

# 基于带权稀疏表示和字典学习的图像去噪模型

孙少超

(公安海警学院 宁波 315801)

**摘 要** 利用 GMM 模型对自然图像块进行学习,对高斯分量的协方差矩阵做 PCA,用其特征向量组成的矩阵作为子字典,用特征值的大小作为对稀疏系数加权的依据,并将该模型应用到 CSR 模型中得到一种新的去噪模型,并给出模型的优化算法。为了验证提出的模型的有效性,设计了比较的仿真实验,实验表明与一些先进的模型相比,该方法具有优势。

**关键词** 图像去噪,非局部自相似性,稀疏表示,混合高斯模型

中图法分类号 TP391 文献标识码 A

## Image Denoising Model via Weighted Sparse Representation and Dictionary Learning

SUN Shao-chao

(China Maritime Police Academy, Ningbo 315801, China)

**Abstract** The GMM model is trained by natural image patches, covariance matrix of the Gaussian component is used to form sub dictionary and feature value is used to weight the sparse coefficient. A novel model was proposed when introducing GMM into CSR model, and its optimization algorithm was given. Experimental results show that our method has advantages compared with some advanced models.

**Keywords** Image denoising, Nonlocal self-similarity, Sparse representation, GMM

## 1 引言

图像去噪作为低层视觉中的经典问题被广泛研究,各种图像去噪方法在过去几十年里不断被提出,包括基于滤波的方法<sup>[1]</sup>、基于混合的方法<sup>[2]</sup>、基于全变分的方法<sup>[3]</sup>、基于小波和曲波的方法<sup>[4]</sup>、基于稀疏表达的方法<sup>[5]</sup>和基于非局部自相似性的方法<sup>[6]</sup>等。

图像建模在图像去噪中发挥着核心作用。通过建立小波变换系数的拉普拉斯分布的模型,采用多小波阈值去噪的方法,例如经典的软阈值<sup>[7]</sup>。CHANG 等人<sup>[8]</sup>建立了小波变换系数的广义高斯分布模型,并提出了贝叶斯收缩算法。考虑到跨尺度的小波系数的相关性,文献<sup>[9]</sup>提出了使用高斯尺度混合建立的图像模型,达到了很好的去噪效果。自然图像梯度具有重尾分布<sup>[10]</sup>和基于全变分(TV)的方法<sup>[11,12]</sup>,实际是假设拉普拉斯分布图像梯度的图像去噪,这已经被广泛接受。最近,文献<sup>[13]</sup>提出了 CSF 来进行有效的图像去噪。

非局部自相似性(NSS)先验是图像恢复中最为成功的先验。非局部均值<sup>[14]</sup>和非局部正规化<sup>[15]</sup>的方法相比于传统的基于局部自相似性的方法极大地提高了图像去噪效果。Dabov 等人<sup>[16]</sup>构建了三维立体的非局部相似性小块,并且在稀疏的三维变换域进行协同过滤,BM3D 算法已经成为图像去噪的基准;Mairal 等人<sup>[17]</sup>提出了 LSSC 算法,通过组合稀疏编码来恢复 NSS;NSP<sup>[18]</sup>的方法中认为 NSS 小块组成的矩阵奇异值服从拉普拉斯分布;Dong 等人<sup>[5]</sup>把 NSS 和局部稀

疏编码集成到 NCSR 框架中,这个框架显示出了强大的图像复原能力。本文将基于 GMM 的字典学习算法引入到图像去噪的 SCR<sup>[19]</sup>模型中,不仅提高了模型的求解能力,而且增强了模型的性能。

## 2 基于混合高斯模型的字典学习

非局部自相似性在图像恢复领域发挥着重要的作用,因此本文采用的字典针对非局部自相似的图像块组进行学习。

### 2.1 数据预处理

对于一个给定的尺寸为  $P \times P$  的图像块,可以在整个图像中找出  $M$  个与它相似的非局部图像块。通常把欧氏距离接近的图像块看成相似的。这  $M$  个相似的图像块组成一个图像块组,用  $\{x_m\}_{m=1}^M$  表示,其中  $x_m \in R^{P^2}$ ,块组的均值用  $\mu$  表示:

$$\mu = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_m \quad (1)$$

对输入图像块减去均值,可以得到新的图像块  $\bar{x}_m = x_m - \mu$ ,文献<sup>[21]</sup>认为采用这种处理使相似图像块组更稀疏。

### 2.2 基于 GMM 的字典学习

将图像块进行上面的预处理之后,采用 GMM 方法对图像块进行训练。

可以假设自然图像块源于一个  $K$  维子空间的潜在结构,所以一个给定的图像块  $x_i$  的概率可以被定义为  $K$  个高斯的加权和,如式(2)所示:

本文受公安部技术研究计划项目(2015JSYJC029),公安海警学院研究中心、科研团队研究计划项目资助。

孙少超(1984—),男,博士,讲师,主要研究方向为机器学习、计算机视觉,E-mail:shaochao0631@sina.com。

$$p(x_i|\Theta) = \sum_{k=1}^K \omega_k p_k(x_i|\theta_k) \quad (2)$$

其中,  $\Theta = (\omega_1, \dots, \omega_K, \theta_1, \dots, \theta_K)$  是一组参数且  $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$ 。注意, 每一个  $\theta_k$  描述了平均值为  $\mu_k$ 、协方差矩阵为  $\Sigma_k$  的高斯密度函数  $p_k$ , 且  $p_k(x_i|\theta_k) = c \exp(\frac{1}{2}(\chi_i - \mu_k)^T \sum_{k=1}^K \omega_k (\chi_i - \mu_k))$ 。参数  $\Theta$  可以由最大似然估计确定, 通常利用的是期望最大化 (EM) 算法。

引入类标签变量  $C \in \{1, 2, \dots, K\}$ 。对于每一块  $x_i$ , 采用 GMM 学习的概率密度函数 PDF 来判断  $x_i$  属于哪一类  $C_i$ , 式(3)表示属于第  $k$  类的概率:

$$p(k|x_i; \Theta) = \frac{\omega_k p_k(x_i|\theta_k)}{\sum_{j=1}^K \omega_j p_j(x_i|\theta_j)}, k=1, \dots, K \quad (3)$$

根据式(3)找出其中的最大值赋值给  $C_i$ , 每一类对应的协方差矩阵为  $\Sigma_k$ , 对其进行奇异值分解 (如式(4)) 得到相应的子字典为  $D_k$ , 即把全局字典  $D$  分成  $K$  个子字典,  $D = [D_1, D_2, \dots, D_K]$ 。

$$\Sigma_k = D_k \Lambda D_k^T \quad (4)$$

上述字典将用于下面提出的去噪模型中, 采用这种字典基于以下两点考虑: 1) 上述的字典对应的特征值可以用来对稀疏系数进行加权; 2) 因为得到的字典矩阵是酉矩阵, 所以上述字典有助于去噪模型的求解。

### 3 结合 GMM 模型的稀疏表示去噪模型

把第 2 节学到的字典应用到图像去噪模型中, 并且假设稀疏系数的先验分布为拉普拉斯分布, 且标准差与对应的  $\lambda_i$  成反比, 可以得到稀疏系数的先验概率为:

$$P(\alpha) = \prod_{i=1}^p \frac{c}{\sqrt{2} \lambda_i} \exp(-\frac{c \sqrt{2} |\alpha_i|}{\lambda_i}) \quad (5)$$

将上面的字典和带权的先验  $P(\alpha)$  代入到文献[19]提出的 CSR 模型中, 可以得到新的模型:

$$\alpha_{x_i} = \arg \min_{\alpha} \{ \frac{1}{2} \|x_i - D_i \alpha\|_2^2 + w \|\alpha\|_1 + \gamma \|\alpha - \bar{\alpha}_{x_i}\|_{l_p} \} \quad (6)$$

其中,  $x_i$  为用 2.1 节所提方法处理过的图像块向量,  $D_i$  为根据式(4)计算给出该图像块分配的字典,  $\gamma$  为权衡常数,  $W$  为稀疏系数权重, 如式(7)所示:

$$w_j = C \star 2\sqrt{2} \sigma^2 / (\lambda_i + \epsilon) \quad (7)$$

其中, 为了防止分母为零,  $\epsilon$  一般取一个很小的数,  $\sigma^2$  为噪声图像的方差,  $\bar{\alpha}_x$  为相似块系数的带权平均, 如式(8)所示:

$$\bar{\alpha}_x = \sum_{j \in C_i} \omega_{i,j} \alpha_{i,j} \quad (8)$$

其中,  $C_i$  表示与图像块  $x_i$  相似的图像块组成的集合,  $\alpha_{i,j}$  表示与图像块  $x_i$  相似的图像块  $x_j$  对应的稀疏。  $\omega_{i,j}$  表示权重, 为:

$$\omega_{i,j} = \exp(-\frac{\|x_i - x_{i,j}\|_2^2/h}{W}) \quad (9)$$

其中,  $h$  是尺度常数,  $W$  为归一化常数。

关于模型(6)的求解, 因为  $D_i$  为酉矩阵, 令  $\alpha_0 = D_i x_i$ , 并且为了求解方便令  $l_p = 1$ , 可以改写模型(6)为:

$$\alpha_{x_i} = \arg \min_{\alpha} \{ \frac{1}{2} \|\alpha_0 - \alpha\|_2^2 + W \|\alpha\|_1 + \gamma \|\alpha - \bar{\alpha}_{x_i}\|_{l_p} \} \quad (10)$$

其中

$$\alpha_j^{(i+1)} = \begin{cases} s_{w_j, \gamma, \bar{\alpha}_{x_i}}(\alpha_0^{(i)}), & \bar{\alpha}_{x_i} \geq 0 \\ -s_{w_j, \gamma, -\bar{\alpha}_{x_i}}(-\alpha_0^{(i)}), & \bar{\alpha}_{x_i} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中  $S_{\tau_1, \tau_2, b}(t)$  用公式表示如下:

$$S_{\tau_1, \tau_2, b}(t) = \begin{cases} t + \tau_1 + \tau_2, & t < -\tau_1 - \tau_2 \\ 0, & -\tau_1 - \tau_2 \leq t \leq \tau_1 - \tau_2 \\ t - \tau_1 + \tau_2, & \tau_1 - \tau_2 < t < \tau_1 - \tau_2 + b \\ b, & \tau_1 - \tau_2 + b \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 + b \\ t - \tau_1 - \tau_2, & t > \tau_1 + \tau_2 + b \end{cases} \quad (12)$$

该方法的详细过程描述见算法 1。

#### 算法 1

1. 选定  $K$ , 用 GMM 方法对经过 2.1 节方法处理过的自然无噪声的图像块进行训练, 得到参数  $\Theta$ ;
2. 选定参数  $c, \gamma, \delta, L$ , 输入噪声图像  $Y$ , 采用 2.1 节方法处理得到很多图像块  $y_i$ , 初始化  $x_i^{(0)} = y_i, y_i^{(0)} = y_i$ , 噪声方差  $\sigma_n^2$ , 对  $x_i^{(0)}$  根据式(3)分配字典  $D_i, \alpha_0^{(0)} = D_i y_i^{(0)}$ , 为了书写方便, 后面省略下标;
3.  $k=1; L$ , 执行
4.  $y^{(k)} = x^{(k-1)} + \delta(y - y^{(k-1)})$ ;
5. 对  $y^{(k)}$  每一小块  $y_j$  根据式(3)计算  $C_j$   
令  $\alpha_0^{(k)} = D_i y_i$ , 寻找相似分块集合  $Y_j$ ;  
根据式(7)计算  $w_j^{(k)}$ ;  
根据式(8)计算  $\bar{\alpha}_x^{(k)}$ ;  
根据式(11)求得  $\alpha_i^{(k)}$
6. 根据  $\alpha_i^{(k)}$  整合得出估计图像  $x^{(k)}$ , 返回步骤 3。

### 4 仿真实验

为了验证上面提出算法的有效性, 本文将算法应用到实际的例子中, 并将所提算法跟其他经典的算法 (包括 BM3D<sup>[16]</sup>, LSSC<sup>[17]</sup>, WNNM<sup>[20]</sup>) 作比较。本文训练 GMM 模型的样本来自 Berkeley 数据集, 从这些图像中提取了  $2 \times 10^6$  个图像块。图像块的尺寸和很多文献一样设置为  $8 \times 8, 9 \times 9$  和  $10 \times 10$ , 分别针对  $\sigma \leq 40, 40 < \sigma \leq 60$  和  $\sigma > 60$ 。

表 1 不同算法的 PSNR(db) 比较 ( $\sigma=30$ )

| 图像名     | $\sigma=30$ |       |       |       |
|---------|-------------|-------|-------|-------|
|         | BM3D        | LSSC  | WNNM  | Ours  |
| C. man  | 28.62       | 28.63 | 28.79 | 28.83 |
| house   | 32.03       | 32.41 | 32.49 | 32.16 |
| Parrot  | 28.04       | 27.91 | 28.33 | 28.35 |
| Peppers | 29.30       | 29.16 | 29.49 | 29.61 |

表 2 不同算法的 PSNR(db) 比较 ( $\sigma=50$ )

| 图像名     | $\sigma=50$ |       |       |       |
|---------|-------------|-------|-------|-------|
|         | BM3D        | LSSC  | WNNM  | Ours  |
| C. man  | 26.10       | 26.35 | 26.42 | 26.66 |
| house   | 29.69       | 30.01 | 30.31 | 30.01 |
| Parrot  | 25.61       | 25.81 | 26.07 | 26.13 |
| Peppers | 26.65       | 26.78 | 26.95 | 27.06 |

表 3 不同算法的 PSNR(db) 比较 ( $\sigma=100$ )

| 图像名     | $\sigma=100$ |       |       |       |
|---------|--------------|-------|-------|-------|
|         | BM3D         | LSSC  | WNNM  | Ours  |
| C. man  | 23.07        | 23.15 | 23.35 | 23.49 |
| house   | 25.51        | 25.71 | 26.79 | 25.94 |
| Parrot  | 22.61        | 22.74 | 23.19 | 23.21 |
| Peppers | 23.31        | 23.02 | 23.44 | 23.68 |

(下转第 236 页)

on distance entropy in noisy environment[C]//5th International Joint Conference on INC, IM S, and IDC, Seoul, Korea; IEEE Computer Society, 2009; 1364-1367

- [10] 朴春俊,马静霞,徐鹏.带噪声语音端点检测方法研究[J].计算机应用,2006,26(11):2685-2686
- [11] 张宇波,邢立钊.基于小波分析与 PSO-ELM 的语音端点检测算法研究[J].中北大学学报(自然科学版),2016,37(1):33-37
- [12] 赵欢,王纲金,赵丽霞.一种新的对数能量谱熵语音端点检测方法[J].湖南大学学报(自然科学版),2010,37(7):72-77

(上接第 209 页)

实验结果如表 1—表 3 所列,对于 Pepper 图片,图 1 给出了所提算法在不同噪声下的去噪效果。从实验结果可以看出,算法相对其他算法有优势,尤其在大噪声的情况下。

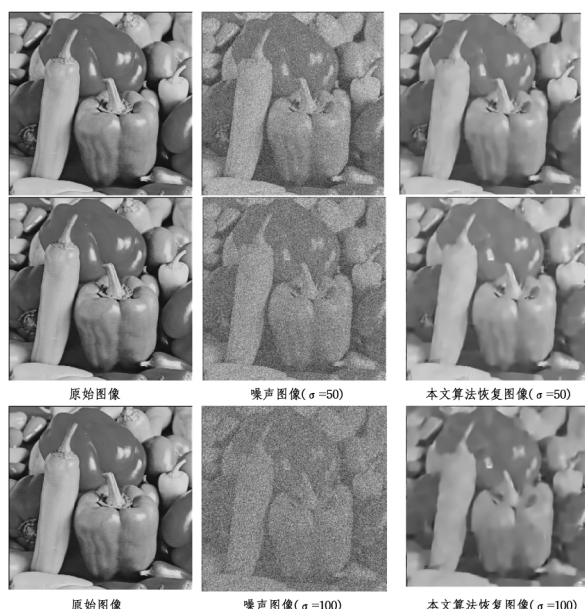


图 1 所提算法在不同噪声下的去噪效果

**结束语** 本文对传统的基于稀疏表示的图像去噪模型进行改进,将非局部自相似性和稀疏系数的权重融入到稀疏表示模型中,提出了一种新的图像去噪模型,并给出该模型的优化算法。仿真结果表明,所提模型在很多情况下较其他一些先进的模型具有优势。

## 参 考 文 献

- [1] Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images[C]//ICCV. 1998; 839-846
- [2] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639
- [3] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. Multi-scale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460-489
- [4] Starck J L, Candes E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 670-684
- [5] Dong W, Zhang L, Shi G, et al. Nonlocally centralized sparse

representation for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(4): 1620-1630

- [6] Ji H, Liu C, Shen Z, et al. Robust video denoising using low rank matrix completion[C]//CVPR. 2010; 1791-1798
- [7] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans. Inf. Theor., 1995, 41(3): 613-627
- [8] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9): 1532-1546
- [9] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, et al. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(11): 1338-1351
- [10] Weiss Y, Freeman W T. What makes a good model of natural images? [C]//CVPR. 2007; 1-8
- [11] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1): 259-268
- [12] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. Multi-scale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460-489
- [13] Schmidt U, Roth S. Shrinkage fields for effective image restoration[C]//CVPR. 2014; 2774-2781
- [14] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//CVPR. 2005; 60-65
- [15] Peyre G, Bougleux S, Cohen L D. Nonlocal regularization of inverse problems[J]. Inverse Problems and Imaging, 2011, 5(2): 511-530
- [16] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095
- [17] Mairal J, Bach F, Ponce J, et al. Nonlocal sparse models for image restoration[C]//ICCV. 2009; 2272-2279
- [18] Wang S, Zhang L, Liang Y. Nonlocal spectral prior model for low-level vision[C]//ACCV. 2013; 231-244
- [19] Dong Wei-sheng, Li Xin, Zhang Lei, et al. Sparsity-based image denoising via dictionary learning and structure clustering[C]//CVPR. 2011; 457-464
- [20] Gu S, Zhang L, Zuo W, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising[C]//CVPR. 2014; 2862-2869
- [21] Xu J, Zhang L, Zuo W, et al. Patch Group Based Nonlocal Self-Similarity Prior Learning for Image Denoising[C]//ICCV. 2015