保特征散乱数据的曲面重构
——变分水平集方法

荆竹翠[1,2] 李 明[2] 徐国良[2]
(山西大学数学科学学院 太原 030006)[1]
(LSEC 中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所 北京 100190)[2]

摘 要 研究了保特征散乱数据的曲面重构问题。根据主曲率的差可以刻画图像的棱角特征这一特性,提出了一种新的能量模型。通过变分法,能量得到了新的微分方程,并利用有限元方法求解。试验结果表明,该方法有良好的重构效果,并很好地保持了棱角特征。

关键词 水平集函数,主曲率,B-样条基
中图法分类号 TP391.7 **文献标识码** A

Feature-preserving Surface Reconstruction from Scattered Points
——Variational Level-set Method

JING Zhu-cui[1,2] LI Ming[2] XU Guo-liang[2]
(Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)[1]
(LSEC, Institute of Computational Mathematics, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[2]

Abstract The aim of this paper is to reconstruct surface from scattered points while preserving or enhancing sharp features. This goal is achieved by establishing a new energy model according to the difference of the principal curvatures. We derived a nonlinear partial differential equation and solved it using the finite-element method for the unknown level set function. Numerical experiments show that the proposed method is effective.

Keywords Level-set function, Principal curvatures, B-spline basis

1 引言

散乱数据的曲面重构问题可以概述为:对于给定的精确或带噪声的来自于某一曲面的离散抽样数据,重新构造一光滑曲面,使之尽可能忠实于原始曲面并插值或逼近于该离散点集[1]。该问题有广泛的应用背景。例如,在汽车工业中进行复杂产品设计时,往往需要建立产品的数字化模型。在医学领域,我们需要对核磁共振获得的数据进行人体骨骼、器官等的几何重建。在虚拟现实中,需要利用著名建筑物的扫描数据来建立数字图书馆等等。对这些问题进行抽象后即得散乱数据的重构问题,

每个散乱数据集均来自于一个封闭曲面的采样。

解决散乱数据的重构问题可以利用水平集方法[2-6]。水平集方法是 20 世纪 80 年代末由 Osher 和 Sethian[7] 引入的用以解决界面运动问题的一种方法,因其具有拓扑结构自动识别和易于实现等优点而迅速应用于各个领域。目前已经取得了非常丰富的成果且有若干专著问世[8,9]。在实体形变过程中,拓扑结构有时会发生改变。用参数曲面来追踪拓扑结构的改变是相当麻烦的。若使用隐式表达的曲面实现拓扑结构的改变则相当容易[10,11]。但这些方法描述的大都是静态的曲面设计。这里所述的水平集方法允许曲面动态地变形并对其进行跟踪[6-8,12],曲面变形的驱动力量是几何偏微分方程。水平集方法的第二个优点是使几何本质量的计算容易实现,例如法向量和曲率。最后水平集方法所用的数据结构十分简单,一般是三维体数据,但计算仅限于水平集附近的一个窄带之内[6]。水平集方法的最大缺点是刻画细节的能力有限,但是近年来所发展的一些新技术使这一问题在一定程度上得以解决,如使用自适应的四面体网格[13]、T 网格以及高阶数据[14]等。

在文献[6]中作者提出了一种解决散乱数据重构的高阶水平集方法,但是因为有光滑项,模型不能很好地保持特征——散乱数据形成的棱角。如果利用经典的水平集方法,则会在离散点处出现尖刺。为了解决这个问题,我们注意到在曲面上有棱角的地方,主曲率的差值大,在光滑地表面上,主曲率的差值小。因此在理论上,主曲率的差值大小可以反映曲面的棱角特征。基于此我们提出了一种新的含有各向异性扩散因子的水平集模型。利用我们的模型构造出的曲面既能光滑地逼近离散数据,又能较好地保持曲面的棱角特征。文献[15]提出了各向异性几何扩散 PDE 模型用来除噪。我们参考文献中的各向异性扩散因子,提出了一种新的水平集能量模型并利用变分法推导出相应的几何流,且利用有限元和 Schmidt 正交化方法求解该几何流,避免了求解方程,从而

到稿日期:2010-01-20 返修日期:2010-03-27 本文受国家自然科学基金(60773165)和国家自然科学基金重点项目(10990013)资助。
荆竹翠(1977—),女,博士生,讲师,主要研究方向为计算几何、生物医学图像处理,E-mail:jingzc@lsec.cc.ac.cn;李 明(1977—),男,博士生,主要研究方向为计算几何、生物医学图像处理;徐国良(1953—),男,博士,教授,主要研究方向为计算几何、生物医学图像处理。

有效地节省了计算时间。

本文第 2 节介绍使用的基本概念;第 3 节引入使用的能量模型及几何流的构造;第 4 节描述数值实现细节;第 5 节给出了数值试验与比较结果;最后总结全文。

2 基本概念

本节介绍要使用的基本概念[6],包括主曲率和 B-样条基。

平均曲率:

假定 S 定义为水平集曲面$\{x\in R^3:\phi(x)=c\}$,其中,ϕ 为定义在R^3 上适当光滑的函数,称之为水平集函数,S 的平均曲率表示为:

$$H=-\frac{1}{2}div\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\right)$$

式中,div 是通常的散度算子,∇是通常的梯度算子。

高斯曲率:

$$K=-\|\nabla\phi\|^{-4}det\begin{bmatrix}\nabla^2\phi & \nabla\phi\\ \nabla\phi^T & 0\end{bmatrix}$$

式中,$\nabla^2\phi$ 是$\nabla\phi$ 的梯度。

主曲率:

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K},k_2=H-\sqrt{H^2-K}$$

B-样条基:

令

$$\beta^3(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}-x^2+\frac{1}{2}|x|^3, & 0\leqslant|x|<1\\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1\leqslant|x|<2\end{cases}$$

则等距节点上支集为 $h[i-2,i+2]$的三次 B-样条基函数是 $N_i(x)=\beta^3(h^{-1}x-i)$。本文中,我们取 $h=1$。

3 保特征的能量模型

问题描述[6]:给定一个散乱数据集$\{x_i\}_{i=1}^m$,它来自于一个封闭曲面的采样,假定采样的密度为γ,也就是说 x_i 与其相邻的点的距离不大于 γ。这里相邻的点不是一个明确的概念,因为所给的数据是散乱的,这意味着点与点之间没有拓扑关系。但是已经知道,这些点来自于一个封闭的曲面,所以可以假定这些曲面上的点是正确地三角化了的,这样相邻的关系便清楚了。所谓正确的三角化是指该三角网格和所采样的曲面的拓扑结构相同。

令 $d(x)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\|x-x_i\|$ 为散乱数据的距离函数,为了构造一个拟合散乱数据的曲面,在文献[6]中,极小化了下面的能量泛函:

$$E(\Gamma)=\int_\Gamma d^p(x)\mathrm{d}A+\varepsilon\int_\Gamma\mathrm{d}A \tag{1}$$

式中,$p>1$ 是一个给定的参数,它代表了驱动曲面向散乱数据方向运动的力的强度。式(1)中的第 2 项起平滑所构造的曲面的作用,其中 ε 是一个小量。$\varepsilon=0$ 时所构造的曲面逼近离散数据,但曲面不能很好地保持棱角特征。为了使构造的曲面既光滑,又能很好地逼近离散数据,保持离散数据的棱角特征,我们提出了如下的保特征的能量模型:

$$E(\Gamma)=E_1(\Gamma)+\varepsilon E_2(\Gamma) \tag{2}$$

式中,

$$E_1(\Gamma)=\int_\Gamma d^2(x)\mathrm{d}A$$

$$E_2(\Gamma)=\int_\Gamma g(k_1,k_2)\mathrm{d}A$$

以及

$$g(k_1,k_2)=\begin{cases}\left(1+\frac{(k_1-k_2-\lambda)^2}{\lambda^2}\right)^{-1}, & k_1-k_2>\lambda\\ 1, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}$$

显然,$g(k_1,k_2)$是 C^1 光滑的二元函数。

模型(2)中的常数 $\varepsilon\geqslant0$ 用来控制规则效果,$\lambda>0$ 用来检测棱角。给定比较大的 λ,当曲面上主曲率的差 $k_1-k_2>\lambda$ 时,就认为检测到了棱角,模型(2)停止驱动曲面在这点局部区域的运动,从而保持了棱角。当 λ 较小时,曲面光滑地逼近离散数据。因此用我们的模型(2)能够精确光滑地重构出离散点的曲面。为了极小化能量函数(2),我们构造了一个弱形式的 L^2-梯度流。假设 ψ 是一个检测函数,现在计算 $E_1(\Gamma)$和 $E_2(\Gamma)$的一阶变分。

$$\begin{aligned}\delta(E_1(\Gamma),\psi)&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{R^3}d^2(x)\delta(\phi)\|\nabla(\varphi+\varepsilon\psi)\|\mathrm{d}x\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\int_{R^3}d^2(x)\delta(\phi)\frac{d}{d\varepsilon}(\|\nabla(\phi+\varepsilon\psi)\|)|_{\varepsilon=0}\mathrm{d}x\\&=\int_{R^3}d^2(x)\delta(\phi)\frac{(\nabla\phi)^T\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据文献[6],当 $F(\Gamma)=\int_\Gamma f(H,K)\mathrm{d}A$ 时,有如下的欧拉-拉格朗日弱形式:

$$\begin{aligned}\delta(F(\phi),\psi)=&\int_{R^3}f(H,K)\delta(\phi)\frac{(\nabla\phi)^T\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}-\frac{1}{2}f_H\delta(\phi)\\&\|\nabla\phi\|div\left(\frac{P\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}\right)\mathrm{d}x-\int_{R^3}f_K\delta(\phi)4K\\&\frac{(\nabla\phi)^T\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}+f_k\delta(\phi)\frac{tr(\Psi A)}{\|\nabla\phi\|^3}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{3}$$

用 $k_1=H+\sqrt{H^2-K}$,$k_2=H-\sqrt{H^2-K}$ 可以得到式(3)中的 $f(H,K)$为:$f(H,K)=g(k_1,k_2)=$

$$\begin{cases}\frac{\lambda^2}{2\lambda^2+4(H^2-K)-4\lambda\sqrt{H^2-K}}, & k_1-k_2>\lambda\\ 1, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}\tag{4}$$

根据式(4)可以求出 f_H 和 f_K 分别为:

$$f_H=\begin{cases}\frac{-\lambda^2(2H\sqrt{H^2-K}-\lambda H)}{\sqrt{H^2-K}(\lambda^2+2H^2-2K-2\lambda\sqrt{H^2-K})^2}, & k_1-k_2>\lambda\\ 0, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}\tag{5}$$

$$f_K=\begin{cases}\frac{\lambda^2(4\sqrt{H^2-K}-2\lambda)}{\sqrt{H^2-K}(2\lambda^2+4H^2-4K-4\lambda\sqrt{H^2-K})^2}, & k_1-k_2>\lambda\\ 0, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}\tag{6}$$

利用 $H=\frac{k_1+k_2}{2}$,$K=k_1k_2$ 和式(3)—式(6),我们得到如下的变分形式:

$$\begin{aligned}\delta(E_2(\Gamma),\psi)=&\int_{R^3}g\delta(\phi)\frac{(\nabla\phi)^T\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}-\frac{1}{2}g_1\delta(\phi)\\&\|\nabla\phi\|div\left(\frac{P\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}\right)\mathrm{d}x-\int_{R^3}g_2\delta(\phi)4k_1k_2\\&\frac{(\nabla\phi)^T\nabla\psi}{\|\nabla\phi\|}+g_2\delta(\phi)\frac{tr(\Psi A)}{\|\nabla\phi\|^3}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

式中,

$$g_1=f_H=\begin{cases}\frac{4(k_1\lambda^3+k_2\lambda^3-k_1^2\lambda^2+k_2^2\lambda^2)}{(k_1-k_2)(2\lambda^2-2\lambda k_1+2\lambda k_2+k_1^2-2k_1k_2+k_2^2)^2}, & k_1-k_2>\lambda\\ 0, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}$$

$$g_2=f_k=\begin{cases}\dfrac{4\lambda^2k_1-4\lambda^2k_2-4\lambda^3}{(k_1-k_2)(2\lambda^2-2\lambda k_1+2\lambda k_2+k_1^2-2k_1k_2+k_2^2)^2}, & k_1-k_2>\lambda\\ 0, & k_1-k_2\leqslant\lambda\end{cases}$$

$\Psi=\begin{bmatrix}\nabla^2\psi & \nabla\psi\\ \nabla\psi^T & 0\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}B & B_1\\ B_1^T & B_2\end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix}\nabla^2\phi & \nabla\phi\\ \nabla\phi^T & 0\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵，$B\in R^{3\times3}$，$B_1\in R^{3\times1}$ 以及 $B_2\in R$。$P=I-\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\otimes\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}$ 是到曲面的切平面上的投影算子，I 是恒等映射。因此我们构造出如下形式的 L^2-梯度流，对于所有 C^2 光滑的 ψ，我们有：

$$\int_\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial t}\psi\mathrm{d}x+\delta(E_1(\Gamma),\psi)+\varepsilon\delta(E_2(\Gamma),\psi)=0 \tag{7}$$

为了求解式(7)，在时间方向，使用显式的向前欧拉格式；在空间方向，使用有限元方法在三次 B-样条基函数的张量积形式构成的空间中离散化。在下一节里，我们将给出具体的求解式(7)的算法和实现细节。

选择三次 B-样条作为有限元空间首先是因为模型中需要计算曲率，所以使用具有二阶以上光滑度的水平集函数是必要的。已经知道，C^2 光滑的最低次的样条函数是三次样条，所以这里使用三次样条(张量积形式)作为水平集函数。其次，B-样条基函数有局部支集。B-样条的这些性质使得有限元的计算非常有效。

4 算法和实现细节

我们在三次样条函数空间中求解方程(7)。首先给出算法步骤。

(1)输入散乱数据集$\{x_i\}_{i=1}^m$。

$\phi^{(0)}$：初始函数。

ϵ：给定的误差阈值。

k：迭代次数，$k=0$。

利用 $\phi^{(0)}$，得到正交 B-样条基系数$\{\tilde{\phi}_{ijk}^{(0)}\}$。

(2)迭代计算 $\phi^{(k+1)}$。

(a) 计算 $\tilde{\phi}_{ijk}^{(k+1)}=\tilde{\phi}_{ijk}^{(k)}+\tau\Delta\tilde{\phi}_{ijk}^{(k)}$。

(b) 转换 $\tilde{\phi}_{ijk}^{(k+1)}$ 到 $\phi^{(k+1)}$。

(c) 如果$|E^{(k+1)}(\Gamma)-E^{(k)}(\Gamma)|<\epsilon$，循环终止；否则置 $k=k+1$，回到(a)。

(3)输出 $\phi=\phi^{(k+1)}$。

令 $N_i(u)$为定义在等距网格$[i-2,\cdots,i+2]$上的三次 B-样条基函数，则 $\phi(x)$和检测函数 $\psi_{\alpha\beta\gamma}(x)$分别表示为：

$$\phi(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{t}\phi_{ijk}N_i(x)N_j(y)N_k(z) \tag{8}$$

$$\psi_{\alpha\beta\gamma}(x)=N_\alpha(x)N_\beta(y)N_\gamma(z) \tag{9}$$

式中，ϕ_{ijk}为待定系数。将式(8)和式(9)代入式(7)，我们得到如下矩阵形式的方程组：

$AX=B$

矩阵 A 的元素为：

$$\int_R N_i(x)N_\alpha(x)\mathrm{d}x\int_R N_j(y)N_\beta(y)\mathrm{d}y\int_R N_k(z)N_\gamma(z)\mathrm{d}z$$

上面的一维积分可以通过高斯积分公式计算[16,17]。由于 B-样条基函数是局部支集的，因此，这些一维积分能够快速有效地计算。注意到矩阵在重构过程中是不变的，因此 A^{-1}可以预先计算好。向量 B 的元素是$-[\delta(E_1(\Gamma),\psi_{\alpha\beta\gamma})+\varepsilon\delta(E_2(\Gamma),\psi_{\alpha\beta\gamma})]$。

现在我们给出计算矩阵 A 元素的方法。假设基函数 $N_i(x)$，$N_j(x)$和 $N_k(x)$的个数分别为 m,n 和 t，那么矩阵 A 包含 $m^2\times n^2\times t^2$ 个元素。当 m,n 和 t 非常大时，有可能使得存储 A 的空间超过了计算机的内存。为了克服这个问题，我们利用 Schimidt 正交化过程将基函数 $N_i(x)$正交化，获得了一组新的正交基函数 $\tilde{N}_i(x)$，使得：

$$\int_R\tilde{N}_i(x)\tilde{N}_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij}\ ,i,j=1,\cdots,\max(m,n,t)$$

令

$$\phi(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{t}\tilde{\phi}_{ijk}\tilde{N}_i(x)\tilde{N}_j(y)\tilde{N}_k(z)$$

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta\gamma}(x)=\tilde{N}_\alpha(x)\tilde{N}_\beta(y)\tilde{N}_\gamma(z)$$

则 A 是一个单位矩阵，因此不需要存储矩阵。

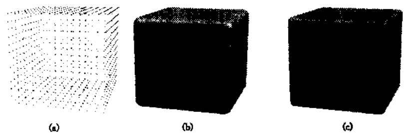
通过一个正交的下三角矩阵 M 可将这两种基函数形式联系起来，旧基和新基有如下的关系：

$$[N_1,N_2,\cdots,N_n]^T=M[\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\cdots,\tilde{N}_n]^T$$

ϕ 的这两种表达形式很容易互相转化。我们采用这两种形式来减少 B 的计算。有关使用窄带技术的具体细节，参见文献[6]。

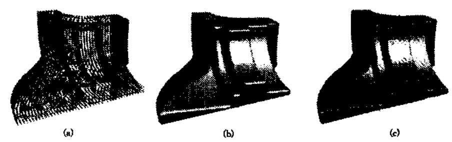
5 数值试验

本节显示了 4 个用我们的算法重构出的曲面。数值试验环境：DELL OptiPlex 755(E8400/2GB/250GB)。在 Linux 系统下，使用 C/C++语言。图 1—图 4 给出用我们的方法和经典的水平集迭代相同次数的试验结果。图 1(a)、图 2(a)、图 3(a)和图 4(a)显示的是输入的散乱数据。而图 1(b)、图 2(b)、图 3(b)和图 4(b)显示的是用传统的水平集方法构造的重构曲面，它们是散乱数据的一个很好的逼近，但是没有很好的保持特征。图 1(c)、图 2(c)、图 3(c)和图 4(c)显示的是在我们的模型中分别取 $\varepsilon=0.1$，$\lambda=0.000001$，$\varepsilon=0.1$，$\lambda=0.00005$，$\varepsilon=0.055$，$\lambda=0.00012$ 和 $\varepsilon=0.1$，$\lambda=0.00001$ 时的重构结果。显然各中(c)比相应的(b)能更好地保持棱角。试验结果表明我们的模型确能保持重构物体的棱角特征。



(a) 输入的散乱数据；(b) 用传统水平集方法重构的曲面；
(c) 使用我们的方法的重构结果

图 1



(a) 输入的散乱数据；(b) 用传统水平集方法重构的曲面；
(c) 使用我们的方法的重构结果

图 2

(a) 输入的散乱数据；(b) 用传统水平集方法重构的曲面；
(c) 使用我们的方法的重构结果

图 3

(下转第 274 页)

闲区域映射到无向图上，将寻找最大空闲矩形问题转化为求解最大回路和通路问题，使空闲区域划分过程大大简化。仿真结果表明，应用图论技术解决问题的思想和方法是可行的。将图论技术应用于可重构资源管理领域，目前在国内还未见过报道，本文在这个方面进行探索，初步的结果比较理想，在最大矩形判断方法和计算复杂度等问题上还可以继续做深入研究。

参 考 文 献

[1] Walder H, Steiger C, Platzner M. Fast Online Task Placement on FPGAs: Free Space Partitioning and 2D Hashing[J]. IEEE Trans on Computers, 2003, 53(11): 178-185

[2] Bazargan K, Kastner R, Sarrafzadeh M. Fast Template Placement for Reconfigurable Computing Systems[J]. IEEE Design &Test of Computers, 2000, 17(1): 68-83

[3] 齐骥，李曦，胡楠，等. 基于硬件任务顶点的可重构系统资源管理算法[J]. 电子学报，2006，34(11)：2094-2098

[4] 李涛，杨愚鲁. 可重构资源管理及硬件任务布局的算法研究[J]. 计算机研究与发展，2008，45(2)：375-382

[5] Handa M, Vemuri R. An efficient algorithm for finding empty space for online FPGA placement[C]// The 15th Int'l Conf on Field Programmable Logic and Applications. Tampere, Finland, 2005: 960-965

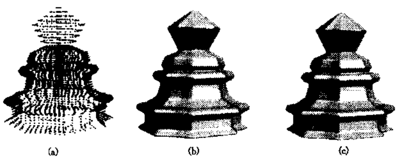
[6] Ahmadinia A, Bobda C, Bednara M, et al. A New Approach for On-line Placement on Reconfigurable Devices[C]// Int'l Conf on Architecture of Computing System. Augsburg, Germany, 2004: 134-140

[7] Cui Jin, Deng Qing-xu, He Xiu-qiang, et al. An efficient algorithm for online management of 2D area of partially econfigurable FPGAs[C]// Proceeding of the conference on Design, automation and test. California, 2007: 129-134

[8] 张先迪，李正良. 图论及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2005：46-52

[9] 龚育昌，齐骥. 一种支持动态可重构系统的布局碎片量化方法[J]. 小型微型计算机系统，2007，28(5)：944-947

(上接第 254 页)



(a) 输入的散乱数据；(b) 用传统水平集方法重构的曲面；(c) 使用我们的方法的重构结果

图 4

结束语 本文对给定的散乱数据进行了曲面重构。为了使重构曲面能够保持棱角特征，我们在极小化能量模型(1)中增加了一个各向异性扩散因子。通过变分方法将极小化问题转化为一个弱形式的 L^2-梯度流来求解。利用三次 B-样条基函数将梯度流转化为矩阵形式的方程组。为了解决矩阵 A 存储的问题，我们又设计利用 Schimidt 正交化过程，将矩阵 A 转化为一个单位矩阵，从而大大节省了存储空间，提高了算法效率。试验结果表明我们的模型能很好地保持重构物体的棱角特征。

参 考 文 献

[1] Xu G, Zhang Q, Liu D. Smooth surface reconstruction from noisy scattered data-variational level set methods [J]. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2007, 19(7): 840-848

[2] Peng D, Merriman B, Osher S, et al. A pde-based fast local level set method [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 155: 410-438

[3] Zhao H K, Osher S, Merriman B, et al. Implicit nonparametric shape reconstruction from unorganized points using a variational level set method [J]. Computer Vision and Image Unders-tanding, 2000, 80(3): 295-319

[4] Zhao H K, Osher S, Fedkiw R. Fast surface reconstruction using the level set method [C]// Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision. 2001: 194-201

[5] Yang Z, Deng J, Chen F. Fitting unorganized point clouds with active implicit B-spline curves [J]. Visual Computer, 2005, 21(8-10): 831-839

[6] 徐国良. 计算几何中的几何偏微分方程方法[M]. 北京：科学出版社，2008，10：284-285

[7] Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79: 12-49

[8] Osher S, Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. Vol. 153 [M]. Applied Mathe-matical Science. New York: Springer-Verlag, 2003

[9] Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science(second ed)[M]. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematical. Cambridge: Cambridge University Press, 1999

[10] Xu G. Adaptive and smooth surface construction by triangular A-patches [M]. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2003, 34: 213-225

[11] Bajaj C L, Chen J, Xu G. Modeling with cubic A-patches [J]. ACM Transactions on Graphics, 1995, 14(2): 103-133

[12] Zhao H K, Chan T, Merriman B, et al. A variational level set approach to multiphase motion [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127: 179-195

[13] Preußer T, Rumpf M. An adaptive finite element method for large scale image processing[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2000: 183-195

[14] Kobbelt L, Botsch M, Schwanecke U, et al. Feature sensitive surface extraction from volume data[C]// Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. New York, USA, ACM, 2001: 57-66

[15] Bajaj C L, Xu G. Anisotropic diffusion of surface and functions on surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, 22(1): 4-32

[16] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphics, and Mathematical Tables[M]. America Dover Publications, Inc., 1972

[17] Xu G, Shi Y. Progressive computation and numerical tables of generalized Gaussian quadrature formulas [J]. Journal on Numerical Methods and the Computer Application, 2006, 27(1): 9-23