理想状态下泛逻辑的形式演绎系统 $\mathscr{B}$ *)

罗敏霞[1,2]　何华灿[1]

(西北工业大学计算机科学与工程系　西安710072)[1]　(运城学院数学系　运城044000)[2]

摘　要　本文提出泛逻辑学在理想状态(广义相关系数 $h=0.5$,广义自相关系数 $k=0.5$)下的形式演绎系统 $\mathscr{B}$。讨论了商代数[F]的性质。进一步证明了形式演绎系统 $\mathscr{B}$ 与文[11]的基本形式演绎系统 $UL(h=k=0.5)$ 是等价的。

关键词　泛逻辑,形式演绎系统 $\mathscr{B}$,可证等价关系

The Formal Deductive System $\mathscr{B}$ of Universal Logic in the Ideal Condition

LUO Min-Xia[1,2]　HE Hua-Can[1]

(Department of Computer Science & Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xian 710072)[1]

(Department of Mathematics, Yuncheng University, Yuncheng 044000)[2]

Abstract　In this taper, we introduce the formal deductive system $\mathscr{B}$ of universal logic in the ideal condition (the generalized correlative coefficent $h=0.5$ and the generalized self-correlative coefficient $k=0.5$). Some characterizations of the quotient algebra [F] are discussed. Moreover, we show that the formal deductive system $\mathscr{B}$ and the basic formal deductive system $UL(h=k=0.5)$ are equivalent.

Keywords　Universal logic, Formal deductive system $\mathscr{B}$, Provable equivalence relation

0. 引言

随着计算机科学技术的迅猛发展,对数理逻辑提出了许多新的要求,从而促进了非经典逻辑和现代逻辑的迅速发展。近年来,以王国俊教授为首的一批学者成功地将模糊逻辑和模糊推理结合起来,取得了一系列有意义的成果[3~8]。一种新的模糊逻辑形式演绎系统 L^* 被建立[3];1998年模糊逻辑的广义重言式理论被提出[4];1999年模糊推理三 I 方法问世[5];2002年成功地解决了形式系统 L^* 的完备性问题[7]。从而为模糊推理在语构上奠定了严格的逻辑基础。

本文第二作者为了探索逻辑的一般规律,提出建立能包容各种逻辑形态和推理模式的泛逻辑学理论[9,10]。在长期从事人工智能理论和实用专家系统的研究中发现,模糊命题之间的关系柔性是不可回避的客观存在,需要用连续可变的逻辑运算模型来描述,也就是说,在对立不充分的柔性世界中,不仅要考虑模糊性对命题逻辑真值的影响,而且要考虑关系柔性对命题联结词运算模型的影响。事物之间的广义相关性和广义自相关性是引起关系柔性的根本原因。泛逻辑学给出了命题联结词的运算模型:

(1)泛非命题联结词 $\neg_k$ 的运算模型:

$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$

(2)泛与命题联结词 $\wedge_{h,k}$ 的运算模型:

$T(x,y,h,k)=\Gamma^1[(x^{nm}+y^{nm}-1)^{1/nm}]$

(3)泛或命题联结词 $\vee_{h,k}$ 的运算模型:

$S(x,y,h,k)=(1-\Gamma^1[((1-x^n)^m+(1-y^n)^m-1)^{1/m}])^{1/n}]$

(4)泛蕴涵命题联结词 $\rightarrow_{h,k}$ 的运算模型:

$I(x,y,h,k)=ite\{1|x\leqslant y;0|m\leqslant 0$ 且 $y=0$ 且 $x\neq 0;\Gamma^1[(1-x^{nm}+y^{nm})^{1/nm}]\}$

其中:$n=-1/\log_2 k, k\in[0,1]$。$m=(3-4h)/(4h(1-h)), h\in[0,1]$。$\Gamma^1[x]$ 表示把 x 限制在[0,1]内,$x>1$ 取1;$x<0$ 或为虚数时取0。$S=ite\{\beta|\alpha;\gamma\}$ 是条件表达式,表示"如果 α 为真,则 $S=\beta$;否则 $S=\gamma$"。

除了上面四个运算模型之外,还有泛等价命题联结词,泛平均命题联结词和泛组合命题联结词的运算模型,详细内容参阅文[10]。泛逻辑学的研究目标是提供一个逻辑生成器,通过运用各种规则,可以构造出满足某种需要的具体逻辑。这个目标在标准命题泛逻辑学层面上已经实现[10]。

泛逻辑学的研究思想是从现实世界的柔性逻辑现象出发,通过一个连续单调映射,在理想世界中建立理想柔性推理,再通过这个映射的逆映射,把它应用于现实世界中。几年来,泛逻辑学已经成为人工智能领域最具活力的研究方向之一。张小红等[11]提出了泛逻辑的基本形式演绎系统 UL,该文的出发点是从现实世界的逻辑性质出发,同时考虑命题的真值柔性和命题联结词之间的关系柔性的影响,建立的基本形式演绎系统,首先讨论了 $h=k=0.5$ 的情形。

本文的出发点是单纯从理想世界($k\equiv 0.5, h\equiv 0.5$)出发,只考虑命题真值柔性的影响,提出理想状态下泛逻辑的形式演绎系统 $\mathscr{B}$。进一步证明了形式系统 $\mathscr{B}$ 与基本形式系统 UL ($h=k=0.5$)是等价的。

1. 理想状态下的柔性命题联结词

本文只讨论广义相关系数 $h=0.5$ 与广义自相关系数 $k=0.5$ 的情形。联结词 $\neg_{0.5}, \rightarrow_{0.5,0.5}, \vee_{0.5,0.5}, \wedge_{0.5,0.5}$,以下我们简记为 $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$。

定义1.1　设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 为无穷集,$F(S)$ 是由 S 生成的($\neg,\rightarrow,\vee,\wedge$)型自由代数,其中 $\neg$(非)为一元联结词,$\rightarrow$

*)本文得到中国国家自然科学基金(60273087)和北京市自然科学基金(4032009)资助。**罗敏霞**　副教授,博士生,主要研究方向为代数学,人工智能原理及应用。**何华灿**　教授,博士生导师,主要研究方向为人工智能原理及应用,泛逻辑学。

(蕴涵)、∨(析取)、∧(合取)为二元联结词。

函数 $v:F(S)\to[0,1]$称为 $F(S)$ 的 H-赋值,如果 v 满足:(i)$v(\neg A)=1-v(A)$;(ii)$v(A\to B)=\min(1,1-v(A)+v(B))$;(iii)$v(A\wedge B)=\min(1,v(A)+v(B))$;(iv)$v(A\wedge B)=\max(0,v(A)+v(B)-1)$。

定义1.2 设 X 是命题联结词的一个集合,称 X 为联结词的一个完全集,如果对任一个赋值函数都可用仅含 X 中联结词命题形式(所确定的赋值函数)来表示。

命题1.3 $\{\neg,\to\}$、$\{\neg,\vee\}$、$\{\neg,\wedge\}$都是命题联结词的完全集。

证明:(1)$\{\neg,\to\}$是联接词的完全集。只需证,任意命题形式可与一个只含$\neg$,$\to$的命题形式在任一赋值函数下的值相等。事实上,因为$(A\vee B)$与$((\neg A)\to B)$、$(A\wedge B)$与$(\neg(A\to(\neg B)))$在任意一个赋值函数下的值相等。

(2)$\{\neg,\vee\}$是联结词的完全集。因为,$(A\wedge B)$与$(\neg((\neg A)\vee(\neg B)))$,$(A\to B)$与$((\neg A)\vee B)$在任意一个赋值函数下的值相等。

(3)$\{\neg,\wedge\}$是联结词的完全集。因为$(A\vee B)$与$(\neg((\neg A)\wedge(\neg B)))$,$(A\to B)$与$(\neg(A\wedge(\neg B)))$在任意一个赋值函数下的值相等。

由命题1.3可知,命题联结词$\neg$,$\to$,$\vee$,$\wedge$之间的关系,从而,我们可建立命题形式演绎系统,使它只含命题联结词$\neg$,$\to$,这样使形式系统简明扼要。

2.理想状态下的命题演算形式系统 $\mathscr{B}$

定义2.1 形式系统 $\mathscr{B}$ 由以下几部分构成:

(i)公式集 $F(S)$。设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$为无穷集,$F(S)$是由 S 生成的$(\neg,\to)$型自由代数,其中$\neg$(非)为一元联结词,$\to$(蕴涵)为二元联结词。

(ii)公理集 $AXM(B)$。$AXM(B)$由以下形式的公式组成:(B1)$A\to(B\to A)$;(B2)$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$;(B3)$((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A)$;(B4)$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$;(B5)$A\to\neg\neg A$。

(iii)推理规则 MP,MP 指分离规则:由 A 和 $A\to B$ 推得 B。

以下我们约定,对于系统 $\mathscr{B}$ 中的公式 A、B、$A\vee B$ 是$\neg A\to B$ 的简写,$A\wedge B$ 是$\neg(\neg(A\vee\neg B)$的简写。

我们通常的做法,在系统 $\mathscr{B}$ 中引入证明,定理。从公式集 Γ 出发的推演以及 Γ 推论等概念。分别使用记号$\vdash A$ 和 $\Gamma\vdash A$ 表示公式 A 为系统 $\mathscr{B}$ 的定理及 Γ—推论。

定理2.2(三段论规则 HS) 设 $\Gamma=\{A\to B,B\to C\}$,则 $\Gamma\vdash A\to C$。

证明:

1° $A\to B$ (Γ中元)
2° $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ (B2)
3° $(B\to C)\to(A\to C)$ (1°,2°,MP 规则)
4° $B\to C$ (Γ中元)
5° $A\to C$ (3°,4°,MP 规则)

定理2.3 以下公式都是系统 $\mathscr{B}$ 的定理

(D1)$\neg\neg A\to A$
(D2)$A\to A$
(D3)$(A\to((A\to B)\to B)$
(D4)$(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$
(D5)$(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$
(D6)$(A\to B)\to(\neg(B\to\neg A)$
(D7)$A\to A\vee B$
(D8)$A\vee B\to B\vee A$
(D9)$A\wedge B\to A$
(D10)$A\wedge B\to B\wedge A$

证明:(D1)、(D2)的证明参看文[11]。

(D3)的证明

1° $A\to((B\to A)\to A)$ (B1)
2° $((B\to A)\to A)\to(A\to B)\to B)$ (B3)
3° $A\to((A\to B)\to B)$ (1°,2°,MP 规则)

(D4)的证明

1° $B\to((B\to C)\to C)$ (D3)
2° $(((B\to C)\to C)\to(A\to C))\to(B\to(A\to C))$ (1°,(B2),MP 规则)
3° $(A\to(B\to C))\to(((B\to C)\to C)\to(A\to C))$ (B2)
4° $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$ (2°,3°,HS 规则)

(D5)的证明

1° $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ (B2)
2° $((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))\to((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))$ (D4)
3° $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ (1°,2°,MP 规则)

(D6)的证明

1° $\neg\neg A\to A$ (D1)
2° $(\neg\neg A\to A)\to((A\to B)\to(\neg\neg A\to B))$ (B2)
3° $(A\to B)\to(\neg\neg A\to B)$ (1°,2°,MP 规则)
4° $B\to\neg\neg B$ (B5)
5° $(B\to\neg\neg B)\to((\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B))$ (D5)
6° $(\neg\neg A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$ (4°,5°,MP 规则)
7° $(\neg\neg A\to\neg\neg B)\to(\neg B\to\neg A)$ (B4)
8° $(\neg\neg A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ (6°,7°,HS 规则)
9° $(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ (3°,8°,HS 规则)

(D7)的证明

1° $A\to(\neg B\to A)$ (B1)
2° $(\neg B\to A)\to(\neg A\to\neg\neg B)$ (D6)
3° $A\to(\neg A\to\neg\neg B)$ (1°,2°,HS 规则)
4° $(\neg A\to\neg\neg B)\to((\neg\neg B\to B)\to(\neg A\to B))$ (B2)
5° $A\to((\neg\neg B\to B)\to(\neg A\to B))$ (3°,4°,HS 规则)
6° $(A\to((\neg\neg B\to B)\to(\neg A\to B)))\to((\neg\neg B\to B)\to(A\to(\neg A\to B)))$ (D4)
7° $(\neg\neg B\to B)\to(A\to(\neg A\to B))$ (5°,6°,MP 规则)
8° $\neg\neg B\to B$ (D1)
9° $A\to(\neg A\to B)$ (7°,8°,MP 规则)
10° $A\to(A\vee B)$ (9°简写)

(D8)的证明

1° $(\neg A\to B)\to(\neg B\to\neg\neg A)$ (D6)
2° $(\neg B\to\neg\neg A)\to((\neg\neg A\to A)\to(\neg B\to A))$ (B2)
3° $(\neg\neg A\to A)\to((\neg B\to\neg\neg A)\to(\neg B\to A))$ (2°,(D4),MP 规则)
4° $\neg\neg A\to A$ (D1)
5° $(\neg B\to\neg\neg A)\to(\neg B\to A)$ (3°,4°,MP 规则)
6° $(\neg A\to B)\to(\neg B\to A)$ (1°,5°,HS 规则)
7° $A\vee B\to B\vee A$ (6°简写)

(D9)的证明

1° $\neg A\to\neg A\vee B$ (D7)
2° $\neg(\neg A\to\neg B)\to\neg\neg A$ (1°,(D6),MP 规则)
3° $\neg\neg A\to A$ (D1)
4° $\neg(\neg A\vee\neg B)\to A$ (2°,3°,HS 规则)
5° $A\wedge B\to A$ (4°简写)

(D10)的证明

1° $\neg B\vee\neg A\to\neg A\vee\neg B$ (D8)
2° $\neg(\neg A\vee\neg B)\to\neg(\neg B\vee\neg A)$ (1°,(D6),MP 规则)
3° $A\wedge B\to B\wedge A$ (2°简写)

定理2.4 以下公式都是系统 $\mathscr{B}$ 的定理:

(i)$((A\vee B)\to C)\to(A\to C)$
(ii)$(A\to C)\to((A\wedge B)\to C)$
(iii)$(C\to A)\to(C\to(A\vee B))$
(iv)$(C\to(A\wedge B))\to(C\to A)$
(v)$((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\vee B))$
(vi)$((A\vee B)\to C)\to((A\to C)\vee(B\to C))$
(vii)$(B\to C)\to(A\vee B\to A\vee C)$
(viii)$(B\to C)\to(A\wedge B\to A\wedge C)$

证明略。

3. 可证等价关系

定义3.1 设 $A,B\in F(S)$，如果 $\vdash(A\to B)$ 且 $\vdash(B\to A)$，则称 A 与 B 可证等价。记作 $A\approx B$。

命题3.2 可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系。

证明：由定义知，$\approx$ 是对称的。由 $(D2)$ 知，$\approx$ 的反身性。由 HS 规则知 $\approx$ 是传递的。

命题3.3 可证等价关系是 $F(S)$ 上的 $(\neg,\to)$ 型同余关系。

证明：(1)设 $A\approx B$，则 $\vdash A\to B$。由 $(D6)$ 和 MP 规则得，$\vdash\neg B\to\neg A$。同理 $\vdash\neg A\to\neg B$。所以，$\neg A\approx\neg B$。(2)设 $A\approx B$，$C\approx D$，由 $\vdash C\to D$ 及 $(D5)$ 和 MP 规则得，$\vdash(A\to C)\to(A\to D)$。由 $B\to A$ 及 $(B2)$ 和 MP 规则得，$\vdash(A\to D)\to(B\to D)$。再由 HS 规则，$\vdash(A\to C)\to(B\to D)$。同理可证，$\vdash(B\to D)\to(A\to C)$。所以，$(A\to C)\approx(B\to D)$。

定理3.4 以下可证等价关系成立：

(i) $\neg\neg A\approx A$

(ii)交换律成立 $A\vee B\approx B\vee A$　$A\wedge B\approx B\wedge A$

(iii)结合律成立 $(A\vee B)\vee C\approx A\vee(B\vee C)$　$(A\wedge B)\wedge C\approx A\wedge(B\wedge C)$

(iv)如果 $A\approx B,C\approx D$，则 $A\vee C\approx B\vee D$　$A\wedge C\approx B\wedge D$

(v) DeMorgan 对偶律成立 $\neg(A\vee B)\approx\neg A\wedge\neg B$　$\neg(A\wedge B)\approx\neg A\vee\neg B$

(vi) $(A\to B)\to B\approx(B\to A)\to A$

(vii) $A\to(B\to C)\approx B\to(A\to C)$

(viii) $A\to B\approx\neg B\to\neg A$　$A\to\neg B\approx B\to\neg A$　$\neg A\to B\approx\neg B\to A$

(ix) $((A\to B)\to B)\to B\approx A\to B$

证明：(iii)的证明

1°	$(\neg B\to C)\to(\neg C\to B)$	$(D8)$
2°	$(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg A\to(\neg C\to B))$	(1°,(D5),MP 规则)
3°	$(\neg A\to(\neg C\to B))\to(\neg C\to(\neg A\to B))$	$(D4)$
4°	$(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg C\to(\neg A\to B))$	(2°,3°,HS 规则)
5°	$(\neg C\to(\neg A\to B))\to(\neg(\neg A\to B)\to\neg\neg C)$	$(D6)$
6°	$(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to\neg\neg C)$	(4°,5°,HS 规则)
7°	$\neg\neg C\to C$	$(D1)$
8°	$(\neg(\neg A\to B)\to\neg\neg C)\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$	(7°,(D5),MP 规则)
9°	$(\neg A\to(\neg B\to C))\to(\neg(\neg A\to B)\to C)$	(6°,8°,HS 规则)
10°	$(A\vee(B\vee C))\to((A\vee B)\vee C)$	(9°简写)

同理可证，$((A\vee B)\vee C)\to(A\vee(B\vee C))$

(v)的证明因为 $A\approx\neg\neg A,B\approx\neg\neg B$。由定理3.4(iv)，$A\vee B\approx\neg\neg A\vee\neg\neg B$，而 $\neg A\wedge\neg B$ 是 $\neg(\neg\neg A\wedge\neg\neg B)$ 的简写，所以，$\neg(A\vee B)\approx\neg A\wedge\neg B$。

同理可证，$\neg(A\wedge B)\approx\neg A\wedge\neg B$。

定理3.5 设 $F(S)$ 是 $(\neg,\to)$ 型公式代数，$\approx$ 是 $\mathscr{B}$ 中的可证等价关系，则可在 $(\neg,\to)$ 型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 引入偏序使得 $([F],\leqslant)$ 是有界的且

(i)对 $[F]$ 中的任一元 $a=[A]$，$\neg\neg a=a$，且 $\neg$ 是 $[F]$ 上的逆序对合对应。

(ii)以 $f(a,b)$ 记 $[F]$ 上的蕴涵算子 $a\to b$，则

(1°) $f(\neg a,\neg b)=f(b,a)$

(2°) $f(1,a)=a$　$f(a,a)=1$

(3°) $f(a,b)\leqslant f(f(b,c),f(a,c))$

(4°) $f(f(a,b),b)=f(f(b,a),a)$

这里1是 $([f],\leqslant)$ 中的最大元。

证明：由命题3.3知，可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的同余关系，这样 $[F]$ 中的等价类之间的 $(\neg,\to)$ 运算与各类代表元的选取无关。对 $F(S)$ 中每个公式 A，用 $[A]$ 表示 A 所在的等价类。则 $\neg[A]=[\neg A][A]\to[B]=[A\to B]$

定义关系"$\leqslant$"如下：$[A]\leqslant[B]$ 当且仅当 $\vdash A\to B$

容易证明，上定义与 $[A]$，$[B]$ 中的代表元选取无关，且 $\leqslant$ 是 $[F]$ 上的偏序。

设 A 是 B 中的定理，则由 $(B1)$ 及 MP 规则，对每个 $B\in F(S)$，有 $\vdash B\to A$，则 A 所在的等价类 $[A]$ 是 $[F]$ 中的最大元。又对每个 $B\in F(S)$，由定理3.4(viii)，$\vdash\neg A\to B$，所以，$\neg A$ 所在的等价类 $[\neg A]$ 是 $[F]$ 中的最小元。分别用1和0记 $[F]$ 中的最大元与最小元。

(i)由定理3.4(i)知，$\neg$ 是 $[F]$ 上的对合对应。由定理3.4(viii)可知，$\neg$ 是逆序对应，从而 $\neg$ 是[F]上的逆序对合对应。

(ii)设 $a=[A]$，$b=[B]$，$c=[C]$

(1°)由定理3.4(viii)有，

$f(\neg a,\neg b)=\neg[A]\to\neg[B]=[\neg A\to\neg B]=[B\to A]=[B]\to[A]=f(b,a)$

(2°)任取 $\mathscr{B}$ 中定理 B，则 $1=[B]$。由 $(B1)$ 及 MP 规则，$\vdash(A\to B)\to B$。由 $(B3)$ 得，$\vdash(B\to A)\to A$。则 $B\to A\approx A$。所以，$f(1,a)=1\to a=[B]\to[A]=[B\to A]=[A]=a$。显然 $f(a,a)=1$。

(3°)由 $(B2)$ 有，$[A\to B]\leqslant[(B\to C)\to(A\to C)]$。从而，$f(a,b)\leqslant f(f(b,c),f(a,c))$。

(4°)由 $(B3)$ 有，$[(A\to B)\to B]\leqslant[(B\to A)\to A]$，从而，$f(f(a,b),b)=f(f(b,a),a)$。

4. 形式系统 $\mathscr{B}$ 与基本形式系统 UL 及经典逻辑系统 $\mathscr{L}$ 的关系

定义4.1[11] 1°. 设 S 是无穷集，$\neg$ 是 S 上的一元运算，$\to$，$\vee$ 是 S 上的二元运算，$F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\vee,\to)$ 型自由代数，称 $F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为公理：

(UL1) $A\to(B\to A)$

(UL2) $A\to((A\to B)\to B)$

(UL3) $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

(UL4) $A\to\neg\neg A$

(UL5) $A\to A\vee B$

(UL6) $A\wedge B\to A$

(UL7) $(A\vee B)\to(B\vee A)$

(UL8) $A\vee(B\vee C)\to(A\vee B)\vee C$

(UL9) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

(UL10) $((A\to B)\to B)\to((B\to A)\to A)$

$(UL11)$ $(B\to C)\to(A\vee B\to A\vee C)$

其中 $P\wedge Q$ 是 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$ 的简写。

2°. UL 中有下述推理规则：MP 规则，由 A 和 $A\to B$ 推得 B。

由公式集 $F(S)$，公理 $(UL1)\sim(UL11)$ 以及 MP 规则组成的系统，称为系统 UL。

由形式系统 $\mathscr{B}$ 的定义可知，系统 $\mathscr{B}$ 的公理全包含在系统 UL 中，且两个系统的推理规则相同。

定理4.2 形式系统 $\mathscr{B}$ 与形式系统 $UL(h=k=0.5)$ 是等价的。

证明：定理2.3证明了 $(UL2)$，$(UL5)$，$(UL6)$，$(UL7)$ 是系统 $\mathscr{B}$ 的定理。定理2.4证明了 $(UL11)$ 是系统 $\mathscr{B}$ 的定理。定理3.4证明了 $(UL8)$ 是 $\mathscr{B}$ 的定理。从而两个系统是等价的。

由定理4.2可知，形式系统 $\mathscr{B}$ 与形式系统 UL 是等价的。文[11]已经证明了系统 UL 是可靠的，从而形式系统 $\mathscr{B}$ 也是可靠的。

定义4.3[8] 1°. 设 S 是无穷集，$\neg$ 是 S 上的一元运算，$\to$ 是 S 上的二元运算，$F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg,\to)$ 型自由代数，

$F(S)$中有以下形式的公式为公理：

(L1)$A\to(B\to A)$

(L2)$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

(L3)$(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

2°. 推理规则：MP 规则，由 A 和 $A\to B$ 推得 B。

由公式集 $F(S)$，公理($L1$)，($L2$)，($L3$)以及 MP 规则组成的系统，称为经典逻辑的形式演绎系统 $\mathscr{L}$。

注. 经典逻辑形式系统 $\mathscr{L}$ 中的($L2$)不是形式系统 $\mathscr{B}$ 中的定理。例如，$v(A)=0.9$，$v(B)=0.5$，$v(C)=0.3$，$v((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))=0.9\neq1$。由系统 $\mathscr{B}$ 的可靠性可知，($L2$)不是 $\mathscr{B}$ 的重言式，从而不是 $\mathscr{B}$ 的定理。

由定义1.1的 H-赋值可知，当赋值区间[0,1]退化为{0,1}时，H-赋值退化为经典逻辑的真值表。且由命题1.2可知，理想状态下的系统 $\mathscr{B}$ 中命题联结词之间的关系与经典逻辑中命题联结词之间的关系完全相同，从而形式系统 $\mathscr{B}$ 中的定理都是形式系统 $\mathscr{L}$ 的定理，所以系统 $\mathscr{B}$ 包含经典逻辑形式系统 $\mathscr{L}$ 作为其特例。

参 考 文 献

1 Zadeh L A. Fuzzy Sets. Inform Contr，1965，8：338～353
2 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans SMC，1973，1：28～44
3 王国俊. Fuzzy 命题演算的一种形式演绎系统. 科学通报，1997，42(10)：1041～1045
4 王国俊. 修正的 Kleene 系统中的 Σ－(α－重言式)理论. 中国科学，E辑，1998，28(2)：146～152
5 王国俊. 模糊推理的全蕴含三 I 算法. 中国科学，E 辑，1999，29(1)：43～53
6 Wang G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning. Information Science，1999，177：47～88
7 Pei D W，Wang G J. The completeness and applications of the formal system L*. Science in China(Series F)，2002，45(1)：40～50
8 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社，2000
9 何华灿，刘永怀，何大庆. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学，E 辑，1996，26：72～78
10 何华灿. 泛逻辑学原理. 北京：科学出版社，2001
11 张小红，何华灿，李伟华. 泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 及其可靠性. 计算机科学，待发表

(上接第88页)

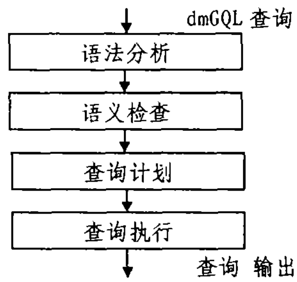

图3 dmGQL 查询处理过程

3. 查询计划，与一般 SQL 语言中的查询计划相比，dmGQL 语言中的查询计划要简单得多，没有复杂的逻辑查询计划优化过程。dmGQL 中的查询计划主要有两个任务，一个是从输入的查询语句中提出属性相关的约束等、度量值相关约束如，以第3节中的 dmGQL 语句为例，areaType＝＊等即是属性相关的约束，COUNT(＊)＞1000、AVG(salesCereal)＜20、DeltaAVG(salesCereal)＞1.5、DeltaCOUNT(＊)＞0.5即为度量值相关的约束，在 dmGQL 中我们只考虑数据库中常用的聚集函数如 MIN，MAX，AVG，SUM，COUNT 等；查询计划另一个任务就是通过检查 FROM 字句来确定查询类型，如果 FROM 字句中的是关系表名，则为非实例化查询，否则如果是数据立方名则为实例化查询。

4. 执行计划，根据查询类型调用梯度挖掘算法进行梯度挖掘，如果是非实例化查询，则调用 eLiveSet 算法，如果是实例化查询则调用 GSCC 算法。最后，输出梯度查询结果。

4.3 基于 DM 的实现策略

dmGQL 的查询处理过程跟标准 SQL 语言的查询处理过程类似，而达梦(dm)数据库管理系统中已经实现了标准 SQL 查询语言，因此我们可以在 dm 的基础上实现 dmGQL 语言。对于 dmGQL 中的语法分析、语义检查模块可以直接扩展 dm 中查询处理的相应部分实现，由于 dmGQL 中目前只考虑了单个表和单个数据立方的情况，因此其语法分析和语义检查模块的实现过程将会更加简单。dm 查询处理中的查询计划还牵涉到查询树转换和等价代数变换等比较复杂的处理逻辑，这些内容在 dmGQL 中是不需要的，因此我们要采用新的查询计划模块来处理 dmGQL 语句。虽然 dmGQL 中的查询执行采用了全新的算法，在物理实现的底层，我们还是需要调用 dm 的 API 来访问存放在 dm 中的关系表数据。为了提高数据立方梯度的查询，我们可以考虑专门对浓缩数据立方建立索引，不过，浓缩立方索引问题还是一个需要进一步深入研究的开(opening)问题。另外，在非实例化查询中，我们需要从关系表中计算浓缩数据立方，计算完一个浓缩数据立方以后，我们需要修改系统的元数据存入新立方的元数据信息。

小结 DBMS 尤其是关系型 DBMS 之所以取得极大的成功，标准 SQL 语言起到了重要作用，我们相信第二代数据挖掘系统要想取得成功，数据挖掘查询语言的作用同样不可忽视。本文我们研究了数据立方梯度查询语言，指出了现有梯度查询语言 CubegradeQL 只支持非实例化数据立方中的梯度查询的不足并且提出了一种新的梯度查询语言 dmGQL 语言，dmGQL 能够支持实例化/非实例化数据立方中的梯度查询。最后，我们讨论了 dmGQL 语言的查询处理过程。

参 考 文 献

1 Imielinski T，Mannila H. A database perspective on knowledge discovery. Communications of the ACM，1996，39(11)：58～64
2 Agrawal R，Imielinski T，Swami A. Mining associations rules between sets of items in large databases. In：Proc. of ACM SIGMOD Conf. on Management of Data (SIGMOD'93)，Washington D.C.，1993. 207～216
3 Imielinski T，Khachiyan L，Abdulghani A. Cubegrades：Generalizing Association Rules. Data Mining and Knowledge Discovery，2002，6(6)：219～257
4 Gray J，Bosworth A，Layman A，Pirahesh H. Data cube：A relational aggregation operator generalizing group-by，cross-tab，and sub-total. In：Proc. of Intl. Conf. on Data Engineering (ICDE'96)，Washington，DC，USA. 1996. 152～159
5 Wang W，Feng J，Lu H，Jeffrey X Y. Condensed Cube：an effective approach to reducing data cube size. In：Proc. of Intl. Conf. on Data Engineering (ICDE'02)，Washington，DC，USA. 2002. 155～165
6 冯玉才，刘玉葆，冯剑琳. 浓缩数据立方中约束立方梯度的挖掘(已录用). 软件学报，2003