有边界约束的优化问题

$$\min f_4(x_1, x_2) = (4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)e^{x_1}$$

$$\text{服从约束条件:} \begin{cases} 1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1x_2 - 10 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

文[5]用 MATLAB 计算的结果: 当点 $x^* = (0, 1.5)$ 时, 最优解: $f_4(x_1, x_2) = 8.5$

例5 求解不等式约束下的非线性规划优化问题

$$\min f_5(x_1, x_2) = (4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)e^{x_1}$$

$$\text{服从约束条件:} \begin{cases} 1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ -x_1x_2 - 10 \leq 0 \end{cases}$$

文[5]用 MATLAB 计算的结果: 当点 $x^* = (-9.5474, 1.0474)$ 时, 最优解: $f_5(x_1, x_2) = 0.0236$

我们用实数编码对上述5个算例各进行了10次计算。计算时, 算法中的参数 M 均取10, N_{gen} 的值随问题不同而不同。对于每个问题的10次计算结果都十分一致, 这表明新算法性能稳定。而且计算结果或达到最优解或优于文[4, 5]中的结果。计算结果见表1。

表1 新算法对5个函数计算结果的比较

函数	MATLAB 计算结果	新算法计算结果
Min $f_1(x_1, x_2)$	$X^* = (0.6667, 1.3333)$ $f_1(x^*) = -8.2222$	$X^* = (0.6666667, 1.3333333)$ $f_1(X^*) = -8.222223$
Min $f_2(x_1, x_2)$	$x^* = (1.0016, 0.8335)$ $f_2(x^*) = -3.324088$	$x^* = (1.001558, 0.833451)$ $f_2(x^*) = -3.324089$
Min $f_3(x)$	$x^* = 0.5223$ $f_3(x^*) = 0.3974$	$x^* = 0.522245$ $f_3(x^*) = 0.397363$
Min $f_4(x_1, x_2)$	$X^* = (0, 1.5)$ $F_4(x^*) = 8.5$	$X^* = (0, 1.5)$ $F_4(x^*) = 8.5$
Min $f_5(x_1, x_2)$	$X^* = (-9.5474, 1.0474)$ $F_5(x^*) = 0.0236$	$X^* = (-9.547368, 1.047406)$ $F_5 = 0.023551$

由于文[4, 5]中的算例都很简单, 为了表明新算法的优越性, 现用另外两个测试问题进行数值试验。

例6 Michalewicz 提出的优化问题^[6]:

$$\text{Maximize } f_6(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$$

$$-3.0 \leq x_1 \leq 12.1, 4.1 \leq x_2 \leq 5.8$$

文[6]用二进制编码遗传算法, 他给出的最优解是: 当点 $x^* = (9.623693, 4.427881)$ 时, 最优解: $f_6(x^*) = 35.477938$; 而文[7]中对此题用实数编码遗传算法, 最优解是: 当点 $x^* = (11.631407, 5.724824)$ 时, 最优解: $f_6(x^*) = 38.818208$; 我们用新算法得到的最优解是: 当点 $x^* = (11.625545, 5.7250440)$ 时, 最优解: $f_6(x^*) = 38.850294$; 结果明显优于文[6, 7]的计算结果。

例7 最近(2001年)文[8]给出的优化问题:

$$\text{Maximize } f_7(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(29\pi x_2)$$

$$-3.0 \leq x_1 \leq 12.1, 4.1 \leq x_2 \leq 5.8$$

该文利用目标函数梯度的遗传算法, 三次计算的结果分别为: 38.86, 38.84, 38.85; 计算的最优解为: $f_7(x_1, x_2) = 38.86$ 。我们的新算法运行十次, 每次都得到最优解: 当点 $x^* = (11.625545, 5.741400)$ 时, 最优解: $f_7(x^*) = 38.866662$; 显然优于文[8]的结果。

(下转第69页)

由于主干网络为以太网,40%以上的利用率严重影响到网络的性能,是什么原因造成网络利用率的增加呢?网络管理人员首先使用规程分析仪对网络流量进行测量,如图3所示。

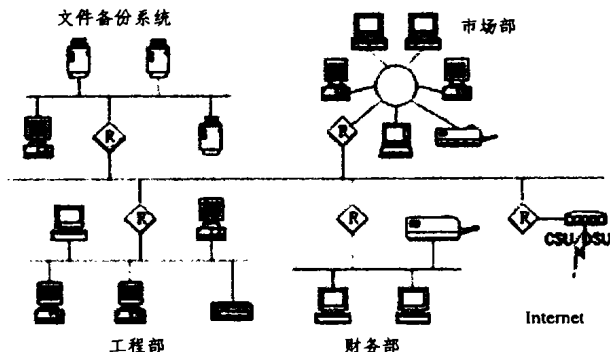


图2 某单位的计算机局域网拓扑结构图

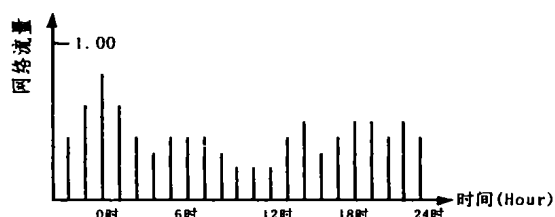


图3 平均流量/小时数据图(归一化)

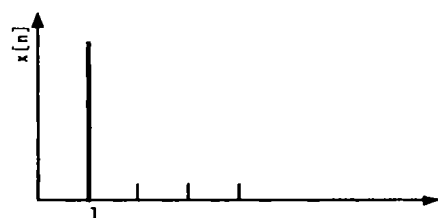


图4 离散 Fourier 变换(DFT)后

然后,经过本文提出的基于离散 Fourier 变换的通信网可靠性数据挖掘算法模型对网络流量进行离散 Fourier 变换,得出如图4所示的图形数据,直观地表现了网络流量在夜晚12时左右产生了突变。再用规程分析仪进一步查看 TCP/IP 协议帧,结果发现在夜晚12时左右 TCP/IP 协议帧大大增

加,再测 TCP/IP 协议帧中上层应用 FTP、Telnet、DNS、SNMP 等所占的比率,结果发现,FTP 数据帧增加。问题出在使用 TCP/IP 协议的工程部。再使用规程分析仪所具有的 Top Talkers 测量功能。Top Talkers 测量功能能够显示同一时期发送和接收数据量最大的信息点。从以往 Top Talkers 表格显示的图形可以看出,占据 Top Talkers 前几位、处于高 Fps 群的是夜间进行数据备份的几个信息点,而本月的 Top Talkers 表格显示,处于高 Fps 群的信息点增加了。通过 Top Talkers 表格,网络管理人员很快找到了引起网络流量发生变化的信息点。通过走访工程部,网络管理人员了解到工程部新增了一个工作组,该工作组与远程小组有大量的共享文件传输,导致网络拥塞。网管人员查看24小时网络利用率图形后,指定了一个利用率较低的时间段供该小组进行每天一次的远程集中传输。就这样,网管人员使用本文模型和规程分析仪在网络故障发生前消除了网络的隐患。

结束语 本文提出了基于离散 Fourier 变换理论的数据挖掘算法模型,利用该数据挖掘模型对通信网络可靠性运行与维护数据指标进行分析,因此,这一算法模型的提出是具有现实意义与价值的,为通信网络管理者提供了一个分析评价通信网络可靠性的理论依据和实用方法,促进了通信网络可靠性管理工作的完善和提高,推动通信网络可靠性管理理论的研究与完善。随着数据挖掘技术的发展与成熟、完善,对于数据信息突变时的分析与挖掘越来越有着重要的意义。

参考文献

- 1 熊蔚明,刘有恒.关于通信网可靠性的研究进展.通信学报,1990,11(4):43~49
- 2 刘有恒.通信网可靠性研究的新进展.通信学报,1990,11(4):43~49
- 3 梁雄健.国家自然科学基金申请报告-通信网可靠性的评价理论、方法和管理(NO.79870069).1999
- 4 梁雄健.电信网可靠性及突发故障管理.电信软科学研究,2000,10(10):5~13
- 5 Zhou Zhongding, Liang Xiongjian. A Synthetic Evaluation Methodology Based on Neural Networks For Reliability Indexes of Communication Networks. In: Proc. of ICII'2001. Beijing, China
- 6 Oppenheim A V, Schafer R W. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall, Inc. 1998

(上接第81页)

结束语 在考察了遗传算法后,本文提出了基于多父体杂交和按排序的优劣对较差个体进行非均匀变异的改进策略的新算法。通过对5个算例测试并与数学计算软件 MATLAB 计算的结果相比,新算法计算结果得到最优解或优于用 MATLAB 得到的最好解;其余2个算例优于文[6~8]中计算的结果。计算结果表明:新算法具有通用,精确,稳健,高效等特点,是求解函数优化问题的一种较好的算法。

参考文献

- 1 Michalewicz Z. Genetic Algorithm + Data Structures = Evolutionary Programms[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- 2 Michalewicz Z, Schoenauer M. Evolutionary algorithms for con-

strained parameter optimization problems [J]. Evolutionary computation, 1996, 4(1): 1~32

- 3 刘勇,康立山,陈毓屏著.非数值并行算法——遗传算法[M].北京:科学出版社,1995
- 4 蒲俊,吉家锋,伊良忠编著. MATLAB6.0 数学手册[M].上海:浦东电子出版社,2002. 176~200
- 5 杜藏,骆源编著.科学计算语言 MATLAB 简明教程[M].天津:南开大学出版社,1998. 20~33
- 6 [美]z. 米凯利维茨著.演化程序——遗传算法和数据编码[M].周家驹,何险峰译.北京:科学出版社,2000. 24~33
- 7 [日]玄光男,程伟著.遗传算法与程序设计[M].汪定伟,唐加福,黄敏译.北京:科学出版社,2000. 5~11, 100~200
- 8 何新贵,梁久桢.利用目标函数梯度的遗传算法[J].软件学报,2001,12(7):981~986