

粗糙蕴涵<sup>\*</sup>薛占熬<sup>1,2</sup> 何华灿<sup>1</sup>(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)<sup>1</sup>(河南师范大学计算机科学系 河南新乡453002)<sup>2</sup>

## Rough Implication

XUE Zhan-Ao HE Hua-Can

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)<sup>1</sup>(Department of Computer Science, Henan Normal University, Xinxiang 453002)<sup>2</sup>

**Abstract** Rough implication operator is the emphasis and difficulty in the study of rough logic. Due to the shortage of rough implication in [3]~[5], we redefine rough set and rough implication operator by Stone algebra, and introduce new rough operators such as rough intersection, rough union, and rough complement. Moreover the characteristics of the proposed rough implication are investigated, and we also point out that the proposed implication operation is superior to that of three-valued Lukasiewicz logic.

**Keywords** Rough logic, Rough implication operator, Approximation spaces, Atone algebra

## 1. 引言

粗糙集理论(rough set theory)是波兰 Z. Pawlak 教授于 1982 年提出的<sup>[1]</sup>, 1991 年 Z. Pawlak 的专著《Rough Sets—Theoretical Aspects of Reasoning about Data》的问世<sup>[2]</sup>, 标志着粗糙集理论及研究进入了活跃时期。它在不完整数据, 不精确知识的表达、学习、归纳、推理等方面有着广泛的应用。粗糙集理论的研究已经成为计算机科学中的一个热门课题<sup>[1~11]</sup>。由于粗糙逻辑(Rough Logic)是智能信息处理和海量知识挖掘的重要工具, 因此粗糙逻辑的研究引起了广泛的关注, 成为一个较活跃的研究方向。虽然有关粗糙逻辑的研究已有不少成果, 但是, 所定义的粗糙蕴涵算子(Rough Implication Operator)存在不少缺点, 如在文[3]、[5]中“ $A \rightarrow A$ ”都不是定理。而在文[4]中所定义的粗糙蕴涵算子, 不能推出经常使用的  $A \rightarrow \Phi \approx A'$  和  $B' \rightarrow A' \approx A \rightarrow B$ 。用代数的观点研究蕴涵算子是一个较活跃的方向<sup>[4,6,11]</sup>, 本文用 Stone 代数(Stone Algebra)的观点重新刻画粗糙集代数系统, 并在此基础上引入新的粗糙蕴涵算子以弥补这些缺点。这个新的蕴涵算子与 Lukasiewicz 三值逻辑的蕴涵算子吻合得更好, 并具有良好的性质。值得特别指出的是: 本文所讨论的是由同一个非空有限论域  $U$  和同一个二元等价关系  $R$  所诱导的粗糙逻辑。

## 2. 粗糙集理论

设  $U$  是非空有限论域,  $R$  是  $U$  上的二元等价关系。称  $R$  为不可分辨关系, 把  $K = (U, R)$  称为近似空间(Approximation Spaces)。  $\forall (x, y) \in U \times U$ , 若  $(x, y) \in R$ , 则称元素  $x$  与  $y$  在近似空间  $K$  中是不可分辨的(Indistinguishable)。  $U/R$  是  $U$  上由  $R$  生成的等价类全体。符号  $[x]_R$  表示包含元素  $x \in U$  的  $R$  的等价类, 它构成了  $U$  上的一个划分。对于  $\forall x \in U$ ,  $X$  不一定能用知识库的知识来精确

描述, 即  $X$  可能为不可定义的, 这时就用  $X$  关于  $K$  的上、下近似算子来“近似”定义<sup>[1,2,8,10]</sup>。

定义 2.1  $\underline{X} = \{x | x \in U, [x]_R \subseteq X\}$ ;  $\overline{X} = \{x | x \in U, [x]_R \cap X \neq \Phi\}$ , 则  $\underline{X}$  称为  $X$  的下近似集,  $\overline{X}$  称为  $X$  的上近似集。

上、下近似集有一个重要的性质<sup>[1,2,7,8]</sup>:

$$\underline{X} \subseteq X \subseteq \overline{X}$$

从而有  $U - \overline{X} \subseteq U - X \subseteq U - \underline{X}$

当  $\underline{X} = \overline{X}$  时我们称  $X$  是可定义的; 当  $\underline{X} \neq \overline{X}$  时我们称  $X$  是不可定义的; 形如  $(\underline{X}, \overline{X})$  的序偶对称为粗糙集  $X$ , 如空集  $(\Phi, \Phi) = \langle \Phi, \Phi \rangle$  记为  $\Phi$ , 全集  $(U, U) = \langle U, U \rangle$  记为  $U$ 。粗糙集的全体称记为  $\mathcal{R}(U)$ 。  $\overline{X} - \underline{X}$  称为粗糙集  $X$  的边界(boundary), 记为  $b(X)$ 。

定义 2.2 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$ , 则它们的粗糙包含关系“ $A \supseteq B$ ”和粗糙相等关系“ $A \approx B$ ”定义如下:

(1)  $A \supseteq B$  当且仅当  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$  和  $\underline{A} \subseteq \underline{B}$  同时成立;

(2)  $A \approx B$  当且仅当  $\overline{A} = \overline{B}$  和  $\underline{A} = \underline{B}$  同时成立。

定义 2.3 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$  即  $A = (\underline{A}, \overline{A})$ ,  $B = (\underline{B}, \overline{B})$ , 则它们的粗糙交“ $A \cap B$ ”, 粗糙并“ $A \cup B$ ”,  $A$  的粗糙补“ $A'$ ”,  $A$  的粗糙伪补“ $A^*$ ”。

(1)  $A \cap B \approx (\underline{A} \cap \underline{B}, \overline{A} \cap \overline{B})$ ;

(2)  $A \cup B \approx (\underline{A} \cup \underline{B}, \overline{A} \cup \overline{B})$ ;

(3)  $A' \approx (\overline{-A}, -\underline{A})$ ;

(4)  $A^* \approx (\overline{-A}, -\underline{A})$ 。

在(3)、(4)中  $\overline{-A}$  和  $-\underline{A}$  分别是  $\overline{A}$  和  $\underline{A}$  在  $U$  中的补, 以下相同。

定理 2.1 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$ , 则: (1)  $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$ ,  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ ; (2)  $\underline{A \cup B} \supseteq \underline{A} \cup \underline{B}$ ,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。

证明: 略, 参考文献[1~3, 7]。

定理 2.2 设  $A$  的粗糙补“ $A'$ ”,  $A$  的粗糙伪补“ $A^*$ ”, 则:

(1)  $A' \subseteq A^*$ ; (2)  $A^{**} \subseteq A'$ ;

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 60273087)。薛占熬 博士生, 主要研究方向: 人工智能和不确定性推理。何华灿 教授, 博士生导师, 主要研究领域: 人工智能及应用、泛逻辑学。

- (3)  $A' \cup A'' = A'$ ,  $A' \cap A'' = A'$ ;  
 (4)  $A'' = A'' = \langle -\bar{A}, -\bar{A} \rangle$ ;  
 (5)  $A''' = A''' = A''' = A''' = A''' = A'$ ;  
 (6)  $A''' = A'$ ;  
 (7)  $A'''' = A''$ .

证明:略,它的证明可以由定义2.3来证。

说明:(4)是文[4]中的伪补“ $A''$ ”,即 $\langle -\bar{A}, -\bar{A} \rangle$ ,而本文中的伪补是文[4]中的对偶伪补,即 $\langle -\underline{A}, -\underline{A} \rangle$ ,而且在文[4]中的伪补和对偶伪补不能推出  $A' \approx \langle -\bar{A}, -\bar{A} \rangle$ ,从而导致  $A \rightarrow \Phi \approx A'$  和  $B' \rightarrow A' \approx A \rightarrow B$  都不成立。本文中所定义的补和伪补能推出对偶伪补,或者用所定义的补和对偶伪补也能推出伪补。

定理2.3 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$ , 则:

- (1)  $(A \cap B)' \approx A' \cup B'$ ;  $(A \cup B)' \approx A' \cap B'$ ;  
 (2)  $(A \cap B)^* \approx A^* \cup B^*$ ;  $(A \cup B)^* \approx A^* \cap B^*$ .

证明:略,它的证明可以由定义2.3来证。

### 3. 新的蕴涵算子及其性质

#### 3.1 蕴涵算子的引入

在文[4,9]中已经论述了粗糙集是一个 Stone 代数,这里不再赘述,直接引用一些结果,并对部分结果进行改进。

定义3.1<sup>[4]</sup> 设  $B$  是一个布尔代数,  $F$  是  $B$  中的滤子,则  $\langle B, F \rangle = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in B, a \leq b, a + (-b) \in F \}$ .

如果  $B=F$  我们用  $B$  代替  $\langle B, F \rangle$ , 并做如下定义:

- $\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$   
 $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle$ ;  
 $\langle a, b \rangle' = \langle -b, -a \rangle$ ;  $\langle a, b \rangle^* = \langle -a, -a \rangle$ .

建立一个模型  $\text{mod}$ , 它由一对序偶  $\langle w, v \rangle$  组成,  $w$  是一个集合和映射  $v: p \rightarrow \mathcal{R}(w) \times \mathcal{R}(w)$  这个映射叫做值域函数, 对于  $\forall p \in P$ , 如果  $v(p) = \langle A, B \rangle$ , 则  $A \subseteq B$ .

我们用 Lukasiewicz 三值逻辑系统来定义粗糙集的特征函数, 对于  $\forall p \in P$  时,  $v_p: w \rightarrow 3 = \{0, 1/2, 1\}$  则定义如下:

如果  $v(p) = \langle A, B \rangle$ , 则  $v_p(w) = \{1 \mid w \in A, 1/2 \mid w \in B - A, 0\}$ , 即若  $w \in A$ , 则  $v_p(w) = 1$ , 如  $w \in B - A$  则  $v_p(w) = 1/2$ , 否则  $v_p(w) = 0$ . 定义如下:

$$v(p) = \{ \langle w \in W, v_p(w) = 1 \rangle, \{ w \in W, v_p(w) \neq 0 \} \}$$

我们定义如下函数

$$\text{mng}: \text{Fml} \rightarrow \mathcal{R}(w) \times \mathcal{R}(w)^{[4]}:$$

对于  $\forall p \in P$ ,  $\text{mng}(p) = v(p)$ , 如果  $\text{mng}(\varphi) = \langle A, B \rangle$ ,  $\text{mng}(\Psi) = \langle C, D \rangle$ , 则:

$$\begin{aligned} \text{mng}(\varphi \wedge \Psi) &= \langle A \cap C, B \cap D \rangle; \\ \text{mng}(\varphi \vee \Psi) &= \langle A \cup C, B \cup D \rangle; \\ \text{mng}(\varphi') &= \langle -B, -A \rangle; \text{mng}(\varphi^*) = \langle -A, -A \rangle; \\ \text{mng}(0) &= \Phi; \text{mng}(1) = U. \end{aligned}$$

其中  $-A, -B$  分别是  $A, B$  在  $\mathcal{R}(W)$  中的补。

定义3.2 令  $\text{ran}(\text{mng}) = \{ \text{mng}(\varphi) : \varphi \in \text{Fml} \}$ , 则我们定义<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{mng}(\varphi) \cdot \text{mng}(\Psi) &= \text{mng}(\varphi \wedge \Psi); \\ \text{mng}(\varphi) + \text{mng}(\Psi) &= \text{mng}(\varphi \vee \Psi); \\ \text{mng}(\varphi)' &= \text{mng}(\varphi'); \text{mng}(\varphi)^* = \text{mng}(\varphi^*), \end{aligned}$$

定理3.1<sup>[4]</sup> 在定义3.3中,  $\text{ran}(\text{mng})$  是 Katrinak 代数, 而  $\text{mng}$  是它的同态像。

证明:略,在文[4]中已经证明。

然后我们进行如下定义:

$$\varphi \rightarrow \Psi = \varphi' \vee \Psi \vee (\varphi^* \wedge \Psi^*);$$

$$\varphi \leftrightarrow \phi = (\varphi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \varphi).$$

$$\text{mng}(\varphi \rightarrow \Psi) = \text{mng}(\varphi) \rightarrow \text{mng}(\Psi) \quad (\text{i})$$

$$\begin{aligned} \text{mng}(\varphi \rightarrow \Psi) &= \text{mng}(\varphi') + \text{mng}(\Psi) + \text{mng}(\varphi^*) \cdot \text{mng}(\Psi^*) \\ &= \langle -B, -A \rangle + \langle C, D \rangle + \langle -A, -A \rangle \cdot \langle D, D \rangle = \langle -B \cup C \cup (D \cap -A), -A \cup D \rangle \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

通过以上讨论可知,粗糙集的特征函数满足 Katrinak 代数的性质。现在把上、下近似代入得到如下式子:

$$\text{令 } \text{mng}(\varphi) = \langle \underline{A}, \bar{A} \rangle, \text{mng}(\Psi) = \langle \underline{B}, \bar{B} \rangle,$$

$$\text{mng}(\beta) = \langle \underline{C}, \bar{C} \rangle \text{ 则由 3.1 节可知}$$

$$(\varphi \vee \Psi)' = \varphi' \wedge \Psi'; (\varphi \wedge \Psi)' = \varphi' \vee \Psi';$$

$$(\varphi \vee \Psi)^* = \varphi^* \wedge \Psi^*; (\varphi \wedge \Psi)^* = \varphi^* \vee \Psi^*$$

$$\varphi^{**} = \varphi^{**}; \varphi''' = \varphi'; \varphi^{***} = \varphi^{**}$$

$$\varphi^{**} = \varphi^{**} = \varphi^{**} = \varphi^{**} = \varphi^{**} = \varphi^{**};$$

$$\text{mng}(\varphi^{**}) = \langle -\bar{A}, -\bar{A} \rangle; \text{mng}(\varphi') = \langle -\bar{A}, -\underline{A} \rangle;$$

$$\text{mng}(\varphi^*) = \langle -\underline{A}, -\underline{A} \rangle; \text{mng}(\varphi^{**}) = \langle \bar{A}, \bar{A} \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{mng}(\varphi \rightarrow \Psi) &= \text{mng}(\varphi') + \text{mng}(\Psi) + \text{mng}(\varphi^*) \cdot \text{mng}(\Psi^*) \\ &= \langle -\bar{A} \cup \underline{B} \cup (\bar{B} \cap -\underline{A}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle \end{aligned} \quad (\text{iii})$$

这就是我们所定义的新的蕴涵算子,下面就讨论这个新的蕴涵算子在粗糙逻辑系统中的性质。

#### 3.2 蕴涵算子的性质

定理3.2 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$ , 则下面两式等价:

- (1)  $A \rightarrow B = \langle -\bar{A} \cup \underline{B} \cup (\bar{B} \cap -\underline{A}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle$ ;  
 (2)  $A \rightarrow B = \langle (-\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (-\bar{A} \cup \bar{B}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle$ .

证明:

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &= \langle -\bar{A} \cup \underline{B} \cup (\bar{B} \cap -\underline{A}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle = \langle (-\bar{A} \cup \underline{B} \cup \bar{B}) \cap (-\bar{A} \cup \underline{B} \cup -\underline{A}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle \\ &= \langle (-\bar{A} \cup \underline{B}) \cap (-\bar{A} \cup \bar{B}), -\underline{A} \cup \bar{B} \rangle = A \rightarrow B \end{aligned}$$

定理3.3 设  $A \in \mathcal{R}(U)$ , 则: (1)  $U \rightarrow \Phi \approx \Phi$ ; (2)  $\Phi \rightarrow U \approx U$ ; (3)  $\Phi \rightarrow A \approx U$ ; (4)  $U \rightarrow A \approx A$ ; (5)  $A \rightarrow A \approx U$ ;

证明:略 空易由(iii)式来证明。

这个定理说明了新的蕴涵算子满足蕴涵的基本性质。

定理3.4 设  $A, B, C \in \mathcal{R}(U)$ , 则: (1)  $A \subseteq B$ , 则  $B \rightarrow C \subseteq A \rightarrow C$ ; (2)  $B \subseteq C$ , 则  $A \rightarrow B \subseteq A \rightarrow C$ ;

证明:(1)由(iii)式得

$$B \rightarrow C = \langle (-\underline{B} \cup \underline{C}) \cap (-\bar{B} \cup \bar{C}), -\underline{B} \cup \bar{C} \rangle$$

$$A \rightarrow C = \langle (-\underline{A} \cup \underline{C}) \cap (-\bar{A} \cup \bar{C}), -\underline{A} \cup \bar{C} \rangle$$

又因为  $A \subseteq B$  当且仅当  $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ ,  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$  当且仅当  $-\underline{B} \subseteq -\underline{A}$ ,  $-\bar{B} \subseteq -\bar{A}$ , 所以

$$-\underline{B} \cup \underline{C} \subseteq -\underline{A} \cup \underline{C}, -\bar{B} \cup \bar{C} \subseteq -\bar{A} \cup \bar{C},$$

$$-\underline{B} \cup \bar{C} \subseteq -\underline{A} \cup \bar{C}$$

因此  $B \rightarrow C \subseteq A \rightarrow C$ .

(2)类似证明略。

这个定理说明了新的蕴涵算子满足蕴涵的单调性质。

定理3.3, 3.4说明了新的蕴涵算子满足蕴涵的必要条件。

定理3.5 设  $A, B, C \in \mathcal{R}(U)$ , 则: (1)  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \approx B \rightarrow (A \rightarrow C)$ ; (2)  $B \subseteq C \rightarrow A \rightarrow B$ ; (3)  $A \rightarrow B \approx U$  当且仅当  $A \subseteq B$ ; (4)  $B' \rightarrow A' \approx A \rightarrow B$ ; (5)  $A \rightarrow \Phi = A'$ .

证明 我们仅证明(1)、(4), 其它式子容易用定理3.1式(i)和(iii)来证明。

①(1)的证明:

$$\begin{aligned}
\because \varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \beta) &= \varphi' \vee (\Psi \rightarrow \beta) \vee (\varphi' \wedge (\Psi \rightarrow \beta)') \\
&= \varphi' \vee (\Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta')) \vee (\varphi' \wedge (\Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta'))') \\
&= \varphi' \vee \Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge (\Psi' \vee \beta' \vee (\Psi' \wedge \beta'))') \\
&= \varphi' \vee \Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi') \vee (\varphi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta) &= \Psi' \vee (\varphi \rightarrow \beta) \vee (\Psi' \wedge (\varphi \rightarrow \beta)') \\
&= \Psi' \vee (\varphi' \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta')) \vee (\Psi' \wedge (\varphi' \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta'))') \\
&= \Psi' \vee \varphi' \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta') \vee (\Psi' \wedge (\varphi' \vee \beta' \vee (\varphi' \wedge \beta'))') \\
&= \varphi' \vee \Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi') \vee (\varphi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \\
\therefore \varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \beta) &= \Psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta)
\end{aligned}$$

再由(i)式得  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \approx B \rightarrow (A \rightarrow C)$

②(4)的证明

$$\begin{aligned}
\because \varphi' \rightarrow \Psi' &= \varphi'' \vee \Psi' \vee (\varphi'' \wedge \Psi'') = \Psi' \vee \varphi' \vee (\Psi' \wedge \varphi') \\
\Psi \rightarrow \varphi &= \Psi' \vee \varphi' \vee (\Psi' \wedge \varphi') \\
\therefore \Psi \rightarrow \varphi &= \varphi' \rightarrow \Psi'
\end{aligned}$$

再由(i)式得  $B' \rightarrow A' \approx A \rightarrow B$

在定理3.5中,(1)说明了任意前提A在推理过程中与位置无关,保证了可推演性;(3)说明了保序性成立;(4)、(5)保证了逆否命题与原命题是等价的特性。

**定理3.6** 设  $A, B, C \in \mathcal{R}(U)$ , 则:(1)  $(A \cup B) \rightarrow C \approx (A \rightarrow C) \cap (B \rightarrow C)$ ;(2)  $A \rightarrow (B \cap C) \approx (A \rightarrow B) \cap (A \rightarrow C)$ ;(3)  $(A \cap B) \rightarrow C \approx (A \rightarrow C) \cup (B \rightarrow C)$ ;(4)  $A \rightarrow (B \cup C) \approx (A \rightarrow B) \cup (A \rightarrow C)$ 。

证明:我们用定理3.2,(i)和(iii)式来证明(1)和(3);(2)和(4)可类似证明。

(1)的证明:

$$\begin{aligned}
\because (\varphi \rightarrow \beta) \wedge (\Psi \rightarrow \beta) &= (\varphi' \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta')) \wedge (\Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta')) \\
&= (\varphi' \wedge \Psi') \vee (\varphi' \wedge \beta) \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \vee (\beta \wedge \Psi') \vee \beta \vee (\beta \wedge \Psi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \vee (\beta \wedge \varphi' \wedge \beta') \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \\
&= (\varphi' \wedge \Psi') \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \\
(\varphi \vee \Psi) \rightarrow \beta &= (\varphi \vee \Psi)' \vee \beta \vee ((\varphi \vee \Psi)' \wedge \beta') = (\varphi' \wedge \Psi') \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \Psi' \wedge \beta') \\
\therefore (\varphi \vee \Psi) \rightarrow \beta &= (\varphi \rightarrow \beta) \wedge (\Psi \rightarrow \beta)
\end{aligned}$$

再由(i)式得  $(A \cup B) \rightarrow C \approx (A \rightarrow C) \cap (B \rightarrow C)$

(3)的证明:

$$\begin{aligned}
\because (\varphi \wedge \Psi) \rightarrow \beta &= (\varphi \wedge \Psi)' \vee \beta \vee ((\varphi \wedge \Psi)' \wedge \beta') \\
&= (\varphi' \vee \Psi') \vee \beta \vee ((\varphi' \vee \Psi') \wedge \beta')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi' \vee \Psi') \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta') \vee (\Psi' \wedge \beta') \\
(\varphi \rightarrow \beta) \vee (\Psi \rightarrow \beta) &= (\varphi' \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta')) \vee (\Psi' \vee \beta \vee (\Psi' \wedge \beta')) \\
&= (\varphi' \vee \Psi') \vee \beta \vee (\varphi' \wedge \beta') \vee (\Psi' \wedge \beta') \\
\therefore (\varphi \wedge \Psi) \rightarrow \beta &= (\varphi \rightarrow \beta) \vee (\Psi \rightarrow \beta)
\end{aligned}$$

再由(i)式得

$$(A \cap B) \rightarrow C \approx (A \rightarrow C) \cup (B \rightarrow C)$$

**定理3.7** 设  $A, B \in \mathcal{R}(U)$ , 则

- (1)  $A \subset \tilde{C}((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ ;
- (2)  $(A \rightarrow B) \approx \bigcup \{X | A \subset \tilde{C}X \rightarrow B\}$ 。

**证明** 由定理3.5容易证明。

定理3.5,3.7支持  $A', A \rightarrow B \Rightarrow B'$  的推理过程。

通过以上定理证明可以看出,本文定义粗糙蕴涵算子来刻画业糙集代数系统,且具有良好的性质。

**结论** 粗糙蕴涵算子是粗糙逻辑研究中的重点和难点,文[4]定义了蕴涵算子不能保证  $B' \rightarrow A' \approx A \rightarrow B$  成立,即逆否命题与原命题的不等价,为此,本文用 Stone 代数观点重新定义了粗糙集之交、并、补运算和粗糙蕴涵算子,进一步研究了这些粗糙运算之间的关系及其性质,并指出这个新的蕴涵算子与 Lukasiewicz 三值逻辑中的蕴涵算子吻合得更好,从而弥补了文[4]的不足之处,保证了逆否命题与原命题的等价性,且具有良好的性质。因而,使用这个粗糙蕴涵算子所产生的新粗糙逻辑系统更符合人类的思维习惯。

## 参考文献

- 1 Pawlak Z. Rough Sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341~356
- 2 Pawlak Z. Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1991
- 3 曾黄麟. 粗糙理论及其应用—关于数据推理的新方法(修订版). 重庆大学出版社, 1998
- 4 Dutsch I. A Logic for Rough Sets. Theoretical Computer Sciences, 1997, 179: 427~436
- 5 Orłowska E. Reasoning about Vague Concepts. Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 1987, 35: 643~652
- 6 Barnes D W, Mack J M. An Algebraic Introduction to Mathematical Logic. Springer-Verlag, New York, 1975
- 7 张文修,等. 粗糙集理论与方法. 科学出版社, 2001
- 8 祝峰,何华灿. 粗糙集的公理化. 计算机学报, 2000, 23(3): 330~333
- 9 Pomykala J, Pomykala J A. The Stone Algebra of Rough Sets. Bull. Polish Acad. Sci. Math., 1988, 36: 495~508
- 10 Pawlak Z. Vagueness and Uncertainty: A Rough Set Perspective. Computational Intelligence, 1995, 11: 227~232
- 11 王国俊. MV-代数、BL-代数、Ro-代数于多值逻辑. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 1~15