基于幂零泛与运算模型的命题模糊逻辑*)

罗敏霞　何华灿
(西北工业大学计算机学院　西安710000)

摘　要　本文讨论了泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 的一些性质；证明了泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是一个幂零三角范数；而且泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 与泛蕴涵运算模型 $I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是一个伴随对；进一步证明了 $([0,1],\vee,\wedge,*,\rightarrow,0,1)$ 作成一个 MV-代数。给出了基于幂零泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 的模糊命题演算系统 PC(T)，证明了此命题演算系统与 Lukasiewicz 逻辑命题演算系统是等价的。

关键词　泛与运算模型，泛蕴涵运算模型，幂零三角范数，剩余，伴随对

A Model of Nilpotent-Universal-Conjunction-Based Propositional Fuzzy Logic

LUO Min-Xia[1,2]　HE Hua-Can[1]
(College of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xian 710000)[1]
(Department of Mathematics, Yuncheng University, Yuncheng 044000)[2]

Abstract　In this paper, we discuss some properties about the model of universal conjunction $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$. We prove that the model of universal conjunction $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ is a nilpotent triangular norm, and the model of universal conjunction $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ and the model of universal implication $I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ form an adjoint pair. Moreover, we show that $([0,1],\vee,\wedge,*,\rightarrow,0,1)$ is a MV-algebra. The system PC(T) of fuzzy propositional calculus by the model of nilpotent universal conjunction $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ is given. We show that the system PC(T) of fuzzy propositional calculus and the system of Lukasiewicz logic propositional calculus are equivalent.

Keywords　The model of universal conjunction, The model of universal implication, Nilpotent triangular norm, Residuum, Adjoint pair

1　引言

随着计算机科学技术的迅猛发展，对数理逻辑提出了许多新的要求，从而促进了非经典逻辑和现代逻辑的迅速发展。本文第二作者为了探索逻辑的一般规律，提出建立能包容各种逻辑形态和推理模式的泛逻辑学理论[1]。在长期从事人工智能理论和实用专家系统的研究中发现，模糊命题之间的关系柔性是不可回避的客观存在，需要用连续可变的逻辑运算模型来描述，也就是说，在对立不充分的柔性世界中，不仅要考虑模糊性对命题逻辑真值的影响，而且要考虑关系柔性对命题联结词运算模型的影响。事物之间的广义相关性和广义自相关性是引起关系柔性的根本原因。泛逻辑学已经给出的零级二元泛命题联结词的运算模型如下[1]：

$$T(x,y,h)=\Gamma^1[(x^m+y^m-1)^{1/m}]$$

$$S(x,y,h)=1-\Gamma^1[[(1-x)^m+(1-y)^m-1]^{1/m}]$$

$$I(x,y,h)=ite\{1|x\leqslant y;0|m\leqslant 0\text{且 }y=0\text{且 }x\neq 0;\Gamma^1[(1-x^m+y^m)^{1/m}]\}$$

其中 $m=(3-4h)/(4h(1-h))$，$m\in R$，$h\in[0,1]$。$S=ite\{\beta|\alpha;\gamma\}$ 是条件表达式，表示“如果 α 为真，则 $S=\beta$；否则 $S=\gamma$”。$\Gamma^1[x]$ 表示把 x 限制在 $[0,1]$ 内，即 $\Gamma^1[x]=ite\{1|x>1;0|x<0$ 或为虚数；$x\}$。

泛非运算模型：$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$。其中 $k=2^{-1/n}$，$n\in R^+$。

本文只讨论零级二元柔性命题联结词 $(h\in(0,0.75))$ 的一些性质；证明了泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是一个幂零三角范数；并且泛与运算 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 与泛蕴涵运算 $I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是一个伴随对；有界格 $([0,1],\vee,\wedge,*,\rightarrow,0,1)$ 作成一个 MV-代数；进一步证明了基于泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 的模糊命题演算系统与 Lukasiewicz 逻辑命题演算系统是等价的。

2　泛命题联结词的性质

定义2.1[2]　设 T 是 $[0,1]$ 上的二元运算，$T:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 任意 $x,y,z\in[0,1]$，称 T 是一个三角范数，是指满足下列条件：

(1) $T(x,y)=T(y,x)$；(2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$；(3) 当 $y\leqslant z$ 时，$T(x,y)\leqslant T(x,z)$；(4) $T(x,1)=x$。

如果三角范数关于 x,y 分别是连续的，称为连续三角范数。

由三角范数的定义可看出，如果 T 是一个三角范数，则 $([0,1],T)$ 作成一个交换半群。

设 $X=[0,1]$，$*_1$，$*_2$ 是两个三角范数，如果半群 $(X,$

*)本文得到国家自然科学基金(60273087)和北京市自然科学基金(4032009)资助。**罗敏霞**　副教授，博士生，主要研究方向为代数学，人工智能原理及应用。**何华灿**　教授，博士生导师，主要研究方向为人工智能原理及应用，泛逻辑学。

$*_1$)与半群(X, $*_2$)同构，则我们称三角范数$*_1$与$*_2$是同构的[2]。

定义2.2[1] 连续三角范数$T(x,y)$如果满足$T(x,x)<x(x\in(0,1))$，则称为阿基米德型三角范数。阿基米德型三角范数$T(x,y)$如果有$T(x,y)=0$的平台区，则称为幂零三角范数。

定义2.3[2] 设(L,≤)是一个格，(L, $*$)是一个具有零元(单位元)的半群。

(1) 三元组(L, $*$, ≤)称为一个格序独异点，如果任意$x,y,z\in L$满足条件：

(LM1)$x*(y\vee z)=(x*y)\vee(x*z)$

(LM2)$(x\vee y)*z=(x*z)\vee(y*z)$

(2)一个格序独异点称为是可换的，如果半群(L, $*$)是交换半群。

(3)一个可换格序独异点(L, $*$, ≤)称为一个可换的剩余格序独异点，如果存在一个二元运算$\rightarrow$: $L^2\rightarrow L$使得任意$x,y,z\in L$, $x*y\leqslant z$当且仅当$x\leqslant y\rightarrow z$，此时称$*$与$\rightarrow$是一个伴随对[3]。

(4)一个格序独异点(L, $*$, ≤)称为整格序独异点，如果(L,≤)存在一个最大元并且是半群(L, $*$)的零元。

(5)一个可换的整格序独异点(L, $*$, ≤)称为可除的，如果任意$x,y\in L$, $x\leqslant y$，存在$z\in L$使$y*z=x$。

引理2.1[2] 设T是一个三角范数，f:[0,1]→[0,1]是一个严格递增的双射，则算子

T_f: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$

$T_f(x,y)=f^{-1}(T(f(x),f(y)))$

是一个三角范数，且T_f与T是同构的。

引理2.2[2] 设函数$*$: $[0,1]^2\rightarrow[0,1]$，则([0,1], $*$, ≤)是可换剩余的、可除的整格序独异点当且仅当"$*$"是一个连续的三角范数，且任意$(x,y)\in[0,1]^2$, $x\wedge y=x*(x\rightarrow y)$; $x\vee y=((x\rightarrow y)\rightarrow y)\wedge((y\rightarrow x)\rightarrow x)$。

命题2.1 设$T(x,y,h)$是零级二元泛与运算模型($h\in(0,0.75)$)，简记为"$*$"，定义如下：

$$x*y\equiv T(x,y,h)=(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}$$

任意$x,y\in[0,1]$

其中$m=(3-4h)/(4h(1-h))$, $m\in(0,+\infty)$, $h\in(0,0.75)$，则下列结论成立：

(1)([0,1],≤)是一个格，其中≤是实数的自然顺序；

(2)$x*(y\vee z)=(x*y)\vee(x*z)$, $(x\vee y)*z=(x*z)\vee(y*z)$，([0,1], $*$, ≤)是一个格序独异点；

(3)([0,1], $*$, ≤)是一个可换的整格序独异点；

(4)([0,1], $*$, ≤)是一个可换的、可除的、整格序独异点。

命题2.1可直接由定义2.3证明。

命题2.2 设$T(x,y,h)$的定义同命题2.1，泛蕴涵运算($h\in(0,0.75)$)定义如下：

$$I(x,y,h)=(\min(1,1-x^m+y^m))^{1/m}$$

(任意$x,y\in[0,1]$)

其中$m=(3-4h)/(4h(1-h))$, $m\in(0,+\infty)$, $h\in(0,0.75)$，则下列结论成立：

(1)$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$是一个三角范数，且T与有界与算子$T_1(x,y)=\max(0,x+y-1)$(任意$x,y\in[0,1]$)是同构的；

(2)泛蕴涵运算$I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$是泛与运算$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$的剩余，即$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$与$I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$是伴随对；

(3)$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$是连续三角范数；

(4)$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$是幂零三角范数。

证明：(1)设$f(x)=x^m$, $x\in[0,1]$, $m\in(0,+\infty)$，则f: [0,1]→[0,1]是一个严格递增的双射。设$T_1(x,y)=\max(0,x+y-1)$任意$x,y\in[0,1]$，则$T_1(x,y)$是一个三角范数，那么由引理2.1：

$$T(x,y,h)=f^{-1}(T_1(f(x),f(y)))$$
$$=(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}$$

其中$m\in(0,+\infty)$, $h\in(0,0.75)$，则$T(x,y,h)$是一个三角范数，且$T(x,y,h)$与$T1(x,y)$是同构的。

(2)泛与运算T简记为"$*$"。设$x*y\leqslant z$，即$(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}\leqslant z$, $\max(0,x^m+y^m-1)\leqslant z^m$，因此，$x^m+y^m-1\leqslant z^m$, $x^m\leqslant 1-y^m+z^m$，所以，$x\leqslant(1-y^m+z^m)^{1/m}$。又$x\leqslant 1$，从而，$x\leqslant(\min(1,1-y^m+z^m))^{1/m}=I(y,z,h)$。

反过来，设$x\leqslant(\min(1,1-y^m+z^m))^{1/m}=I(y,z,h)$，则$x\leqslant(1-y^m+z^m)^{1/m}$, $x^m\leqslant 1-y^m+z^m$，即$x^m+y^m-1\leqslant z^m$，因此，$(x^m+y^m-1)^{1/m}\leqslant z$。又$0\leqslant z$，所以，$(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}\leqslant z$，即$x*y\leqslant z$。

(3)由上面(2)，命题2.1及引理2.2可证。

(4)由定义2.2可直接证明。

命题2.3 泛非命题联结词：$N(x,k)=(1-x^n)^{1/n}$，其中$k=2^{-1/n}$, $n\in R^+$, $k\in[0,1]$。当$n=m$时，$N(x,k)=(1-x^m)^{1/m}$，则$N(x,k)=I(x,0,h)$ $(h\in(0,0.75))$。

证明：$I(x,0,h)=(\min(1,1-x^m+0^m))^{1/m}=(1-x^m)^{1/m}=N(x,k)$。

命题2.4 设泛与运算联结词简记为"$*$"，泛蕴涵运算联结词简记为"→"，任意$x,y\in[0,1]$, $h\in(0,0.75)$，则下列结论成立：(1)$x\wedge y=x*(x\rightarrow y)$；(2)$x\vee y=(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$；(3)$(x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x)=1$；(4)$(x\rightarrow 0)\rightarrow 0=x$。

证明：(1)当$x\leqslant y$时，$x\rightarrow y=1$, $x*(x\rightarrow y)=x*1=x=x\wedge y$。当$x>y$时，$x\rightarrow y=(1-x^m+y^m)^{1/m}$,

$$x*(x\rightarrow y)=(\max(0,x^m+(1-x^m+y^m)-1))^{1/m}=y=x\wedge y$$

(2)当$x\leqslant y$时，$(x\rightarrow y)\rightarrow y=1\rightarrow y=y=x\vee y$。当$x>y$时，

$$(x\rightarrow y)\rightarrow y=(1-x^m+y^m)^{1/m}\rightarrow y=(\min(1,1-(1-x^m+y^m)+y^m))^{1/m}=x=x\vee y$$

同理可证，$x\vee y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$，所以，$x\vee y=(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$。

(3)，(4)容易证明。

命题2.5 基于泛与运算模型$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$的模糊逻辑命题联结词的完全集是{¬，→}。

证明：任意$x,y\in[0,1]$,

$$\neg(x\rightarrow\neg y)=\neg((\min(1,1-x^m+(1-y^m)))^{1/m})=(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}=x*y$$

再由命题2.4可知，{¬，→}是基于泛与运算模型$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$的模糊逻辑命题联结词的完全集。

定义2.4[3] (2,2,2,2,0,0)型代数(X, ∨, ∧, $*$, →, 0, 1)称为MV-代数，如果以下条件成立：(1)(X, ∨, ∧, 0, 1)是有界格；(2)(X, $*$, 1)是以1为单位元的交换半群；(3)($*$, →)是X上的伴随对；(4)$x\wedge y=x*(x\rightarrow y)$；(5)$(x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x)=1$；(6)$(x\rightarrow 0)\rightarrow 0=x$。

定理2.1 ([0,1], ∨, ∧, $*$, →, 0, 1)作成一个MV-代数，其中"$*$""→"分别是泛逻辑学中泛与运算($h\in(0,0.75)$)、泛蕴涵运算($h\in(0,0.75)$)。

3 基于幂零泛与运算模型的模糊逻辑命题演算系统

前面已经证明泛逻辑的零级泛与运算 $T(x,y,h)=(\max(0,x^m+y^m-1))^{1/m}$ 任意 $x,y\in[0,1]$，其中 $m=(3-4h)/(4h(1-h))$，$m\in(0,+\infty)$，$h\in(0,0.75)$ 是幂零三角范数，而且与有界与算子 $T_1(x,y)=\max(0,x+y-1)$ 同构。设三角范数 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是命题联结词"&"的真值函数，$T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 的剩余 $I(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 是命题联结词"→"的真值函数。

定义3.1 由泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 确定的命题演算系统记为 PC(T)。$S=\{\underline{0},P_1,P_2,\cdots\}$ 是可数集，¬，→分别是一元运算与二元运算，由 S 生成的 $\{\neg,\rightarrow\}$ 型自由代数记作 $F(S)$。$F(S)$ 中的元素叫命题、句子或公式，S 中元素叫原子命题或原子公式。

在 PC(T)中，命题联结词¬，→的真值函数分别是 $N(x,k)=(1-x^m)^{1/m}$，$I(x,y,h)=(\min(1,1-x^m+y^m))^{1/m}(h\in(0,0.75))$，命题$\underline{0}$的真值是0。另外我们可定义其它命题联结词：

$P\&Q:\neg(P\rightarrow\neg Q)$ $\quad P\wedge Q:P\&(P\rightarrow Q)$

$P\vee Q:(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$ $\quad \neg P:P\rightarrow\underline{0}$

$P\equiv Q:(P\rightarrow Q)\&(Q\rightarrow P)$

定义3.2 命题演算系统 PC(T)的一个赋值是：映射 $e:F(S)\rightarrow[0,1]$，且满足 $e(0)=0$，$e(P\rightarrow Q)=e(P)\rightarrow e(Q)$，$e(P\&Q)=e(P)*e(Q)$，其中等式右边的"→"，"*"分别代表泛逻辑中的泛蕴涵运算与泛与运算。

命题3.1 对任意公式 $P,Q\in F(S)$，$e(P\wedge Q)=\min(e(P),e(Q))$，$e(P\vee Q)=\max(e(P),e(Q))$。

定义3.3 设 $P\in F(S)$，如果对任意一个赋值 e，均有 $e(P)=1$，称 P 是 PC(T)的1-重言式。

定理3.1 下列公式都是 PC(T)的1-重言式：(1)$P\rightarrow(Q\rightarrow P)$；(2)$(P\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R))$；(3)；$(\neg P\rightarrow\neg Q)\rightarrow(Q\rightarrow P)$；(4)$((P\rightarrow Q)\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow P)\rightarrow P)$；(5)若 $P,P\rightarrow Q$ 都是 PC(T)的1-重言式，则 Q 也是 PC(T)的1-重言式。

证明：任意 $P,Q,R\in F(S)$，设 e 为任意一个赋值函数，$e(P)=x,e(Q)=y,e(R)=z$。

(1)$x\rightarrow(y\rightarrow x)=x\rightarrow(\min(1,1-y^m+x^m))^{1/m}=1$；

(2)由命题2.4，$x*(x\rightarrow y)=\min(x,y)\leqslant y,y*(y\rightarrow z)\leqslant z$，所以，$((x\rightarrow y)*(y\rightarrow z))*x=(x*(x\rightarrow y))*(y\rightarrow z)\leqslant y*(y\rightarrow z)\leqslant z$。再由命题2.2(2)，$(x\rightarrow y)*(y\rightarrow z)\leqslant x\rightarrow z$，$x\rightarrow y\leqslant(y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z)$。从而，$1\leqslant(x\rightarrow y)\rightarrow((y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z))$，所以，$(x\rightarrow y)\rightarrow((y\rightarrow z)\rightarrow(x\rightarrow z))=1$；

(3)因为 $(x\rightarrow 0)=(1-x^m)^{1/m}$，$(y\rightarrow 0)=(1-y^m)^{1/m}$，则 $(x\rightarrow 0)\rightarrow(y\rightarrow 0)=(\min(1,1-y^m+x^m))^{1/m}$，又 $x\rightarrow x=1$，所以，$((x\rightarrow 0)\rightarrow(y\rightarrow 0))\rightarrow(y\rightarrow x)=1$；

(4)由命题2.4直接可证。

(5)因为 $e(P)=1$，$e(P\rightarrow Q)=e(P)\rightarrow e(Q)=1\rightarrow e(Q)=1$，而 $1\rightarrow e(Q)=e(Q)$，从而，$e(Q)=1$。

定义3.4 由泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 确定的模糊命题演算系统 PC(T)由下面两部分组成：

(Ⅰ)PC(T)中公理：设 $S=\{\underline{0},P_1,P_2,\cdots\}$ 是可数集，$F(S)$ 是由 S 生成的 $\{\neg,\rightarrow\}$ 型自由代数，$F(S)$ 中以下形式的公式称为公理：

(1)$P\rightarrow(Q\rightarrow P)$；(2)$(P\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R))$；(3)$(\neg P\rightarrow\neg Q)\rightarrow(Q\rightarrow P)$；(4)$((P\rightarrow Q)\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow P)\rightarrow P)$。

(Ⅱ)PC(T)中的推理规则为分离规则 MP：由公式 P，$P\rightarrow Q$ 可推得 Q。

定理3.2 由泛逻辑的零级幂零泛与运算模型 $T(x,y,h)(h\in(0,0.75))$ 确定的模糊命题演算系统 PC(T)与 Lukasiewicz 逻辑命题演算系统是等价的。

关于泛逻辑的零级泛运算模型中，h 在其它区间的情形，我们另文讨论。

参考文献

1 何华灿.泛逻辑学原理[M].北京:科学出版社,2001

2 Klement E P,Mesiar R, Pap E. Triangular Norms [M]. Kluwer Academic Publishers, 2000

3 Hajek P. Matamathematics of Fuzzy Logic [M]. Kluwer Academic Publishers,1998

4 Hajek P. Observations on the Monoidal t-norm Logic [J]. Fuzzy Set and Systems,2002(132):107～112

5 Burris S. Sankappanavar H P. A Course in Universal Algebra [M]. Springer-verlag New York Heidelberg Berlin,1981

(上接第53页)

常是由于某校外 IP 开设了针对图书馆的代理服务所引起的。

结论 本文针对现有可视化审计方法在 Web 应用环境中的效率问题，定义了多层用户行为模型，并针对该行为模型提出了基于 SOM 的可视化算法，用以为安全管理员提供可视化的审计信息。实验表明，采用本文方法有利于安全管理员高效地进行安全审计工作，并且在可视化算法中采用多层行为模型可大大提高安全审计系统的效率。利用本文的安全审计模型，为 Web 安全审计提供了一条新的途径。

依据本文定义的分层模型可有效提高交互速度，提高审计效率，但如何划分行为模型的层次需依据审计规则。因此，在今后工作中，笔者将进一步研究根据组织安全策略制定审计规则 Filter 与 Interval 的方法。

参考文献

1 戴英侠,连一峰,王航.系统安全与入侵检测.北京:清华大学出版社,2002

2 Anderson J.P. Computer security threat monitoring and surveillance:[Technical Report]. James P. Anderson Co. ,Fort Washington,Pennsylvania,1980

3 Girardin L, Brodbeck D.A Visual Approach for Monitoring Logs. In:Proc. of the Twelfth Systems Administration Conference (LISA'98),1998. 299～308

4 Takada T. Koike H. Tudumi: Information Visualization System for Monitoring and Auditing Computer Logs. In:Proc. of the Sixth Intl. Conf. on Information Visualisation (IV'02),2002

5 de Backer S,Naud A. Scheunders P. Non-linear dimensionality reduction techniques for unsupervised feature extraction. Pattern Recognition Letters,1998,19: 711～720

6 Logging Control In W3C httpd. http://www.w3.org,1995

7 Lam K-Y,Hui L,Chung S-L. Multivariate Data Analysis Software for Enhancing System Security. J. Systems Software, 1995, 31: 267～275

8 Denning D E. An intrusion detection model. IEEE Trans. on Software Engineering,1987,SE-13: 222～232

9 Kohonen T. Self-Organizing Maps. Berlin: Springer,2001

10 边肇祺,张学工,等.模式识别.北京:清华大学出版社,1999