

由邻域导出的拟阵结构

李卉 祝峰 林姿琼

(闽南师范大学福建省粒计算及其应用重点实验室 漳州 363000)

摘要 通过利用覆盖的邻域和补邻域构造了一个集族,并且证明其满足拟阵的独立集公理,从而建立了一种拟阵结构,并且对这种拟阵的相关集、极小圈、秩函数和闭包等表达形式进行了研究。最后,给出了此类拟阵的对偶拟阵的独立集、极小圈的等价刻画。

关键词 粗糙集,覆盖,邻域,补邻域,拟阵

中图分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.013

Matroidal Structure Induced by Neighborhood

LI Hui ZHU Feng LIN Zi-qiong

(Lab of Granular Computing, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract This paper constructed a matroidal structure by the neighborhood of a covering. At first, a family of sets was constructed through neighborhood and complementary neighborhood on a covering and the family of sets was proved to satisfy independent set axioms. Thus a matroidal structure of a covering was established. Then, we investigated some characteristics of this kind of matroid, such as dependent set, circuit, rank function and closure. At last, we gave some equivalent characterizations of dual matroid of the matroid, such as independent set and circuit.

Keywords Rough set, Covering, Neighborhood, Complementary neighborhood, Matroid

1 引言

粗糙集理论最早是在1982年由波兰的Pawlak提出的。它作为一种处理不确定性和不精确性问题的工具,能有效地分析不精确、不一致、不完整等各种不完备的信息,还可以对数据进行分析 and 推理,从中发现隐含的知识,揭示潜在的规律。到目前为止,粗糙集已经成功地应用到许多不同的领域,如粒计算^[1]、知识获取^[2]、决策分析^[3]和其他领域^[4]。众所周知,等价关系在很多的实际应用中具有很大的局限性。为了更好地将粗糙集应用于实践,许多学者将等价关系进行了延伸和拓展,比如将等价关系推广到相容关系^[5]、相似关系^[6]和覆盖^[7,8]等。

拟阵理论由Whitney提出,作为一个广义的线性独立的向量空间,它是线性代数和图论的推广。许多研究学者将拟阵与经典粗糙集、覆盖粗糙集和模糊理论等结合起来。拟阵理论也在组合优化^[9]、算法设计^[10]、信息编码^[11]等领域有着广泛的应用。

目前为止,已有很多关于覆盖粗糙集和拟阵结合的研究。Wang等^[12]利用上近似数和横贯拟阵建立覆盖粗糙集的拟阵结构,得到了覆盖粗糙集中一些新的性质。Li等^[13]通过拟阵中的闭包算子建立粗糙集与拟阵之间的联系,用拟阵闭包刻

画了经典粗糙集中的近似算子,并将其推广到覆盖粗糙集中,提出了基于拟阵的覆盖粗糙集模型。本文从覆盖的邻域的角度来结合拟阵。首先通过覆盖的邻域和补邻域建立了一个集族,证明它满足拟阵的独立集公理,由此得出一种拟阵结构;然后在这种拟阵结构的基础上讨论了拟阵的相关集、极小圈、秩函数、闭包等的表达形式;最后研究了此拟阵的对偶拟阵的一些性质。

2 基本概念

本节主要介绍文中用到的一些有关覆盖粗糙集和拟阵理论的基本定义和一些重要的结果。令 U 是非空有限集合,称为论域。

2.1 覆盖粗糙集的一些概念

在覆盖粗糙集中,用一个集合来表示一个概念,用一个覆盖集族来表示人们所能掌握的全体基本概念,而其中心思想就是用基本概念来描述任一概念。

定义1^[14] 设 U 是一个非空论域, C 是 U 上的一个子集族,称 C 是 U 的一个覆盖,如果 C 中所有元都非空,且 $\bigcup C = U$ 。称有序对 (U, C) 为覆盖近似空间。

定义2^[15] (邻域、补邻域) 设 U 是一个非空论域, C 是 U 上的一个覆盖,对于任意的 $x \in U$,则

到稿日期:2015-04-16 返修日期:2015-06-10 本文受国家自然科学基金面上项目(61170128, 61379049),福建省教育厅科技重点项目(JA13192),福建省教育厅项目(产学研项目)(JA14194),福建省科技计划重点项目(2012H0043)资助。

李卉(1989—),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论及其应用,E-mail:lihui_gre@126.com;祝峰(1962—),男,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集与粒计算,E-mail:williamfengzhu@gmail.com;林姿琼(1979—),女,硕士,副教授,主要研究方向为粗糙集和粒计算,E-mail:joan26cn@163.com。

$$N_C(x) = \bigcap \{K \in C; x \in K\}$$

$$M_C(x) = \{y \in U; x \in N_C(y)\}$$

$N_C(x)$ 称为相对于 C 的关于 x 的邻域, $M_C(x)$ 称为相对于 C 的关于 x 的补邻域,在不引起混淆的情况下,省略下标 C 。

2.2 拟阵的基本概念

拟阵是图论和线性代数的推广,具有完备的公理系统,它可以从不同的但等价的角度来刻画。下面从独立集的角度来定义拟阵。

定义 3(拟阵^[16]) 设 U 是非空有限集合, I 是 U 的子集族。称 (U, I) 为一拟阵,常记为 $M=(U, I)$,如果它满足如下 3 个条件:

(I1) $\emptyset \in I$;

(I2) 若 $I \in I$, 且 $I_1 \subseteq I$, 则 $I_1 \in I$;

(I3) 若 $I_1, I_2 \in I$, 且 $|I_1| < |I_2|$, 则存在 $e \in I_2 - I_1$ 使得 $I_1 \cup \{e\} \in I$ 。

上面的拟阵的定义也被称为拟阵的独立集公理,用一个例子说明拟阵的概念。

例 1 $U = \{1, 2, 3\}, I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, 那么 (U, I) 是一个拟阵。

为了方便说明,对论域上的任意集族,定义如下的符号。

$$Upp(A) = \{X \subseteq U; \exists A \in A \text{ s. t. } A \subseteq X\};$$

$$Max(A) = \{X \in A; \forall Y \in A, X \subseteq Y \Rightarrow X = Y\};$$

$$Min(A) = \{X \in A; \forall Y \in A, Y \subseteq X \Rightarrow X = Y\};$$

$$Opp(A) = \{X \subseteq U; X \notin A\};$$

$$Com(A) = \{X \subseteq U; U - X \in A\}.$$

根据独立集,给出拟阵基的概念。

定义 4(基^[16]) 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,我们称拟阵的极大独立子集为 M 的基。记 $B(M)$ 为 M 的全体基的集合, 则 $B(M) = Max(I)$ 。

拟阵的极小圈与独立集具有很大的联系,根据拟阵的独立集来给出极小圈的定义。

定义 5(极小圈^[16]) 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,若子集 $X \in Opp(I) = 2^U - I$, 则 X 为 M 的一个相关集。令 $D(M)$ 表示由拟阵 M 的全体相关集组成的集合, 则有 $D(M) = Opp(I)$ 。极小的相关集叫做极小圈。令 $C(M)$ 表示由拟阵 M 的全体极小圈组成的集合, 则有 $C(M) = Min(Opp(I))$ 。

在拟阵中,秩函数是一个重要的概念,它往往会反映一个子集的性质和特征。以下借助独立集介绍秩函数的特征。

定义 6(秩函数^[16]) 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,对于任意的 $X \subseteq U$, 有:

$$r_M(X) = \max\{|I|; I \subseteq X, I \in I\}$$

其中, $r_M: P(U) \rightarrow Z$ 是一个函数,我们称 r_M 是拟阵 M 的秩函数。

命题 1^[16] 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,又设 r_M 是拟阵 M 的秩函数,则对任一个子集 $X \subseteq U, X \in I(M)$ 的充分必要条件是 $r_M(X) = |X|$ 。

拟阵的闭包是拟阵理论中的一个重要概念。拟阵和它的闭包可以互相决定。用拟阵的圈来呈现闭包算子的定义。

定义 7(闭包^[16]) 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,对任一个子集 $X \subseteq U, cl_M(X) = X \cup \{e \in U; \exists C \in C(M) \text{ s. t. } e \in C \subseteq X \cup \{e\}\}$ 叫做 X 关于 M 的闭包。

定义 8(对偶拟阵^[16]) 设 $M=(U, I)$ 是一个拟阵,其基集族 $B=B(M)$,以 $Com(B)$ 为基集合族的拟阵 M^* 为 M 的对偶拟阵。 M^* 的极小圈、独立集、基集族有时也分别记为 $C^*(M), I^*(M), B^*(M)$ 。

3 邻域和补邻域构造的拟阵结构

本节主要介绍了一种通过覆盖的邻域和补邻域导出拟阵的方法,并且用粗糙集的知识来刻画拟阵的一些特征。首先用邻域和补邻域来构造一个集族,其次证明这个集族满足拟阵定义中的独立集公理,确定了一种拟阵,并给出了这种拟阵的极小圈、秩函数以及闭包的等价刻画。

首先根据覆盖的邻域和补邻域定义一个集族。

定义 9 设 U 是一个非空论域, C 是 U 上的一个覆盖,定义一个关于邻域和补邻域的集族,如下:

$$I(C) = \{X \subseteq U; \forall x \in X, N(x) \neq M(x)\}$$

例 2 形象地说明了集族 $I(C)$ 是如何由邻域和补邻域构造的。

例 2 设 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, C = \{\{x_1\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}\}$ 是 U 上的一个覆盖,那么可以得到 $N(x_1) = \{x_1\}, N(x_2) = \{x_2, x_3\}, N(x_4) = \{x_3, x_4\}, N(x_3) = \{x_3\}, M(x_1) = \{x_1\}, M(x_2) = \{x_2\}, M(x_4) = \{x_4\}, M(x_3) = \{x_2, x_3, x_4\}$ 。从而可以得出 $I(C) = \{\emptyset, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$ 。

由邻域和补邻域构造的集族 $I(C)$ 满足拟阵的独立集公理,我们将给出证明。

命题 2 设 C 是论域 U 上的一个覆盖,那么 $I(C)$ 满足 (I1), (I2), (I3)。

证明: (I1) 由 $I(C)$ 的定义,很显然 $\emptyset \in I(C)$ 。

(I2) 设 $I \in I(C)$ 且 $I_1 \subseteq I$ 。如果 $I_1 \notin I(C)$, 那么存在 $y \in I_1$, 使得 $N(y) = M(y)$ 。因为 $I_1 \subseteq I$, 那么 $y \in I$, 这与 $I \in I(C)$ 矛盾。所以假设不成立。即 $I_1 \in I(C)$ 。(I2) 得证。

(I3) 如果 $I_1, I_2 \in I(C)$, 且 $|I_1| < |I_2|$, 那么对任意的 $x \in I_1$ 和 $y \in I_2$, 可以得出 $N(x) \neq M(x)$ 和 $N(y) \neq M(y)$ 。取 $e \in I_2 - I_1$, 那么 $N(e) \neq M(e)$, 对任意的 $t \in I_1 \cup \{e\}, N(t) \neq M(t)$ 。所以 $I_1 \cup \{e\} \in I(C)$ 。(I3) 得证。

上面的命题说明了 $I(C)$ 满足拟阵的独立集公理,即任一个覆盖可以经过以上方法导出一个拟阵。

定义 10 设 C 是论域 U 上的一个覆盖,则以 $I(C)$ 为独立集的拟阵定义为 $M(C) = (U, I(C))$, 称 $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵。

拟阵的相关集是拟阵的一个重要性质,接下来的命题给出拟阵相关集的一种等价刻画。

命题 3 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵。那么 $D(M) = \{X \subseteq U; \exists x \in X, N(x) = M(x)\}$ 。

证明: 根据相关集的定义,仅仅需要证明 $D(M) = Opp(I(C))$ 。对任意的 $X \in D(M)$, 存在 $x \in X$, 使得 $N(x) = M(x)$,

那么 $X \in \{X \subseteq U: \exists x \in X, N(x) = M(x)\}$, 即 $X \in Opp(I(C))$ 。那么 $D(M) \subseteq Opp(I(C))$ 。相反, 对任意 $X \in Opp(I(C))$, 即 $X \notin I(C) = \{X \subseteq U: \forall x \in X, N(x) \neq M(x)\}$, 那么存在 $x \in X$, 使得 $N(x) = M(x)$, 从而可以得出 $X \in D(M)$, 即 $Opp(I(C)) \subseteq D(M)$ 。综上可得 $D(M) = \{X \subseteq U: \exists x \in X, N(x) = M(x)\}$ 。

极小的相关集是极小圈, 那么借助上面的表达式给出极小圈的等价刻画如下。

命题 4 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵, 那么 $C(M) = \{\{x\}: x \in U, N(x) = M(x)\}$ 。

证明: 根据极小圈和相关集的定义, 可知 $C(M) = Min(D(M))$ 并且 $D(M) = \{X \subseteq U: \exists x \in X, N(x) = M(x)\}$ 。那么直接可以得到 $C(M) = \{\{x\}: x \in U, N(x) = M(x)\}$ 。

例 3(继续例 2) 根据例 2, 已经得到了每个元素的邻域和补邻域, 那么根据上面的表达式, 可以得到极小圈 $C(M) = \{x_1\}$ 。

拟阵的秩函数也是构造拟阵的一个重要的概念, 我们给出此类拟阵的秩函数的表达式。

命题 5 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵。那么 $r_{M(C)}(X) = |\{\{x\}: \forall x \in X, N(x) \neq M(x)\}|$ 。

证明: 根据命题 1, 需证 $r_{M(C)}(X) = |X| \Leftrightarrow X \in I(C)$ 。当 $r_{M(C)}(X) = |X|$ 时, 可以得到 $|\{\{x\}: \forall x \in X, N(x) \neq M(x)\}| = |X| \Leftrightarrow$ 对任意的 $x \in X$, 都有 $N(x) \neq M(x)$ 。根据 $I(C)$ 的定义可知 $X \in I(C)$ 。相反地, 当 $X \in I(C)$ 时, 据定义 6, $r_{M(C)}(X) = \max\{|I|: I \subseteq X, I \in I(C)\}$ 。那么可得 $r_{M(C)}(X) = |X|$ 。综上, 命题得证。

拟阵的闭包是拟阵理论中的一个重要概念。拟阵和它的闭包可以互相决定。

命题 6 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵, 那么 $cl_{M(C)}(X) = X \cup \{x \in U: N(x) = M(x)\}$ 。

证明: 根据闭包算子的定义, 需要证明 $\{x \in U: N(x) = M(x)\} = \{e \in U: \exists C \in C(M) \text{ s. t. } e \in C \subseteq X \cup \{e\}\}$ 。对任意 $x \in \{x \in U: N(x) = M(x)\}$, 根据 $C(M)$ 的定义可知 $x \in C(M)$, 那么 $x \in C(M) \subseteq X \cup \{x\}$, $\{x \in U: N(x) = M(x)\} \subseteq \{e \in U: \exists C \in C(M) \text{ s. t. } e \in C \subseteq X \cup \{e\}\}$ 。相反地, 设 $e \in \{e \in U: \exists C \in C(M) \text{ s. t. } e \in C \subseteq X \cup \{e\}\}$, 那么 $\exists C \in C(M)$ 使得 $e \in C \subseteq X \cup \{e\}$ 。因为 $e \in C \subseteq \{\{x\}: N(x) = M(x)\}$, 所以 $e \in \{x \in U: N(x) = M(x)\}$ 。那么 $\{e \in U: \exists C \in C(M) \text{ s. t. } e \in C \subseteq X \cup \{e\}\} \subseteq \{x \in U: N(x) = M(x)\}$ 。综上所述, 命题得证。

对偶拟阵是拟阵理论中相当基本而又重要的概念。接下来给出此类拟阵的对偶拟阵的一些表达形式。

命题 7 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵, $M^*(C)$ 是 $M(C)$ 的对偶拟阵。那么 $I^*(M) = \{X \subseteq U: \forall x \in X, N(x) = M(x)\}$ 。

证明: 因为 $I^*(M) = Low(Com(Max(I(C))))$, 而 $I(C) = \{X \subseteq U: \forall x \in X, N(x) \neq M(x)\}$, 所以 $I^*(M) = \{X \subseteq U: \forall x \in X, N(x) = M(x)\}$ 。

上面给出了对偶拟阵的独立集的表达形式, 下面来刻画对偶拟阵的极小圈。

命题 8 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵, $M^*(C)$ 是 $M(C)$ 的对偶拟阵。那么 $C^*(M) = \{\{x\}: x \in U, N(x) \neq M(x)\}$ 。

证明: 因为 $C^*(M) = Min(Opp(I^*(M)))$, 并且 $I^*(M) = \{X \subseteq U: \forall x \in X, N(x) = M(x)\}$, 所以 $C^*(M) = \{\{x\}: x \in U, N(x) \neq M(x)\}$ 。

为了更好地理解上面的表达式, 用一个例子来说明。

例 4(继续例 2) 根据例 2 和上面的表达式, 得到 $I^*(M) = \{\emptyset, \{x_1\}\}$, $C^*(M) = \{\{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}\}$ 。

根据上面的命题, 很容易得到下面的推论。

推论 1 设 C 是论域 U 上的一个覆盖, $M(C)$ 是由 C 导出的拟阵, $M^*(C)$ 是 $M(C)$ 的对偶拟阵。如果 C 由覆盖退化为划分, 那么 $I(C) = \{\emptyset\}$, $C(M) = \{\{x\}: x \in U\}$, $I^*(M) = 2^U$, $C^*(M) = \emptyset$ 。

证明: 根据 $I(C)$, $C(M)$, $I^*(M)$, $C^*(M)$ 的定义, 很容易得到 $I(C) = \{\emptyset\}$, $C(M) = \{\{x\}: x \in U\}$, $I^*(M) = 2^U$, $C^*(M) = \emptyset$ 。

结束语 本文建立了覆盖粗糙集和拟阵的联系。通过覆盖的邻域和补邻域, 结合拟阵的特征, 给出了一种建立拟阵的方法。在此基础上, 讨论了此类拟阵及其对偶拟阵的一些性质。本文为从覆盖的角度构造拟阵提供了一种新的切入点。今后, 我们将继续研究此类拟阵的其他性质(如可图性、可表示性等)以及此类拟阵与由其他方法构造的拟阵的区别。

参考文献

- [1] Calegari S, Ciucci D. Granular computing applied to ontologies[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2010, 51(4): 391-409
- [2] Kryszkiewicz M. Rough set approach to incomplete information systems[J]. Information Sciences, 1998, 112(1): 39-49
- [3] Hu Q, Yu D, Guo M. Fuzzy preference based rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180(10): 2003-2022
- [4] Angiulli F, Pizzuti C. Outlier mining in large high dimensional data sets[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2005, 17(2): 203-215
- [5] Nieminen J. Rough tolerance equality[J]. Fundamenta Informaticae, 1988, 11(3): 289-296
- [6] Abo-Tabl E A. A comparison of two kinds of definitions of rough approximations based on a similarity relation[J]. Information Sciences, 2011, 181(12): 2587-2596
- [7] Zhu W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(6): 1499-1508
- [8] Wang S, Zhu W, Zhu Q, et al. Four matroidal structures of covering and their relationships with rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(9): 1361-1372
- [9] Lawler E L. Combinatorial optimization: networks and matroids[M]. Courier Dover Publications, 1976
- [10] Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm[J]. Mathematical Programming, 1971, 1(1): 127-136
- [11] El Rouayheb S Y, Sprintson A, Georgiades C. On the index coding problem and its relation to network coding and matroid the-

ory[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(7):3187-3195

- [12] Wang S, Zhu W. Matroidal structure of covering-based rough sets through the upper approximation number[J]. International Journal of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems, 2011, 2(2):141-148
- [13] Li X, Liu S. Matroidal approaches to rough sets via closure operators[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(4):513-527

- [14] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Sciences, 2003, 152:217-230
- [15] Ma L. On some types of neighborhood-related covering rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(6):901-911
- [16] Lai H J. Matroid theory[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001(in Chinese)
赖虹建. 拟阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002
- [17] Oxley J G. Matroid theory[M]. Oxford University Press, 2006

(上接第 24 页)

结束语 将参数集赋予亚 BCI-代数的代数结构, 给出了新型软亚 BCI-代数的概念, 探讨了它的一系列相关性质。进一步可引入亚 BCI-代数的软理想的结构, 并研究它的相关性质。

参 考 文 献

- [1] Imai Y, Iséki K. On axiom systems of propositional calculi XIV [J]. Proceedings of the Japan Academy, 1966, 42(1):19-22
- [2] Iséki K. An algebra related with a propositional calculus XIV [J]. Proceedings of the Japan Academy, 1966, 42(1):26-29
- [3] Chen Lu, Pu Yi-shu. Sub-BCI-algebra and its Ideal[J]. Pure and Applied Mathematics, 2005, 21(3):250-254(in Chinese)
陈露, 蒲义书. 亚 BCI-代数及其理想[J]. 纯粹数学与应用数学, 2005, 21(3):250-254
- [4] Rosenfeld A. Fuzzy groups[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 35(3):512-517
- [5] Xi O G. Fuzzy BCK-algebras[J]. Math Japon, 1991, 36:935-942
- [6] Senapati T. A Study on Fuzzy BCK/BCI-algebras and Related Algebraic Systems[M]. Verlag: Scholar's Press, 2014
- [7] Molodtsov D. Soft set theory-first results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5):19-31
- [8] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(65):338-353
- [9] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Information and Computer Sciences, 1982, 11:341-356
- [10] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1):87-96
- [11] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft Set Theory[J]. Computers Mathematics with Applications, 2003, 45(4):555-562
- [12] Aktaş H, Çağman N. Soft sets and soft groups[J]. Information Science, 2007, 177(13):2726-2735
- [13] Jun Y B. Soft BCK/BCI algebras [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(5):1408-1413
- [14] Feng Feng, Jun Young-bae, Zhao Xian-zhong. Soft semirings [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(10):2621-2628
- [15] Fu Wen-qing, Li Sheng-gang. Soft BCK algebras[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(10):5-6(in Chinese)
伏文清, 李生刚. 软 BCK 代数[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(10):5-6
- [16] Liao Zu-hua, Rui Ming-li. Soft incline [J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(2):30-32(in Chinese)
廖祖华, 芮明力. 软坡[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(2):30-32

- [17] Wen Yong-chuan. The study on soft set[D]. Dalian: Liaoning Normal University, 2008(in Chinese)
温永川. 关于软集的研究[D]. 大连: 辽宁师范大学, 2008
- [18] Yin Xia, Liao Zu-hua, Zhu Xiao-ying, et al. Soft sets and new soft subgroups [J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(33):40-43(in Chinese)
殷霞, 廖祖华, 朱晓英, 等. 软集与新型软子群[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(33):40-43
- [19] Yin Xia, Liao Zu-hua. Study on soft groups[J]. Journal of Computers, 2013, 8(4):960-967
- [20] Zheng Gao-ping, Liao Zu-hua, Wang Ni-ni, et al. Soft lattice implication subalgebras[J]. Applied Mathematics and Information Sciences, 2013, 7(3):1181-1186
- [21] Guan Bei-bei, Liao Zu-hua, Zhu Xiao-ying, et al. Soft Subsemigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2014, 28(4):39-44 (in Chinese)
关贝贝, 廖祖华, 朱晓英, 等. 软子半群[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(4):39-44
- [22] Zhao Di, Liao Zu-hua, Zhu Xiao-ying, et al. Soft ideals of semigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2014, 28(4):45-50 (in Chinese)
赵迪, 廖祖华, 朱晓英, 等. 半群的软理想[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(4):45-50
- [23] Ye Ting, Liao Zu-hua, Zhu Xiao-ying, et al. Soft completely prime ideals of semigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2014, 28(3):1-5(in Chinese)
叶婷, 廖祖华, 朱晓英, 等. 半群的软完全素理想[J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(3):1-5
- [24] Ye Ling-jun, Liao Zu-hua, Zhu Xiao-ying, et al. Soft completely regular sub-semigroups [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2014, 31(3):341-346(in Chinese)
叶灵军, 廖祖华, 朱晓英, 等. 软完全正则子半群[J]. 工程数学学报, 2014, 31(3):341-346
- [25] Zheng Gao-ping, Liao Zu-hua, Wang Ni-ni, et al. Soft LI-ideals of lattice implication algebra[J]. Computer Engineering and Applications, 2015, 51(8):42-46(in Chinese)
郑高平, 廖祖华, 王妮妮, 等. 格蕴含代数的软 LI-理想[J]. 计算机工程与应用, 2015, 51(8):42-46
- [26] Irfan A M, Feng Feng, Liu Xiao-yan, et al. On some new operations in soft set theory[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9):1547-1553