平滑区域梯度保真的图像降噪方法

王旭东 冯象初 陈利霞

(西安电子科技大学理学院应用数学系 西安 710071)

摘 要 基于有界变差的图像去噪模型在去除噪声的同时会产生"阶梯效应",在模型中耦合梯度保真项能够有效地 抑制"阶梯效应",但全局梯度保真却导致图像的边缘模糊。新模型讨论了平滑区域的判定方法,在此基础上给出了基 于平滑区域梯度保真的去噪模型和两种修正方法。新的去噪方法在去除图像噪声的同时压低了"阶梯效应",且能够 很好地保留图像的边缘。数值实验验证了所提模型的效果。 关键词 降噪,平滑区域,梯度保真,方向匹配最小化

中图法分类号 TP301 文献标识码 A

Denoising Method with Gradient Fidelity Term on Smoothing Region

WANG Xu-dong FENG Xiang-chu CHEN Li-xia (Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract Image denoising based on total variation may cause 'staircase effect' while the noise is removed. Using the coupled gradient fidelity term can effectively restrain 'staircase effect', but it makes edges obscured. This paper discussed the the way to detect smooth regions of an image. And three denoising methods with gradient fidelity term on smoothing region were proposed. Our methods can not only improve the denoising performance significantly, but also overcome 'staircase effect' and preserve the edges. Numerical experiments demonstrate our models are efficiency. **Keywords** Denoising, Gradient fidelity, Smoothing region, Orientation-matching minimization

1 概述

图像去噪是图像处理的重要研究内容,噪声图像的一般 模型是

u₀=u+n (1) 式中,u是期望得到的图像,u₀ 是含噪声图像,n 是图像中所 加的噪声。本文把噪声限制为零均值高斯白噪声,也就是,任 一像素所加的噪声 n_{ij} 服从 i. i. d 的均值为 0,标准差为 σ 的正 态分布。

1992 年 Rudin-Osher-Fatemi 给出基于有界变差(TV)范 数的正则模型(ROF 模型)^[1]

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \{ \int_{\Omega} \left[\phi \left[\mid \nabla u \mid \right] + \alpha \mid u - u_0 \mid^2 \right] dx \}$$
(2)

由 Euler-Lagrange 公式得

$$div\left(\phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + 2\alpha(u_0 - u) = 0 \tag{3}$$

这个模型可以去除图像的噪声,但在降噪过程中引入了 "阶梯效应",即由分片常数带来的块状结构。为了去掉"阶梯 效应"同时保持图像的边缘,人们分析了"阶梯效应"产生的原 因并提出了许多非线性滤波方法^[2+11]。例如,文献[2]认为 "阶梯效应"产生的原因,是在相对光滑的区域,由于梯度值 |▽u¦比较小,导致式(2)在这些区域内扩散速度很大,使得其 在这些区域中很快变成分片常数;文献[3]利用分数各向异性 扩散模型来降低图像噪声,同时去掉"阶梯效应"。在最近几 年,四阶偏微分方程受到人们特别的关注^[4,5]。例如,You Yu-li和 Kaveh M.提出了一族四阶偏微分方程,这族四阶偏 微分方程是关于图像灰度值函数二阶导数绝对值增函数的欧 拉-拉格朗日方程^[5]。文献[6,7]采用 TV-Stokes 来处理图像 的噪声。这些方法在降噪的同时去除由于算法引起的新的噪 声和扭曲方面都取得了一定的效果。这里特别指出,文献[8-11]采用了图像的梯度保真项去除图像的噪声,这种去噪方法 能够去除图像的噪声,同时能有效压低图像处理的"阶梯效 应"。但是这种方法会使得图像的边缘变模糊。

本文提出一种局部梯度保真的方法来处理图像的噪声, 这种方法能够去除图像的噪声,压低图像处理的"阶梯效应", 同时能很好地保留图像的边缘。

2 局部光滑区域的确定

图像的光滑区域指其周围像素灰度值没有明显变化的那 些像素的集合,而图像的边缘是指其周围像素灰度有阶跃变 化或屋顶变化的那些像素的集合。边缘反映的是图像灰度变 化的不连续性。

在现有的方法中,传统的微分边缘检测算子是利用图像

· 230 ·

到稿日期:2010-01-20 返修日期:2010-04-21 本文受国家自然科学基金(NSFC 60872138)资助。

王旭东(1973一),男,博士生,主要研究方向为偏微分方程理论、小波理论及其在图像处理中的应用,E-mail;xudwang@sohu.com;**冯象初**(1962 一),男,教授,博士生导师,主要研究方向为数值分析、小波理论及其应用、图像处理;陈利霞(1979~),女,博士生,主要研究方向为图像处理、小 波理论。

边缘点灰度的突变性,通过求出图像横向和纵向的一阶或二 阶梯度的模值和幅角值,最后沿幅角方向求出模极大值从而 得到图像的边缘。理论分析表明,这些检测算子均属于高通 线性滤波器,而噪声和边缘均属于高频范围,所以直接对含有 噪声的图像运用梯度算子,可能丢失重要的边缘信息,故对含 有噪声的图像边缘的检测效果并不理想^[13]。用小波变换的 边缘检测方法提取边缘时,可以有效地提取边缘,但是计算量 较大,为了辨识噪声,要进行多级小波分解^[1417]。本文采用窗 口方差来判定图像平滑区域。

2.1 方差的判定

图像的边缘像素值变化比较大,而平滑区域像素值变化 比较小。因此对应图像边缘的局部窗的方差比较大,而对应 平滑区域的局部窗的方差就会比较小。具体地说,取[(2k+ 1)×(2k+1)],k∈ N⁺大小的窗,局部窗像素均值为

$$\bar{u}_{0}(m,n) = \frac{1}{(2k+1) \times (2k+1)} \sum_{s,t=-k}^{k} u_{0}(m-s,n-t)$$
(4)
局部窗的方差

$$V(m,n) = \sum_{s,t=-k}^{\infty} (u_0(m-s,n-t) - \overline{u_0}(m,n))^2$$
(5)
由方差 V 的大小可区分光滑区域和边界区域。

2.2 阈值大小的选取

我们设定阈值 S,当局部窗的方差小于 S时,则判定局部 窗的中心点属于平滑区域。S一般与噪声的大小有关。阈值 选得较小,会把图像平滑区域中较大的噪声像素当作图像的 边缘;而阈值选得较大,会丢失图像中较弱的图像边缘。由正 态分布函数,我们选取 $S=2\sigma$,这里 σ 是噪声的标准差。这个 阈值可以过滤掉 95%以上的噪声。图 1 给出了阈值选取的 例子。可以明显地看到,当 $S=1.5\sigma$ 时,边缘图像中含有较多 的噪声;当 $S=3\sigma$ 时,图像中较弱的边缘被过滤掉了。



(a) 原图;(b) $S=1.5\sigma$ 时方差大于阈值的边界区域;(c) $S=2\sigma$ 时方 差大于阈值的边界区域;(d) $S=3\sigma$ 时方差大于阈值的边界区域

图 1 方差大于阈值的边界区域图

2.3 梯度保真项的权

梯度保真项的权 ω(m,n)的选取依赖于对 V(m,n)的阈 值处理。在这里我们参照小波阈值的选取方法来进行^[14-18]。

(1)硬阈值

若V(m,n) > S,则点(m,n)位于图像的边缘区域,令 ω (m,n)为零;

若 $V(m,n) \leq S$,则点(m,n)位于图像的光滑区域,令 ω (m,n)为1,即

$$m = \begin{cases} 1, \quad V(m,n) \leqslant S \\ 0, \quad V(m,n) > S \end{cases}$$
(6)

硬阈值方法简单,但阈值函数是不连续的,利用估计重构 所得的边缘可能会产生一些震荡。

(2)软阈值

软阈值是指对绝对值大于或等于阈值 S 的系数不是简 单地予以保留,而是将其收缩置零,可用如下形式表示

$$\omega = \begin{cases} (S - V(m, n))^{\alpha}, & V(m, n) \leq S \\ 0, & V(m, n) > S \end{cases}$$
(7)

式中,a≥1。软阈值估计出来的边缘整体连续性好,但是由于 幅值超过阈值的边缘与估计值总存在偏差,因此直接影响构 造的边缘与真实边缘的逼近程度。本文着重进行硬阈值方法 的讨论。

3 平滑区域梯度保真项的去噪模型

文献[9-11]给出如下模型

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \{ \int_{\Omega} [\phi(| \nabla u |) + \alpha | u - u_0 |^2] dx dy + \int_{\Omega} [\beta(|| \nabla u - \nabla (G_{\sigma} * u_0) ||)^2] dx dy \}$$
(8)

式中,引入耦合梯度保真项 $\| \nabla u - G_a * \nabla u_0 \|^2$,迫使处理后 图像的梯度与原来图像的梯度尽可能一致。模型(8)的 Euler-Lagrange 方程是

$$div\left(\phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + 2\alpha(u_0 - u) + 2\beta(\Delta u - \Delta(G_{\sigma} * u_0)) = 0$$
(9)

式中, $\Omega \in R^2$ 为图像的定义域,函数 ϕ 是凸函数, G_a 是高斯函数, σ 是高斯函数的方差; α , β 是控制函数,满足 $\alpha > 0$, $\beta > 0$; u_0 表示噪声图像,u 表示恢复后的结果。

式(8)在去噪的同时降低了"阶梯效应"。事实上式(8)的 第一项起到了去除噪声的功能,而第二项使得式(8)能够得到 分段光滑的结果。正则化项($\| \bigtriangledown u - G_s * \bigtriangledown u_0 \|$)²使得到的 去噪结果的梯度和原有的梯度尽可能一致。如果 u 是分段常 量的,则 $\bigtriangledown u \approx 0$,这会使得正则化项($\| \bigtriangledown u - G_s * \bigtriangledown u_0 \|$)² 变大,从而达到去噪和降低"阶梯效应"的目的。

因为图像的边缘不总是可微的,而式(8)中图像的边缘要 受到 || ▽*u*-*G*, * ▽*u*₀ || ² 的平滑作用,从而使得图像的边缘 变的模糊。后面的实验结果也证明了这一点。

为此,我们提出带有权ω的梯度保真项模型

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \{ \int_{\Omega} [\phi(| \nabla u |) + \alpha | u - u_0 |^2] dx dy + \int_{\Omega} [\beta \omega(|| \nabla u - \nabla (G_{\sigma} * u_0) ||)^2] dx dy \}$$
(10)

式(10)的 Euler-Lagrange 方程是

$$div\left(\phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + 2\alpha(u_0 - u) + 2\beta\omega(\Delta u - \Delta(G_{\sigma} * u_0)) = 0$$
(11)

实验结果表明,权ω的引入在保持光滑区域去噪结果的 同时减轻了图像边缘的模糊。

4 两种修正的平滑区域梯度保真项的去噪模型和 算法

4.1 修正模型--

文献[6,19]利用 TV 滤波来光滑一个噪声图像水平曲线的法向量,即求解n

$$\min_{\vec{r},\vec{n}=0} \left\{ \int_{\Omega} \left(\left| \vec{n} \right| + \frac{\lambda}{2} \left| \vec{n} - \vec{n_0} \right|^2 \right) dx \right\}$$
(12)

然后找一个平面去拟合光滑的法向量,即通过下式求解

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(| \nabla u | - \nabla u \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) + \alpha | u - u_0 |^2 \right] dx \right\}$$
(13)

式中, no, n 是相应法向量。这种方法在图像的光滑区域可以

• 231 •

得到光滑的图像,而在图像的纹理部分则变化得非常迅速。

本质上式(13)是一种全局梯度保真方法,可进行如下的 修正

$$u = \operatorname{argmin}_{u} \left\{ \int_{\Omega} \left[\phi(|\nabla u|) + \alpha(|u - u_{0}|^{2}) \right] dx + \int_{\Omega} \left[\beta \omega \right| |\nabla u| - \nabla u \cdot \frac{n_{0}}{|n_{0}|} \right] dx \right\}$$
(14)

式中, $n_0 = G_s * \nabla u_0$,是噪声图像 u_0 向量场的法向量。

式(14)相应的变分方程是

$$div\left(\phi'(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + 2\alpha(u_0 - u) + \beta\omega\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} - \frac{n_0}{|n_0|}\right) = 0$$
(15)

4.2 修正模型二

文献[7]提出了方向匹配最小化的 TV-Stokes 方程模型 来求解 \dot{t}

$$\min_{\nabla \cdot t = 0} \int_{\Omega} \left(|\nabla t| + \frac{\lambda}{2} |t - t_0|^2 \right)$$
(16)

式中, t和 to 是相应图像向量场的切向量。然后求解 u

$$u = \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left\{ \int_{\alpha} \left[\left(-\frac{|\nabla u \cdot n|}{|\nabla u| |\vec{n}|} \right) + \alpha |u - u_0|^2 \right] dx \right\}$$
(17)

这个模型能够使噪声图像的边缘变清晰,特别是原始图 像在清晰边缘附近有光滑变化的像素值^[7]。

式(17)是一种全局梯度保真,可进行如下的修正

u =

$$\operatorname{argmin}_{u}\left\{\int_{\Omega}\left[\phi(|\nabla u|)+\alpha||u-u_{0}||^{2}-\beta\omega\frac{|\nabla u\cdot n_{0}|}{|\nabla u||n_{0}|}\right]dx\right\}$$
(18)

式(18)对应的变分模型是

$$div\left(\phi'\left(|\nabla u|\right)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+2\alpha(u_{0}-u)+$$

$$\beta\omega\nabla\cdot\left(\frac{|\nabla u\cdot n_{0}|}{|\nabla u|^{2}|n_{0}|}\frac{\nabla u}{|\nabla u|}-\frac{\operatorname{sgn}(\nabla u\cdot n_{0})}{|\nabla u|}\frac{n_{0}}{|n_{0}|}\right)=0$$
(19)

5 数值实验

本节通过数值实验来验证模型的效果。本文采用峰值信 噪比来度量模型的去噪效果。



(a) 原图;(b)方差大于阈值的边界区域;(c)模型(8)^[9-11]去噪效果
 图像;(d)模型(10)去噪效果图像;(e) ω≕1 时(14)去噪效果图像;
 (f)阈值处理(14)去噪效果图像;(g)ω≕1 时(18)去噪效果图像;
 (h)阈值处理(18)去噪效果图

图 2 数值实验 1 细节去噪的结果

数值实验1

我们对模拟图像(a)用论文中的3种方法进行实验。图

像中所加噪声是标准差为 20 的高斯白噪声。图 1 是原图和 3 种阈值下方差大于阈值的边界区域图。

图 2 是模拟图像(a)的图像细节降噪处理的结果,可以看 到图像的边缘清晰了。

表1给出数值实验1细节去噪的 PSNR 比较。

表1 数值实验1细节去噪的 PSNR 比较

模型(8)	模型(10)	ω≡1 时 (14)	阈值处理 (14)	w≡1时 (18)	阈值处理 (18)
28.2421	30.9704	29,9802	30.9677	27.7425	30, 1134

数值实验2

图 3 是 Lena 图像在加标准差为 10 的高斯白噪声时的去 噪结果及比较,图 4 是局部的比较。



 (a)原图;(b)方差大于阈值的边界区域;(c)模型(8)^[9-11]去噪效果 图像;(d)模型(10)去噪效果图像;(e)ω=1时(14)去噪效果图像;
 (f)阈值处理(14)去噪效果图像;(g)ω=1时(18)去噪效果图像;
 (h)阈值处理(18)去噪效果图

图 3 数值实验 2 的结果

从表 2 可以看到,新模型处理后的图像边缘要清楚一些, 如实验图像中的帽子的装饰部分,眼睛、眉毛要比原模型的清 晰。图 4 是 Lena 图像细节处理的结果。

表 2 数值实验 2 的 PSNR 比较

模型(8)	模型(10)	ω≡1 时 (14)	阈值处理 (14)	ω≡1 时 (18)	阈值处理 (18)
33, 2743	33.5136	32.9627	33. 5202	32.7732	32, 9019



(a)原图;(b)方差大于阈值的边界区域;(c)模型(8)^[9-11]的去噪效 果图像;(d)模型(10)的去噪效果图像;eω=1时(14)去噪效果图 像;(f)阈值处理(14)去噪效果图像;(g)ω=1时(18)去噪效果图 像;(h)阈值处理(18)去噪效果图像

图 4 眼睛细节去噪结果

表3给出眼睛细节去噪效果 PSNR 比较。

表 3 眼睛细节去噪效果 PSNR 比较

模型(8)	模型(10)	w≡1时 (14)	阈值处理 (14)	w≕1时 (18)	阈值处理 (18)
28, 7906	30.0047	29.3512	29.7912	29.2380	29, 4318

数值实验3

该实验是在加标准差为 10 的高斯白噪声时的数值结果, 图 5 是原图以及实验的结果,而表 4 则是相应的 PSNR 比较。



(a)原图;(b)方差大于阈值的边界区域;(c)模型(8)^[9-11]去噪效果
图像;(d)模型(10)去噪效果图像;(e)ω=1时(14)去噪效果图像;
(f)阈值处理(14)去噪效果图像;(g)ω=1时(18)去噪效果图像;
(h)阈值处理(18)去噪效果图像

图 5 数值实验 3 的结果

表 4 数值实验 3 的 PSNR 比较

模型(8)	模型(10)	ω≡1 时 (14)	阈值处理 (14)	w≡1时 (18)	阈值处理 (18)
26.9196	28,9092	26.5591	27.6381	28, 2644	28. 3627

新模型在保持图像的细节方面要好一些,图6是数值实验3图像细节降噪的结果。



(a)原图;(b)方差大于阈值的边界区域;(c)模型(8)^[9-11]的去噪效 果图像;(d)模型(10)的去噪效果图像;(e) ω≕1 时(14)去噪效果 图像;(f)阈值处理(14)去噪效果图像;(g)ω≈1 时(18)去噪效果图 像;(h)阈值处理(18)去噪效果图像

图 6 数值实验 3 细节去噪结果

表 5 给出数值实验 3 细节去噪的 PSNR 比较。

表 5 数值实验 3 细节去噪的 PSNR 比较

模型(8)	模型(10)	ω ≡1 时 (14)	阈值处理 (14)	ω =1 时 (18)	阈值处理 (18)
21.4592	23, 7619	24.0473	24. 2397	23,0796	23. 3322

结束语 本文针对带梯度保真项的去噪泛函模型易产生 边缘模糊的缺点进行了分析研究,通过阈值的方法,引入平滑 区域梯度保真项去噪模型,并提出了两个修正的模型。从数 值实验的结果来看,我们的模型能够去除图像噪声,保持图像 的边缘,同时能够有效地压制"阶梯效应"。

参考文献

 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D: NonlinearPhenomena, 1992,60:259-268

- [2] You Yu-li, Xu Wen-yuan, Allen T. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(11): 1539-1553
- [3] Bai Jian, Feng Xiang-chu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(10): 2492-1502
- [4] Chan T F, Marquina A, Mulet P. High-order total variationbased image restoration[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2):503-516
- [5] You Yu-li, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000,9(10):1723-1730
- [6] Rahman T, Tai Xue-cheng, Osher S. A TV-Stokes denoising algorithm[C]// Sgallari F, Murli A, Paragios N, et al., eds. Lecture Notes in Computer Science, 4485. Springer-Verlag, 2007: 473-483
- [7] Tai Xue-cheng, Borok S, Hahn J. Image denoising using TV-Stokes equation with an matching orientation-minimization [C]// Tai Xue-cheng, Morkken K, Lysaker M, et al., eds. Lecture Notes in Computer Science, 5567. Springer-Verlag, 2009: 490-501
- [8] Shan Q, Jia J, Agarwala A. High-quality Motion Deblurring from a Single Image [J]. SIGGRAPH, 2008 ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): 1-10
- [9] Zhu Li-xin, Xia De-shen. Staircase effect alleviation by coupling gradientdelity term [J]. Image and Vision Computing, 2008, 26: 1163-1170
- [10] Suryam V B, Singh P A. Ringing artifact reduction in blind image deblurring and denoisingproblems by regularization methods
 [A] // 2009 Seventh International Conference on Advances in Pattern Recognition [C]. Kolkata, India, 2009; 333-336
- [11] 朱立新,王平安,夏德深.引人耦合梯度保真项的非线性扩散图 象去噪方法[J].计算机研究与发展,2007,44(8);1390-1398
- [12] Han Xian-hua, Dai Shui-yan, Li Jian, et al. Edge detection algorithm based on ICA-domain shrinkage in noisy images[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2008, 51(9): 1349-1359
- [13] Canny F J. A computation approach to edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986,6:670-700
- [14] 赵瑞珍.小波理论及其在图像、信号处理中的算法研究[D]. 西 安:西安电子科技大学,2001
- [15] 姜东焕.小波与偏微分方程在图像处理中的应用研究[D]. 西 安:西安电子科技大学,2007
- [16] 尚晓清,王军锋,宋国乡.一种基于自适应阈值的图像去噪新方 法[J]. 计算机科学,2003,30(9):70-71
- [17] 傅博,王相海. 一种基于细尺度间小波系数相关性的图像去噪方 法[J]. 计算机科学,2008,35(10):246-249
- [18] 冯象初,甘小冰,宋国乡.数值泛函与小波理论[M].西安:西安 电子科技大学出版社,2003
- [19] Lysaker M, Osher S, Tai Xue-cheng. Noise Removal Using Smoothed Normals and Surface Fitting[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(10):1345-1357