覆盖粗糙直觉模糊集模型的研究

薛占熬 司小朦 朱泰隆 王 楠
(河南师范大学计算机与信息工程学院 新乡 453007)
("智慧商务与物联网技术"河南省工程实验室 新乡 453007)

摘 要 粗糙集和直觉模糊集的融合是一个研究热点。在粗糙集、直觉模糊集和覆盖理论基础上,给出了模糊覆盖粗糙隶属度和非隶属度的定义。考虑到元素自身与最小描述元素的隶属度和非隶属度之间的关系,构建了两种新的模型——覆盖粗糙直觉模糊集和覆盖粗糙区间值直觉模糊集,证明了这两种模型的一些重要性质,与此同时定义了一种新的直觉模糊集的相似性度量公式,并用实例说明其应用。

关键词 直觉模糊集,粗糙集合,模糊覆盖粗糙隶属度,直觉模糊集的相似性度量

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.010

Study on Model of Covering-based Rough Intuitionistic Fuzzy Sets

XUE Zhan-ao SI Xiao-meng ZHU Tai-long WANG Nan
(College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)
(Engineering Lab of Henan Province for Intelligence Business & Internet of Things, Xinxiang 453007, China)

Abstract It is a hot research topic for the combination of rough sets and intuitionistic fuzzy sets. In this paper, the concept of fuzzy covering-based rough membership and non-membership were defined based on the rough sets theory, intuitionistic fuzzy sets theory and covering theory. The relationships between the memberships and non-memberships of the elements themselves and the minimal descriptions of elements were taken into full account. Then two new models were established, which are covering-based rough intuitionistic fuzzy sets model and covering-based rough interval-valued intuitionistic fuzzy sets model. And their properties were proved. At the same time, a new similarity measure formula was proposed in the intuitionistic fuzzy sets, and we used an example to illustrate its application.

Keywords Intuitionistic fuzzy sets, Rough sets, Fuzzy covering-based rough membership, Similarity measure formula of the intuitionistic fuzzy sets

1 引言

粗糙集是 Pawlak 教授于 1982 年提出的处理不精确、不完备和不相容信息的数学方法[1]。模糊集是 Zadeh 教授于 1965 年提出的描述模糊现象和模糊概念的重要方法[2]。1986 年 Atanassov 在 Zadeh 的模糊集的基础上,提出了直觉模糊集的概念[3-5],该理论在给出隶属度的同时给出了非隶属度和犹豫度的概念,既描述了"亦此亦彼",又描述了"非此非彼"的模糊概念。模糊集理论和粗糙集理论自提出以来,经过二十几年的发展,已经在理论和实际应用上取得了可喜的成果,并在数据挖掘、模式识别、图像处理等领域取得了很大的成功[6-9]。在处理不确定性和不精确性问题时,粗糙集理论和直觉模糊集理论之间有很强的互补性,将二者有机地融合已经成为了新的研究热点,引发了学者的研究兴趣[10-13]。

近几年,基于覆盖的粗糙模糊集研究引起了许多学者的关注,并取得了一些有意义的研究成果。Zhu 等提出覆盖约简和覆盖近似空间的知识约简框架[14];魏莱等简述了覆盖粗糙集模型的区别,在一个较合理的覆盖粗糙集的近似定义上,结合覆盖约简理论,重新定义了基于覆盖的粗糙集模型,并讨论了它的一些性质[15];胡军等从规则的置信度出发,提出了一种覆盖粗糙模糊集模型[16];汤建国等从模糊覆盖粗糙隶属度出发,建立了一种覆盖粗糙模糊集模型[17];张植明等提出了一种基于直觉模糊覆盖的直觉模糊粗糙集模型,利用直觉模糊三角模和直觉模糊蕴涵,构建了两对基于直觉模糊覆盖的下直觉模糊粗糙近似算子和上直觉模糊粗糙近似算子[18]。

本文在上述研究及覆盖的理论基础上,对粗糙集和直觉模糊集的融合进行深入研究。对覆盖粗糙模糊集模型进行了拓展,构建了两种新的模型——覆盖粗糙直觉模糊集和覆盖粗糙区间值直觉模糊集,证明了这两种模型的一些重要性质,与此同时又定义了一种新的直觉模糊集的相似性度量公式,并用实例说明了其应用。

到稿日期:2015-05-13 返修日期:2015-06-19 本文受国家自然科学基金计划项目(61273018),河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410174),河南省教育厅计划项目(14A520082),新乡市重点科技攻关计划项目(ZG14020)资助。

薛占熬(1963—),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论和粗糙集理论,E-mail:xuezhanao@163.com;**司小朦**(1989—),女,硕士生,主要研究方向为直觉模糊集理论和粗糙集;**朱泰隆**(1990—),男,硕士生,主要研究方向为博弈论、决策论和粗糙集理论;**王 楠**(1991—),男,硕士生,主要研究方向为模糊集理论。

2 基础知识

定义 1(粗糙集)[1] 设U是一个论域,R是U上的一个等价关系,$U/R=\{K_1,K_2,\cdots,K_n\}$是论域$U$上的一个划分,$x\in U$,则$X$关于$R$的下近似和上近似分别为:

$\underline{R}(X)=\bigcup\{K_i\mid K_i\in U/R\wedge K_i\subseteq X\}$

$\overline{R}(X)=\bigcup\{K_i\mid K_i\in U/P\wedge K_i\cap X\neq\emptyset\}$

当$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$时,称$X$是在$U$中关于$R$的精确集;

当$\underline{R}(X)\neq\overline{R}(X)$时,称$X$是在$U$中关于$R$的粗糙集。

定义 2(最小描述)[19] 设(U,C)为一个覆盖近似空间,$x\in U$,则称$Md(x)=\{K\in C\mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$为$x$的最小描述。

定义 3(直觉模糊集)[3-5] 设X为非空集合,$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle\mid x\in U\}$称为$X$上的一个直觉模糊集合。其中,$\mu_A(x):U\to[0,1]$和$\nu_A(x):U\to[0,1]$分别表示$U$中元素$x$属于直觉模糊集$A$的隶属度和非隶属度,且满足$0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1$。为了便于研究,$U$上的一个直觉模糊集$A$用隶属度和非隶属度表示,记为$A(x)=\{\frac{[\mu_A(x),\nu_A(x)]}{x}\}$。

定义 4(区间值直觉模糊集)[21] 设X为一个非空集合,X上的区间值直觉模糊集定义为:$\bar{A}=\{\langle x,\bar{\mu}_{\bar{A}}(x),\bar{\nu}_{\bar{A}}(x)\rangle\mid x\in X\}$,其中,$\bar{\mu}_{\bar{A}}(x)=[\bar{\mu}_{\bar{A}L}(x),\bar{\mu}_{\bar{A}U}(x)]\subseteq[0,1]$,$\bar{\nu}_{\bar{A}}(x)=[\bar{\nu}_{\bar{A}L}(x),\bar{\nu}_{\bar{A}U}(x)]\subseteq[0,1]$分别表示论域$X$中元素$x$相对于集合$\bar{A}$的区间值隶属度和区间值非隶属度,并且对任意的$x\in X$,满足$\sup\bar{\mu}_{\bar{A}U}(x)+\sup\bar{\nu}_{\bar{A}L}(x)\leqslant 1$,$X$上的全体区间值直觉模糊集构成的集合记为$IVIFS(X)$。显然,当$\bar{\mu}_{\bar{A}L}(x)=\bar{\mu}_{\bar{A}U}(x)$且$\bar{\nu}_{\bar{A}L}(x)=\bar{\nu}_{\bar{A}U}(x)$时,区间值直觉模糊集退化为直觉模糊集,直觉模糊集是区间值直觉模糊集的特例。

定义 5(粗糙隶属度函数)[22] 设U是一个论域,R是U上的一个等价关系。$\forall x\in U,X\in U$,定义$\mu_X^R(x)=|[x]_R\cap R/[x]_R|$为$x$关于$R$的粗糙隶属度函数。其中,$|\cdot|$表示集合的基数,$[x]_k$表示元素$x$关于$R$的等价类。

定义 6(覆盖、覆盖近似空间)[19] 设U是一个论域,C是U的一个子集族。如果C中的所有集合都非空,且$\bigcup C=U$,则称(U,C)为覆盖近似空间。

3 一种新的覆盖粗糙直觉模糊集模型

3.1 现有覆盖粗糙直觉模糊集模型的分析

为了便于对比和研究,首先简单介绍文献[20]提出的基于覆盖的直觉模糊集模型,并分析其局限性。

定义 7(基于覆盖的粗糙直觉模糊集)[20] 设(U,C)为覆盖近似的空间,$\forall A\in IFS(U)$,则A关于近似空间(U,C)的下近似$\underline{C}(A)$和上近似$\overline{C}(A)$是一对直觉模糊集。

$\underline{C}(A)=\{\langle x,\sup\limits_{K\in Md(x)}\{\inf\mu_A(y)\},\inf\limits_{K\in Md(x)}\{\sup\nu_A(y)\}\rangle\mid y\in K\}$

$\overline{C}(A)=\{\langle x,\inf\limits_{K\in Md(x)}\{\sup\mu_A(y)\},\sup\limits_{K\in Md(x)}\{\inf\nu_A(y)\}\rangle\mid y\in K\}$

我们把该模型称为I型覆盖粗糙直觉模糊集。在这个模型中,先求出元素x最小描述的各集合中元素的最小隶属度,然后将其中最大的隶属度作为x的下近似隶属度;同时求出x最小描述的各集合中元素的最大非隶属度,然后将其中最小的非隶属度作为x的下近似非隶属度。接着,求出x最小描述的各集合中元素的最大隶属度,然后将其中最小的作为x的上近似隶属度;同时求出x最小描述中各集合中最小的非隶属度,然后将其中最大的作为x上近似的非隶属度。当A退为模糊集时,该模型即退化为文献[16]的覆盖粗糙模糊集。

这种模型虽然给出一种方法来描述论域中的直觉模糊概念,但是存在一定的不合理性,因为一旦与x相关的集合中的最大隶属度、最小隶属度、最小非隶属度和最大非隶属度确定了,其他元素就不起作用了,所求的x隶属度和非隶属度仅依赖最小描述中最大和最小隶属度以及最小和最大非隶属度,这与实际问题不相符。下面通过一个例子来说明问题。

例 1 设论域$U=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9\}$,$U$上的一个覆盖$C=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\},\{x_6,x_7,x_8,x_9\}\}$,直觉模糊集$A$和$B$分别为:

$$A=\{\frac{[0.9,0.1]}{x_1},\frac{[0.1,0.8]}{x_2},\frac{[0.1,0.8]}{x_3},\frac{[0.9,0.1]}{x_4},\frac{[0,0.9]}{x_5},\frac{[0,0.8]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0.9,0.1]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$B=\{\frac{[0.9,0.1]}{x_1},\frac{[0.9,0.1]}{x_2},\frac{[0.1,0.8]}{x_3},\frac{[0.9,0.1]}{x_4},\frac{[0.9,0.1]}{x_5},\frac{[0,0.9]}{x_6},\frac{[0,0.8]}{x_7},\frac{[0.9,0.1]}{x_8},\frac{[0.9,0.1]}{x_9}\}$$

求A和B覆盖粗糙直觉模糊集模型的上下近似直觉模糊集。

$Md(x_1)=Md(x_2)=\{\{x_1,x_2,x_3\}\}$

$Md(x_3)=\{\{x_1,x_2,x_3\},\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}\}$

$Md(x_4)=Md(x_5)=\{\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}\}$

$Md(x_6)=Md(x_7)=\{\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\},\{x_6,x_7,x_8,x_9\}\}$

$Md(x_8)=Md(x_9)=\{\{x_6,x_7,x_8,x_9\}\}$

根据定义 7,得

$$\underline{C}(A)=\{\frac{[0.1,0.8]}{x_1},\frac{[0.1,0.8]}{x_2},\frac{[0.1,0.8]}{x_3},\frac{[0,0.9]}{x_4},\frac{[0,0.9]}{x_5},\frac{[0,0.9]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0,0.9]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$\overline{C}(A)=\{\frac{[0.9,0.1]}{x_1},\frac{[0.9,0.1]}{x_2},\frac{[0.9,0.1]}{x_3},\frac{[0.9,0.1]}{x_4},\frac{[0.9,0.1]}{x_5},\frac{[0.9,0.1]}{x_6},\frac{[0.9,0.1]}{x_7},\frac{[0.9,0.1]}{x_8},\frac{[0.9,0.1]}{x_9}\}$$

$$\underline{C}(B)=\{\frac{[0.1,0.8]}{x_1},\frac{[0.1,0.8]}{x_2},\frac{[0.1,0.8]}{x_3},\frac{[0,0.9]}{x_4},\frac{[0,0.9]}{x_5},\frac{[0,0.9]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0,0.9]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$\overline{C}(B)=\{\frac{[0.9,0.1]}{x_1},\frac{[0.9,0.1]}{x_2},\frac{[0.9,0.1]}{x_3},\frac{[0.9,0.1]}{x_4},\frac{[0.9,0.1]}{x_5},\frac{[0.9,0.1]}{x_6},\frac{[0.9,0.1]}{x_7},\frac{[0.9,0.1]}{x_8},\frac{[0.9,0.1]}{x_9}\}$$

通过例 1 的计算可知,虽然直觉模糊集A和B相差很大,甚至有些元素的隶属度和非隶属完全相反,但是用此模型进行计算得到的直觉模糊集A和B的上、下近似直觉模糊集完全相同。

由此可知,该模型存在很大的不合理性,究其原因为:在

求解过程中对最小描述中对象的隶属度和非隶属度进行简单的求大、求小运算，所得到的元素的隶属度和非隶属可能相同。也就是说，最小描述中对象的隶属度的最大值和最小值以及非隶属度的最大值和最小值确定了模糊概念的两个边界，这就会使得不同元素如果同属于一个最小描述，则会有着相同的隶属度和非隶属度。该隶属度和非隶属度是由一些特定元素决定，与该元素自身以及元素之间的联系关系不大。这与直觉模糊集所反映的实际情况有很大差别。

分析I模型的局限性，在充分考虑了元素自身的隶属度和非隶属度后，联系元素与其所在最小描述中的其他元素，提出了一种新的覆盖粗糙直觉模糊集模型，具体如3.2节所述。为了便于描述，称本文所提模型为II型覆盖粗糙直觉模糊集；将文献[20]所提出的模型称为I型覆盖粗糙直觉模糊集。

3.2 II型覆盖粗糙直觉模糊集

定义8(模糊覆盖粗糙隶属度和非隶属度) 设U是一个论域，C是论域上U的一个覆盖，$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义x关于A的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度分别为：

$$\mu_A{}'(x)=\sum_{y\in\bigcup Md}\mu_A(y)/|\bigcup Md(x)|$$

$$\nu_A{}'(x)=\sum_{y\in\bigcup Md}\nu_A(y)/|\bigcup Md(x)|$$

模糊覆盖粗糙隶属度和非隶属度反映了元素与最小描述之间的关系，也融合给定直觉模糊集中元素及其最小描述中各元素的隶属度和非隶属度。因此，它从一个全新的角度较为全面地反映了论域中各个元素从属于直觉模糊集A的程度。

定义9(II型覆盖粗糙直觉模糊集) 设U是一个论域，C是论域U上的一个覆盖，$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义A关于覆盖近似空间(U,C)的覆盖粗糙直觉模糊集。

$$\underline{CK}(A)=\{x,\mu_{\underline{CK}(A)}(x),v_{\underline{CK}(A)}(x)\}$$

$$\overline{CK}(A)=\{x,\mu_{\overline{CK}(A)}(x),v_{\overline{CK}(A)}(x)\}$$

$$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\{\min(\mu_A(x),\mu_A{}'(x))\}$$

$$v_{\underline{CK}(A)}(x)=\{\max(v_A(x),v_A{}'(x))\}$$

$$\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\{\max(\mu_A(x),\mu_A{}'(x))\}$$

$$v_{\overline{CK}(A)}(x)=\{\max(v_A(x),v_A{}'(x))\}$$

例2 假设有9个信用卡申请者组成的论域$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$由多个专家E_1,E_2,E_3分别对他们的受教育程度进行好($high$)、中($middle$)、差(low)3个级别的评价，得到覆盖为：

$$C=\{\text{good},\text{average},\text{poor}\}=\{k_1,k_2,k_3\}$$

$$k_1=\{x_1,x_2,x_3\}$$

$$k_2=\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$$

$$k_3=\{x_6,x_7,x_8,x_9\}$$

$$high=\{\frac{[1,0]}{x_1},\frac{[0.8,0.1]}{x_2},\frac{[0.5,0.4]}{x_3},\frac{[0.3,0.4]}{x_4},\frac{[0,0.8]}{x_5},\frac{[0,0.7]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0,0.6]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$middle=\{\frac{[0,0.7]}{x_1},\frac{[0.2,0.6]}{x_2},\frac{[0.5,0.5]}{x_3},\frac{[0.7,0.2]}{x_4},\frac{[1,0]}{x_5},\frac{[0.6,0.3]}{x_6},\frac{[0.6,0.2]}{x_7},\frac{[0.3,0.6]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$low=\{\frac{[0,0.8]}{x_1},\frac{[0,0.8]}{x_2},\frac{[0,0.9]}{x_3},\frac{[0,0.6]}{x_4},\frac{[0,0.9]}{x_5},\frac{[0,0.8]}{x_6},\frac{[0.4,0.5]}{x_7},\frac{[0.7,0.1]}{x_8},\frac{[1,0]}{x_9}\}$$

分别用文献[20]的I型和本文提出的II型，来求出覆盖粗糙直觉模糊集的“$high$”上、下近似。

解：①根据定义7，计算I型覆盖粗糙直觉模糊集的“$high$”上、下近似。

$$\underline{C}(high)(x)=\{\frac{[0.5,0.4]}{x_1},\frac{[0.5,0.4]}{x_2},\frac{[0.5,0.4]}{x_3},\frac{[0,0.9]}{x_4},\frac{[0,0.9]}{x_5},\frac{[0,0.9]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0,0.9]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$\overline{C}(high)(x)=\{\frac{[1,0]}{x_1},\frac{[1,0]}{x_2},\frac{[0.5,0.4]}{x_3},\frac{[0.5,04]}{x_4},\frac{[0.5,0.4]}{x_5},\frac{[0,0.6]}{x_6},\frac{[0,0.6]}{x_7},\frac{[0,0.6]}{x_8},\frac{[0,0.6]}{x_9}\}$$

②根据定义8，计算II型覆盖粗糙直觉模糊集的“$high$”上、下近似。

步骤1：根据定义8，求出模糊覆盖粗糙隶属度。

$\mu_A{}'(x_1)=\frac{1+1.3}{3}=0.77$，$\mu_A{}'(x_2)=\frac{1+1.3}{3}=0.77$，$\mu_A{}'(x_3)=0.37$，$\mu_A{}'(x_4)=\mu_A{}'(x_5)=0.16$，$\mu_A{}'(x_6)=\mu_A{}'(x_7)=\frac{0.8}{7}=0.11$，$\mu_A{}'(x_8)=\mu_A{}'(x_9)=\frac{0}{4}=0$。

步骤2：根据定义9，确定隶属度和非隶属。

$\mu_{\underline{CK}(x_1)}=\min\{1,0.77\}=0.77$，$\mu_{\overline{CK}(x_1)}=\max\{1,0.77\}=1$；

$\mu_{\underline{CK}(x_2)}=\min\{0.8,0.77\}=0.77$，$\mu_{\overline{CK}(x_2)}=\max\{0.8,0.77\}=0.8$；

$\mu_{\underline{CK}(x_3)}=\min\{0.5,0.37\}=0.37$，$\mu_{\overline{CK}(x_3)}=\max\{0.5,0.37\}=0.5$；

$\mu_{\underline{CK}(x_4)}=\min\{0.3,0.16\}=0.16$，$\mu_{\overline{CK}(x_4)}=\max\{0.3,0.16\}=0.3$；

$\mu_{\underline{CK}(x_5)}=\min\{0,0.16\}=0$，$\mu_{\overline{CK}(x_5)}=\max\{0,0.16\}=0.16$；

$\mu_{\underline{CK}(x_6)}=\min\{0,0.11\}=0$，$\mu_{\overline{CK}(x_6)}=\max\{0,0.11\}=0.11$；

$\mu_{\underline{CK}(x_7)}=\min\{0,0.11\}=0$，$\mu_{\overline{CK}(x_7)}=\max\{0,0.11\}=0.11$；

$\mu_{\underline{CK}(x_8)}=\min\{0,0\}=0$，$\mu_{\overline{CK}(x_8)}=\max\{0,0\}=0$；

$\mu_{\underline{CK}(x_9)}=\min\{0,0\}=0$，$\mu_{\overline{CK}(x_9)}=\max\{0,0\}=0$。

同理可计算出“$high$”的非隶属度，从而可得II型覆盖粗糙直觉模糊集的“$high$”上、下近似。

$$\underline{CK}(high)(x)=\{\frac{[0.77,0.17]}{x_1},\frac{[0.77,0.17]}{x_2},\frac{[0.37,0.47]}{x_3},\frac{[0.16,0.64]}{x_4},\frac{[0,0.8]}{x_5},\frac{[0,0.7]}{x_6},\frac{[0,0.9]}{x_7},\frac{[0,0.78]}{x_8},\frac{[0,0.9]}{x_9}\}$$

$$\overline{CK}(high)(x)=\{\frac{[1,0]}{x_1},\frac{[0.8,0.1]}{x_2},\frac{[0.5,0.4]}{x_3},\frac{[0.3,0.4]}{x_4},\frac{[0.16,0.64]}{x_5},\frac{[0.11,0.67]}{x_6},\frac{[0.11,0.67]}{x_7},\frac{[0,0.6]}{x_8},\frac{[0,0.78]}{x_9}\}$$

从例 2 可直观看出：II 型求出的覆盖粗糙直觉模糊集相对于 I 型而言，其结果体现了一个元素自身隶属度和非隶属度的重要性，同时也考虑了一个元素与其他同类元素之间的联系，因此 II 型反映的信息与实际情况更接近。在第 4 节中将提出一种新的直觉模糊集的相似性度量，通过计算，进一步说明了 II 型模型更能真实地反映原直觉模糊集。

3.3 II 型覆盖粗糙直觉模糊集的性质

定理 1 设(U,C)为覆盖近似空间，$A,B\in IFS(U)$，$x\in U$，则 II 型覆盖粗糙直觉模糊集具有以下性质：

(1)$\underline{CK}(U)=U,\overline{CK}(U)=U$；

(2)$\underline{CK}(\emptyset)=\emptyset,\overline{CK}(\emptyset)=\emptyset$；

(3)$\underline{CK}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CK}(A)$；

(4)若 $A\subseteq B$，则$\underline{CK}(A)\subseteq\underline{CK}(B)$，$\overline{CK}(A)\subseteq\overline{CK}(B)$。

证明：(1)当直觉模糊集 A 退化为模糊全集 U 时，对 $x\in U$，有 $\mu_U(x)=1,\nu_U(x)=0$。$x\in U$，由定义 8 得 $\mu_U{}'(x)=1$，$\nu_U{}'(x)=0$。由定义 9 得，$\mu_{\underline{CK}(U)}(x)=1$，$\nu_{\underline{CK}(U)}(x)=0$，且 $\mu_{\overline{CK}(U)}(x)=1$，$\nu_{\overline{CK}(U)}(x)=0$。

所以，$\underline{CK}(U)=\overline{CK}(U)=U$。

(2)证明方法同(1)。

(3)根据定义 9，得 $\forall x\in U,\mu_A(x)\leqslant\mu_A{}'(x)$，或者$\mu_A(x)>\mu_A('x)$，且 $\nu_A(x)\leqslant\nu_A{}'(x)$，或者 $\nu_A(x)>\nu_A{}'(x)$。

共有以下 4 种情况：

i)$\mu_A(x)\leqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\leqslant\nu_A{}'(x)$。

ii)$\mu_A(x)\geqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\leqslant\nu_A{}'(x)$。

iii)$\mu_A(x)\leqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\geqslant\nu_A{}'(x)$。

iv)$\mu_A(x)\geqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\geqslant\nu_A{}'(x)$。

下面仅对第 i)、ii)种情况进行证明。

当 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\leqslant\nu_A{}'(x)$时，

$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x)$

$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x)$

得

$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(A)}(x)$

$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_A(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(A)}(x)$

当 $\mu_A(x)\geqslant\mu_A{}'(x),\nu_A(x)\leqslant\nu_A{}'(x)$时，

$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x)$

$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x)$

得

$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(A)}(x)$

$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_A(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(A)}(x)$

同理可证第 iii)、iv)种情况。

因此，$\underline{CK}(A)\subseteq A\subseteq\overline{CK}(A)$。

(4)因为 $A\subseteq B,\forall x\in U,\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),v_A(x)\geqslant v_B(x)$，$\mu_A{}'(x)\leqslant\mu_B{}'(x),v_A{}'(x)\geqslant v_B{}'(x)$，所以上、下近似的隶属度与非隶属有以下 4 种情况：

i)$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x)$；
$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x)$。

ii)$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x)$；
$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x)$。

iii)$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x)$；
$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x)$。

iv)$\mu_{\underline{CK}(A)}(x)=\mu_A{}'(x),\mu_{\overline{CK}(A)}(x)=\mu_A(x)$；
$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)=\nu_A{}'(x),\nu_{\overline{CK}(A)}(x)=\nu_A(x)$。

下面仅对情况 i)进行证明。

①如果 $\mu_{\underline{CK}(B)}(x)=\mu_B(x),\mu_{\overline{CK}(B)}(x)=\mu_B{}'(x)$；$\nu_{\underline{CK}(B)}(x)=\nu_B(x),\nu_{\overline{CK}(B)}(x)=\nu_B{}'(x)$，则 $\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\mu_{\overline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(B)}(x)$；$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\overline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(B)}(x)$。

②如果 $\mu_{\underline{CK}(B)}(x)=\mu_B{}'(x),\mu_{\overline{CK}(B)}(x)=\mu_B(x),\nu_{\underline{CK}(B)}(x)=\nu_B(x),\nu_{\overline{CK}(B)}(x)=\nu_B{}'(x)$。

因为 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A{}'(x)\leqslant\mu_B{}'(x),\mu_A{}'(x)\leqslant\mu_B{}'(x)\leqslant\mu_B(x)$，所以 $\mu_A(x)\leqslant\mu_B{}'(x),\mu_A{}'(x)\leqslant\mu_B(x)$，则 $\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\mu_{\overline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\overline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(B)}(x)$。

③如果 $\mu_{\underline{CK}(B)}(x)=\mu_B(x),\mu_{\overline{CK}(B)}(x)=\mu_B{}'(x),\nu_{\underline{CK}(B)}(x)=\nu_B{}'(x),\nu_{\overline{CK}(B)}(x)=\nu_B(x)$。

因为 $\nu_A(x)\geqslant\nu_A{}'(x)\geqslant\nu_B{}'(x),\nu_A{}'(x)\geqslant\nu_B{}'(x)\geqslant\nu_B(x)$，所以 $\nu_A(x)\geqslant\nu_B{}'(x),\nu_A{}'(x)\geqslant\nu_B(x)$。则 $\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\mu_{\overline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\overline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(B)}(x)$。

④如果 $\mu_{\underline{CK}(B)}(x)=\mu_B{}'(x),\mu_{\overline{CK}(B)}(x)=\mu_B(x),\nu_{\underline{CK}(B)}(x)=\nu_B{}'(x),\nu_{\overline{CK}(B)}(x)=\nu_B(x)$，则 $\mu_{\underline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\mu_{\overline{CK}(A)}(x)\leqslant\mu_{\overline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\underline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\underline{CK}(B)}(x)$，$\nu_{\overline{CK}(A)}(x)\geqslant\nu_{\overline{CK}(B)}(x)$。

类似可以证明其它 3 种情况，略。

所以，$\underline{CK}(A)\subseteq\underline{CK}(B)$，$\overline{CK}(A)\subseteq\overline{CK}(B)$。

4 一种新的直觉模糊集的相似性度量

定义 10(直觉模糊集的相似度) 设 A,B 是有限论域 U 上的两个直觉模糊集，即 $A\in IFS(U)$，$B\in IFS(U)$，定义映射：$S:IFS(U)\times IFS(U)\rightarrow[0,1]$，即$(A,B)\rightarrow S(A,B)$。称 $S(A,B)$是模糊集 A,B 之间的相似度，如果 $S(A,B)$满足以下条件：

(1)有界性：对于任意的 $A\in IFS(U)$，$B\in IFS(U)$，并且 $0\leqslant S(A,B)\leqslant 1$；

(2)对称性：对任意的 $A\in IFS(U)$，$B\in IFS(U)$，并且 $S(A,B)=S(B,A)$；

(3)对于任意的 $A\in IFS(U)$，$B\in IFS(U)$，$S(A,A)=1$；$S(A,B)=0$ 的充要条件是 $A\cap B=\emptyset$。

下面给出直觉模糊集 A,B 之间的相似度公式：

$$S(A,B)=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\{\sum_{i=1}^{n}((\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2+(\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i))^2+(\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i))^2\}^{\frac{1}{2}}$$

根据定义 10，容易验证该公式满足上述 3 个条件。

现在根据定义 10，计算例 2 中直觉模糊集的相似度分别为：

$$S(high,\overline{C}(high))=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\{0+(0.2^2+0.1^2+0.1^2)+0+(0.2^2+0.2^2)+(0.5^2+0.4^2+0.1^2)+(0.1^2+0.1^2)+(0.3^2+0.3^2)+0+(0.3^2+0.3^2)\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=1-\frac{1}{3}\sqrt{0.94}\approx 0.68$$

$$S(high,\underline{C}(high))=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\{(0.5^2+0.4^2+0.1^2)+(0.3^2+0.3^2+0^2)+0+(0.3^2+0.5^2+0.2^2)+(0.1^2+0.1^2)+(0+0.2^2+0.2^2)+$$

$$(0.3^2+0.3^2)+0+0\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{3}\sqrt{1.26}\approx 0.63$$

$$S(high,\overline{CK}(high))=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\{0+0+0+0+(0.16^2+0.16^2+0^2)+(0.11^2+0.03^2+0.08^2)+(0.11^2+0.23^2+0.12^2)+0+(0.12^2+0.12^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{3}\sqrt{0.1788}\approx 0.86$$

$$S(high,\underline{CK}(high))=1-\frac{1}{\sqrt{9}}\{(0.23^2+0.17^2+0.06^2)+(0.03^2+0.07^2+0.04^2)+(0.13^2+0.07^2+0.06^2)+(0.14^2+0.24^2+0.1^2)+0+0+0+(0.18^2+0.18^2)+0\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{3}\sqrt{0.2702}\approx 0.83$$

由上面的相似度公式计算可知：

$S(high,\overline{C}(high))<S(high,\overline{CK}(high))$

$S(high,\underline{C}(high))<S(high,\underline{CK}(high))$

采用新的直觉模糊集的相似度公式，计算 I 型和 II 型直觉模糊集的“*high*”上、下近似与直觉模糊集的相似度，可以看出 II 型与直觉模糊集的“*high*”比 I 型与直觉模糊集的“*high*”相似度高。

以同样的方法分别计算 I 型和 II 型直觉模糊集的“*middle*”和“*low*”上、下近似与直觉模糊集的相似度，如下：

$S(middle,\overline{C}(middle))<S(middle,\overline{CK}(middle))$

$S(middle,\underline{C}(middle))<S(high,\underline{CK}(middle))$

$S(low,\overline{C}(low))<S(low,\overline{CK}(low))$

$S(low,\underline{C}(low))<S(low,\underline{CK}(low))$

可以看出，II 型与直觉模糊集的“*middle*”和“*low*”比 I 型与直觉模糊集的“*middle*”和“*low*”相似度高。

所以 II 型覆盖粗糙直觉模糊集比 I 型覆盖粗糙直觉模糊集更能反映真实情况。

5 覆盖粗糙区间值直觉模糊集

定义 11 设(U,C)是一个覆盖近似空间，其中 U 为非空有限论域，C 为 U 的一个覆盖。若$\overline{A}$是 U 上的一个区间值直觉模糊集，则$\overline{A}$关于(U,C)的一对下近似$\underline{CK}(\overline{A})$和上近似$\overline{CK}(\overline{A})$定义了 U 上的一对区间值直觉模糊集合，其隶属函数和非隶属函数分别定义为：

$$\underline{CK}(\overline{A})=\{x,\mu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x),\nu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)\}$$

$$\overline{CK}(\overline{A})=\{x,\mu_{\overline{CK}(\overline{A})}(x),\nu_{\overline{CK}(\overline{A})}(x)\}$$

$$\mu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)=\{\min\{\mu_{\overline{A}L}(y),\mu'_{\overline{A}L}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\},\min\{\mu_{\overline{A}U}(y),\mu'_{\overline{A}U}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\}\}$$

$$\nu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)=\{\max\{\nu_{\overline{A}L}(y),\nu'_{\overline{A}L}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\},\max\{\nu_{\overline{A}U}(y),\nu'_{\overline{A}U}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\}\}$$

$$\mu_{\overline{CK}(\overline{A})}(x)=\{\max\{\mu_{\overline{A}L}(y),\mu'_{\overline{A}L}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\},\max\{\mu_{\overline{A}U}(y),\mu'_{\overline{A}U}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\}\}$$

$$\nu_{\overline{CK}(\overline{A})}(x)=\{\min\{\nu_{\overline{A}L}(y),\nu'_{\overline{A}L}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\},\min\{\nu_{\overline{A}U}(y),\nu'_{\overline{A}U}(y)\mid y\in\bigcup Md(x)\}\}$$

若对 $\forall x\in U$，$\mu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)=\mu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)$ 且 $\nu_{\underline{CK}(\overline{A})}(x)=\nu_{\overline{CK}(\overline{A})}(x)$，则称$\overline{A}$关于覆盖近似空间是可定义的，否则$\overline{A}$关于覆盖近似空间是粗糙的。这时也称$\overline{A}$是基于覆盖的粗糙区间值直觉模糊集。

当$\overline{A}$为精确集时，$\underline{CK}(\overline{A})$和$\overline{CK}(\overline{A})$就退化为覆盖粗糙集的上近似和下近似。

当$\overline{A}$为模糊集时，$\underline{CK}(\overline{A})$和$\overline{CK}(\overline{A})$就退化为基于覆盖的粗糙模糊集的上近似和下近似。

当$\overline{A}$为直觉模糊集时，$\underline{CK}(\overline{A})$和$\overline{CK}(\overline{A})$就退化为基于覆盖的粗糙直觉模糊集的上近似和下近似。

定理 2 设(U,C)为覆盖区间直觉模糊近似空间，定义 11 中的下近似与上近似算子有以下性质：

(1)$\underline{CK}(U)=U$，$\overline{CK}(U)=U$；

(2)$\underline{CK}(\emptyset)=\emptyset$，$\overline{CK}(\emptyset)=\emptyset$；

(3)$\underline{CK}(\overline{A})\subseteq\overline{A}\subseteq\overline{CK}(\overline{A})$；

(4)若$\overline{A}\subseteq\overline{B}$，则$\underline{CK}(\overline{A})\subseteq\underline{CK}(\overline{B})$，$\overline{CK}(\overline{A})\subseteq\overline{CK}(\overline{B})$。

证明：类似于定理 1 证明，略。

结束语 在覆盖的理论基础上，对覆盖粗糙模糊集模型进行了拓展研究。在粗糙集、直觉模糊集和覆盖理论的基础上，给出了模糊覆盖粗糙隶属度和非隶属度的定义。考虑到元素自身与最小描述元素的隶属度和非隶属度之间的关系，构建了两种新的模型——覆盖粗糙直觉模糊集和覆盖粗糙区间值直觉模糊集，证明了这两种模型的一些重要性质，与此同时又定义了一种新的直觉模糊集的相似性度量公式，并用实例说明了其应用。对基于上述模型的区间值直觉模糊信息系统的知识约简和知识发现还有待进一步讨论。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353

[3] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96

[4] Atanassov K T. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(2): 137-142

[5] Atanassov K T. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems, 1989, 33(1): 37-45

[6] Zhang Qing-hua, Wang Jin, Wang Guo-yin. The approximation representation of rough-fuzzy sets[J]. Chinese Journal of Computer, 2014, 38(7): 1-13 (in Chinese)
张清华，王进，王国胤. 粗糙模糊集的近似表示[J]. 计算机学报，2014，38(7)：1-13

[7] Xue Zhan-ao, Cheng Hui-ru, Huang Hai-song, et al. Rough approximations of intuition fuzzy sets in fuzzy approximation space [J]. Computer Science, 2013, 40(4): 221-226 (in Chinese)
薛占敖，程惠茹，黄海松，等. 模糊空间中的直觉模糊粗糙近似[J]. 计算机科学，2013，40(4)：221-226

[8] Xia M, Xu Z. Entropy / cross entropy-based group decision making under intuitionistic fuzzy environment[J]. Information Fusion, 2012, 13(1): 31-47

[9] Xu Z, Hu H. Projection models for intuitionistic fuzzy multiple attribute decision making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2010, 9(2): 267-280

（下转第 68 页）

粒度作为权值集合，构建哈夫曼树；对分支粒设计 SVM 分类器；最后，利用 MATLAB 实现模型的仿真验证。结果表明，应用该模型实现多分类问题求解为多分类问题的处理提供了一个新的思路和方法，具有一定的理论价值和应用价值。

参 考 文 献

[1] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. NY: Springer Verlag, 1995: 273-297

[2] Hsu C W, Lin C J. A comparison on methods for multi-class support vector machines [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(2): 415-425

[3] Miao Duo-qian, Li De-yi, Yao Yi-yu, et al. Uncertainty and granular computing [M]. Beijing: Science Press, 2011: 150-157 (in Chinese)
苗夺谦，李德毅，姚一豫，等. 不确定性与粒计算[M]. 北京：科学出版社，2011：150-157

[4] Ren Zheng-yun. Composition of the Huffman Tree and its Usage in Digital Compiling[J]. Journal of Sha-yang Teachers College, 2007(5): 31-33(in Chinese)
任正云. 哈夫曼树的构造及其在信息编码中的应用[J]. 沙洋师范高等专科学校学报，2007(5)：31-33

[5] Tang Y C, In B, Zhang Y Q. Granular Support Vector Machines with Association Rules Mining for Protein Holomogy Prediction [J]. Artificial Intelligence in Medicine, 2005, 35(1-2): 121-134

[6] Weaton J, Watkina C. Multi-class Support Vector Machines: CSD-TR-98-04 [R]. Royal Holloway, University of London, 1998

[7] Wang W J, Xu Z B. A Heuristic Training in Support Vector Regression [J]. Neurocomputing, 2004, 61(2): 259-275

[8] Duan Dan-qing, Chen Song-qiao, Yang Wei-jun, et al. Deteet Intrusion Using Rough Set and Support Vector Machine[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2008, 29(4): 627-630(in Chinese)
段丹青，陈松乔，杨卫军，等. 使用粗糙集和支持向量机检测入侵[J]. 小型微型计算机系统，2008，29(4)：627-630

[9] Lian Ke, Huang Jian-guo, Wang Hou-jun, et al. Study on a GA-based SVM Decision-tree Multi-Classification Strategy[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 35(8): 1502-1507(in Chinese)
连可，黄建国，王厚军，等. 一种基于遗传算法的 SVM 决策树多分类策略研究[J]. 电子学报，2008，36(8)：1502-1507

[10] Wen Gui-hua, Xiang Jun, Ding Yue-hua. Large-scale SVM classification algorithm based on granularity of quotient space theory[J]. Application Research of Computer, 2008, 25(8): 2299-2301(in Chinese)
文贵华，向君，丁月华. 基于商空间粒度理论的大规模 SVM 分类算法[J]. 计算机应用研究，2008，25(8)：2299-2301

[11] Guo Hu-sheng, Wang wen-jian. Research on SVM learning algorithms based on neural networks[J]. Computer Engineering and Applications, 2009(2): 51-54(in Chinese)
郭虎升，王文剑. 基于神经网络的支持向量机学习算法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(2)：51-54

[12] Yang Rui-cheng, Deng Wen-huai, Feng Hui-xia. Engineering design of material selection and application [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2004: 327-328(in Chinese)
杨瑞成，邓文怀，冯辉霞. 工程设计中的材料选择与应用[M]. 北京：化学工业出版社，2004：327-328

（上接第 48 页）

[10] Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465

[11] Szmidt E, Kacprzyk J. Distance between intuitionistic fuzzy sets and their applications in reasoning[M] // Studies in Computational Intelligence. 2005: 101-116

[12] Lin Meng-lei. A Characterization for Intuitionistic Fuzzy Sets Based on the Assistant Sets Generated by S-Rough Set[M] // Advances in Soft Computing. 2009: 627-637

[13] Jena S P, Ghosh S K. Inituitionistic fuzzy rough sets[J]. Notes on Inituitionistic Fuzzy Sets, 2002, 8(1): 1-18

[14] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179(3): 210-225

[15] Wei Lai, Miao Duo-qian, Xu Fei-fei, et al. Research on a covering rough fuzzy set model[J]. Journal of Computer Research and Development, 2006, 43(10): 1719-1723(in Chinese)
魏莱，苗夺谦，徐菲菲，等. 基于覆盖的粗糙模糊集模型研究[J]. 计算机研究与发展，2006，43(10)：1719-1723

[16] Hu Jun, Wang Guo-yin, Zhang Qing-hua. Covering Based Generalized Rough Fuzzy Set Model[J]. Journal of Software, 2010, 21(5): 968-977(in Chinese)
胡军，王国胤，张清华. 一种覆盖粗糙模糊集模型[J]. 软件学报，2010，21(5)：968-977

[17] Tang Jian-guo, She Kun, Zhu Feng. A new type of overing-based rough fuzzy set model[J]. Control and Decision, 2012, 27(11): 1652-1662(in Chinese)
汤建国，佘堃，祝峰. 一种新的覆盖粗糙模糊集模型[J]. 控制与决策，2012，27(11)：1652-1662

[18] Zhang Zhi-ming, Bai Yun-chao, Tian Jing-feng. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy coverings[J]. Control and Decision, 2010, 25(9): 1369-1373(in Chinese)
张植明，白云超，田景峰. 基于覆盖的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策，2010，25(9)：1369-1373

[19] Bonikowski Z, Bryniarski E, Wybraniec-Skardowska U. Extensions and intentions in the rough set theory[J]. Information Sciences, 1998, 107(1): 149-167

[20] Wang Yan-ping, Sun Jing, Chen Mei-wei. Interval-valued intuitionistic fuzzy rough sets based on coverings [J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(2): 155-156(in Chinese)
王艳平，孙静，陈美巍. 基于覆盖的区间直觉模糊粗糙集[J]. 计算机工程与应用，2013，49(2)：155-156

[21] Atanassov K T. Operators over interval valued intuitionistic fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2): 159-174

[22] Pawlak Z. Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991: 1-79