第37卷 第11期
2010年11月

Vol. 37 No. 11
Nov 2010

集值信息系统的粗糙熵

马建敏[1] 张文修[2]

(长安大学理学院数学与信息科学系 西安 710064)[1]

(西安交通大学理学院信息与系统科学研究所 西安 710049)[2]

摘 要 熵理论是信息系统中不确定性研究的有效工具之一。首先给出了集值信息系统的拟序关系,在此基础上引入了粗糙熵,讨论了粗糙熵的最大、最小值,并证明了粗糙熵的单调性。

关键词 集值信息系统,拟序关系,信息粒,粗糙熵

中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Rough Entropy of Set-valued Information Sytems

MA Jian-min[1] ZHANG Wen-xiu[2]

(Department of Mathematics and Information Sciences, Faculty of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China)[1]

(Institute of Information and System Science, Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)[2]

Abstract Entropy theory is an effective tool for studying uncertainty. Based on a pre-order relation defined on an set-valued information system, rough entropy was proposed. The maximum and minimum values of rough entropy were shown. And the monotony of rough entropy was also proved.

Keywords Set-valued information system, Pre-order relation, Information granule, Rough entropy

1 引言

粗糙集理论[1]是波兰数学家 Pawlak 1982 年提出的一种处理不精确、不确定及模糊性知识的软计算工具。该理论由于能够分析处理不精确、不协调及不完备等信息而引起人工智能工作者的广泛关注,目前已被成功应用到机器学习与知识发现、数据挖掘、决策支持分析、过程控制、模式识别等领域[2-5]。

熵的概念最早被用于度量热力学系统的无序性和紊乱性,1948 年 Shannon 借用熵的概念度量系统的不确定性[6]。之后很多学者利用熵的概念研究粗糙集理论中的不确定性。苗夺谦等人[7,8]从信息角度,给出了知识的粗糙性与信息熵之间的关系,证明了熵与互信息基于知识的粗糙性的单调性。王国胤等人研究了信息论观点和代数观点下的属性约简关系[9],并提出了基于条件信息熵的决策表约简算法[10]。梁吉业等人[11,12]讨论了完备及不完备信息系统中知识熵和粗糙熵之间的关系,并研究了完备及不完备信息系统中信息粒度与熵之间的互补关系[13]。

本文将熵的概念引入到集值信息系统中,在集值信息系统中引入了拟序关系,给出了拟序关系下覆盖集的性质;建立了粗糙熵的概念,研究了粗糙熵的极值性,证明了粗糙熵随着信息粒的减小而单调减小。

2 集值信息系统

定义 1 称(U,A,F)为集值信息系统,其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限对象集合,称为论域;$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$是非空有限属性集合;$F=\{f_a:\forall a\in A\}$ 是 U 到 A 上的函数集合,其中,$f_a:U\to P_0(V_a)(\forall a\in A)$称为信息函数,$V_a$ 是属性 a 的值域,$P_0(V_a)$是 V_a 上非空子集的全体。

定义 2 设(U,A,F)为集值信息系统。对任意的 $B\subseteq A$,定义 U 上的二元关系

$$R_B^{\subseteq}=\{(x,y):f_a(x)\subseteq f_a(y)(\forall a\in A)\}$$

称 $R_B^{\subseteq}$ 为集值信息系统(U,A,F)上的拟序关系。

显然,$R_B^{\subseteq}$ 是自反、传递的,但不是对称的,故不再是等价关系。

记 $R_B^{\subseteq}(x)=\{y\in U:(x,y)\in R_B^{\subseteq}\}$,称 $R_B^{\subseteq}(x)$为包含 x 的信息粒,则全体信息粒 $U/R_B^{\subseteq}=\{R_B^{\subseteq}(x):x\in U\}$构成 U 的一个覆盖。即对于每一个 $x\in U$,都有 $R_B^{\subseteq}(x)\neq\emptyset$,且 $\bigcup_{x\in U}R_B^{\subseteq}(x)=U$。

性质 1 设(U,A,F)为集值信息系统,则对任意的 $B\subseteq A$, $x,y\in U$,

(1) 若 $B\subseteq A$,则 $R_A^{\subseteq}\subseteq R_B^{\subseteq}$ 且 $R_B^{\subseteq}=\bigcap_{a\in B}R_a^{\subseteq}$;

(2) 若 $B\subseteq A$,则 $R_A^{\subseteq}(x)\subseteq R_B^{\subseteq}(x)$且 $R_B^{\subseteq}(x)=\bigcap_{a\in B}R_a^{\subseteq}(x)$;

(3) 若 $y\in R_B^{\subseteq}(x)$,则 $R_B^{\subseteq}(y)\subseteq R_B^{\subseteq}(x)$且 $R_B^{\subseteq}(x)=\bigcup\{R_B^{\subseteq}(y):y\in R_B^{\subseteq}(x)\}$;

(4) $R_B^{\subseteq}(y)=R_B^{\subseteq}(x)\Leftrightarrow\forall a\in B,f_a(x)=f_a(y)$。

记$\mathbb{C}=\{U/R_B^{\subseteq}:B\subseteq A\}$是基于拟序关系 $R_B^{\subseteq}$ 构成的 U 上覆盖的全体。在$\mathbb{C}$上定义一个二元关系$\preceq$:

$U/R_B^{\subseteq}\preceq U/R_C^{\subseteq}\Leftrightarrow\forall x_i\in U$,都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)$,其中

到稿日期:2009-12-04 返修日期:2010-02-26 本文受国家自然科学基金(10901025,60703117)资助。

马建敏(1978—),女,博士,讲师,主要研究方向为粗糙集、概念格与粒计算,E-mail:cjm-zm@126.com;**张文修**(1940—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、模糊集理论、信息科学的数学基础等。

$R_B^{\subseteq}(x_i)\in U/R_B^{\subseteq}$，$R_C^{\subseteq}(x_i)\in U/R_C^{\subseteq}$，简记为 $B\preceq C$。

进一步，$U/R_B^{\subseteq}=_{\prec}U/R_C^{\subseteq}\Leftrightarrow\forall x_i\in U$，有 $R_B^{\subseteq}(x_i)=R_C^{\subseteq}(x_i)$，简记为 $B=_{\prec}C$。$U/R_B^{\subseteq}\prec U/R_C^{\subseteq}\Leftrightarrow\forall x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subset R_C^{\subseteq}(x_i)$，简记为 $B\prec C$。

定理 1 （$\mathbb{C}$，$\preceq$）是一个偏序集。

证明：设 $B,C,D\subseteq A$。对任意的 $x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)=R_B^{\subseteq}(x_i)$。于是 $B\preceq B$。假设 $B\preceq C$ 且 $C\preceq B$，则对任意的 $x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)$ 且 $R_C^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_B^{\subseteq}(x_i)$。于是对任意的 $x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_B^{\subseteq}(x_i)$，即 $R_B^{\subseteq}(x_i)=R_C^{\subseteq}(x_i)$。从而 $B=_{\prec}C$。若 $B\preceq C$ 且 $C\preceq D$。则对任意的 $x_i\in U$，都有$R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)$且 $R_C^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_D^{\subseteq}(x_i)$。故对任意的 $x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_D^{\subseteq}(x_i)$，即 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_D^{\subseteq}(x_i)$。所以 $B\preceq D$。综上即得（$\mathbb{C}$，$\preceq$）是一个偏序集。

显然，$\{R_B^{\subseteq}(x_i)=\{x_i\}:x_i\in U\}$是（$\mathbb{C}$，$\preceq$）中最小的覆盖，$\{R_B^{\subseteq}(x_i)=U:x_i\in U\}$是（$\mathbb{C}$，$\preceq$）中最大的覆盖。

定理 2 设(U,A,F)为集值信息系统，则

$$B\subseteq A\Rightarrow A\preceq B$$

证明：设 $B\subseteq A$，则由性质 1 知 $R_A^{\subseteq}\subseteq R_B^{\subseteq}$。故对任意的 $x_i\in U$，都有$R_A^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_B^{\subseteq}(x_i)$，从而有 $U/R_A^{\subseteq}\preceq U/R_B^{\subseteq}$，即 $A\preceq B$。

例 1 表 1 给出了一个集值信息系统(U,A,F)，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。

表 1 集值信息系统(U,A,F)

U	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	{1}	{1,2}	{1}	{1,2}
x_2	{1,2,3}	{1,2}	{1,2}	{1,2}
x_3	{1}	{1}	{1,2}	{1}
x_4	{1,2}	{1}	{1,2,3}	{1}
x_5	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2}	{1,2,3}
x_6	{1,2,3}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2}

由表 1 知，对任意的属性 $a\in A$，属性值域 $V_a=\{1,2,3\}$，且对任意的 $x\in U$，$f_a(x)\in P_0(V_a)$。由定义 2，$R_B^{\subseteq}=\{(x,y):f_a(x)\subseteq f_a(y)(\forall a\in A)\}$，故由属性集 A 对 U 的分类所得的信息粒为

$R_A^{\subseteq}(x_1)=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$

$R_A^{\subseteq}(x_2)=\{x_2,x_5,x_6\}$

$R_A^{\subseteq}(x_3)=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$R_A^{\subseteq}(x_4)=\{x_4,x_6\}$

$R_A^{\subseteq}(x_5)=\{x_5\}$

$R_A^{\subseteq}(x_6)=\{x_6\}$

若记 $B=\{a_1,a_2,a_4\}$，则可得属性子集 B 对 U 的分类所得的信息粒为

$R_B^{\subseteq}(x_1)=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$

$R_B^{\subseteq}(x_2)=\{x_2,x_5,x_6\}$

$R_B^{\subseteq}(x_3)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$R_B^{\subseteq}(x_4)=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$

$R_B^{\subseteq}(x_5)=\{x_5\}$

$R_B^{\subseteq}(x_6)=\{x_2,x_5,x_6\}$

从而对任意的 $x_i\in U$，$R_A^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_B^{\subseteq}(x_i)$。即 A 对 U 的分类细于 B 对 U 的分类。于是 $A\preceq B$。

3 集值信息系统上的粗糙熵

定义 3 设(U,A,F)为集值信息系统，$U/R_A^{\subseteq}=\{R_A^{\subseteq}(x_i):x_i\in U\}$。则 A 的粗糙熵定义为

$$E_r(A)=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_A^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2\frac{1}{|R_A^{\subseteq}(x_i)|}$$

式中，$|X|$表示集合 X 的基数。

例 2 例 1 中给出了集值信息系统(U,A,F)。则由属性集 A 对 U 的分类所得的信息粒及定义 3 可求 A 的粗糙熵

$$E_r(A)=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_A^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2\frac{1}{|R_A^{\subseteq}(x_i)|}$$

$$=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_A^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_A^{\subseteq}(x_i)|$$

$$=\frac{4}{6}\log_2 4+\frac{3}{6}\log_2 3+\frac{5}{6}\log_2 5+\frac{2}{6}\log_2 2+\frac{1}{6}\log_2 1+\frac{1}{6}\log_2 1$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{5}{6}\log_2 5+\frac{1}{3}=4.394$$

定理 3（极小性） 设(U,A,F)为集值信息系统，$B\subseteq A$。则

$$\forall x_i\in U,R_B^{\subseteq}(x_i)=\{x_i\}\Leftrightarrow E_r(B)=0$$

证明：因为对任意的 $x_i\in U$，信息粒 $R_B^{\subseteq}(x_i)$都包含 x_i，故 $R_B^{\subseteq}(x_i)=\{x_i\}\Leftrightarrow|R_B^{\subseteq}(x_i)|=1$。由定义 3 即得 $E_r(B)=0$。反之，设 $E_r(B)=0$。则

$$E_r(B)=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|=0$$

因为对任意的 $x_i\in U$，都有 $x_i\in R_B^{\subseteq}(x_i)$，于是$|R_B^{\subseteq}(x_i)|\geqslant 1$且$\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}>0$，故对任意的 $x_i\in U$，$\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|=0$，所以对任意的 $x_i\in U$，$|R_B^{\subseteq}(x_i)|=1$，即$\forall x_i\in U$，$R_B^{\subseteq}(x_i)=\{x_i\}$。

定理 4（极大性） 设(U,A,F)为集值信息系统，$B\subseteq A$。则

$$\forall x_i\in U,R_B^{\subseteq}(x_i)=U\Leftrightarrow E_r(B)=|U|\log_2|U|$$

证明：设对任意的 $x_i\in U$，$R_B^{\subseteq}(x_i)=U$ 成立。则$|R_B^{\subseteq}(x_i)|=|U|$。由定义 3 得 $E_r(B)=|U|\log_2|U|$。反之，若 $E_r(B)=|U|\log_2|U|$，则

$$\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|=|U|\log_2|U|=\sum_{i=1}^{|U|}\log_2|U|$$

因为对任意的 $x_i\in U$，都有 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq U$，所以对任意的 $x_i\in U$，有

$$|R_B^{\subseteq}(x_i)|\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|=|U|\log_2|U|$$

若存在 $x_0\in U$ 使得 $R_B^{\subseteq}(x_i)\subset U$，则 $1\leqslant|R_B^{\subseteq}(x_0)|<|U|$ 且 $\log_2|R_B^{\subseteq}(x_0)|<\log_2|U|$。于是$|R_B^{\subseteq}(x_0)|\log_2|R_B^{\subseteq}(x_0)|<|U|\log_2|U|$矛盾。从而对任意的 $x_i\in U$，$R_B^{\subseteq}(x_i)=U$。

定理 3 说明，当取到最小覆盖时，粗糙熵达到最小值 0。定理 4 则表明，当取到最大覆盖时，粗糙熵达到最大值$|U|\log_2|U|$。故定理 3 及定理 4 给出了粗糙熵的极值性。

$$0\leqslant E_r(B)\leqslant|U|\log_2|U|$$

定理 5 设(U,A,F)为集值信息系统。则对任意的 $B,C\subseteq A$，若$B\preceq C$，则 $E_r(B)\leqslant E_r(C)$。

证明：由 $B\preceq C$ 知对任意的 $x_i\in U$，$R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)$。故$|R_B^{\subseteq}(x_i)|\leqslant|R_C^{\subseteq}(x_i)|$且 $\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|\leqslant\log_2|R_C^{\subseteq}(x_i)|$，于是$|R_B^{\subseteq}(x_i)|\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|\leqslant|R_C^{\subseteq}(x_i)|\log_2|R_C^{\subseteq}(x_i)|$。由定义 3 即得 $E_r(B)\leqslant E_r(C)$。

定理 5 说明若集值信息系统中知识的分类能力增强，则

（下转第 242 页）

参 考 文 献

[1] 严超,苏光大. 人脸特征的定位与提取[J]. 中国图象图形学报,1998,3(5):375-379

[2] 张宏林,蔡锐. Visual C++数字图像模式识别技术及工程实践[M]. 北京:人民邮电出版社,2003

[3] 彭辉,张长水. 基于 K-L 变换的人脸自动识别方法[J]. 清华大学学报:自然科学版,1997,37(3):67-700

[4] 杨键,杨静宇,叶晖. Fisher 线性鉴别分析的理论研究及其应用[J]. 自动化学报,2003,29(4):482-493

[5] 孙伯成,张文超. 基于部件的级联线性判别分析人脸识别[J]. 计算机工程与应用,2006,42(16):67-69

[6] 石跃祥,蔡自兴,王学武. 基于改进的 PCA 算法和 Fisher 线性判别的人脸识别技术[J]. 小型微型计算机系统,2006,27(9):1731-1736

[7] 郑宇杰,於东军,杨静宇. 一种基于 ICA 和 LDA 组合的人脸识别新方法[J]. 计算机科学,2006,33(4):194-197

[8] Zhang Xiaoxun, Jia Yunde. A linear discriminant analysis framework based on random subspace for face recognition[J]. Pattem Recognition, 2007, 40(9):2585-2591

[9] Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eiegnfaces vs. fisherfaces: Recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7):711-720

[10] Hong Z Q, Yang J Y, et al. Optimal discriminant plane for a small number of samoles and design method of classifier on the plane[J]. Pattern Recognition, 1991, 24(4):317-324

[11] Yu H, Yang J. A direct LDS algorithm for high dimensional data with application to face recognition[J]. Pattern Recognition, 2001, 34:2067-2070

[12] Etemad K, Chellappa R. Discriminant analysis for recognition of human face images[J]. Journal of the Optical Society of America A: Optics Image Science and Vision, 1997, 14(8):1724-173

[13] Belhumeur P, Hespanha J, Kriegman D. Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Trans Patt Anal Mach Intel, 1997, 19(7):711-720

[14] Chen Li-fen, Mark Liao Hong-yuan, Ko Ming-kat, et al. A new LDA-based face recognition system which can solve the small samples size problem[J]. Journal of Pattern Recognition, 2000, 33(10):1713-1726

[15] 韩争胜,李映,张艳宁. 基于 LDA 算法的人脸识别方法的比较研究[J]. 微电子学与计算机,2005,22(7):131-138

[16] 边肇祺,张学工. 模式识别[M]. 北京:清华大学出版社,2000

[17] 郭跃飞,黄修武,杨静宇. 一种求解 Fisher 最佳鉴别矢量的新算法及人脸识别[J]. 中国图象图形学报,1999,4(2):95-98

[18] AT&T Laboratories Cambridge. The ORL Database of Faces [OL]. http://www.cam-orl.co.uk/facedatabase.html

[19] 李刚,高政. 人脸识别理论研究进展[J]. 计算机与现代化,2003,(5):1-6

(上接第 233 页)

信息粒减小,使得粗糙熵随之单调减少。

推论 1 设(U,A,F)为集值信息系统,$B,C\subseteq A$。若 $B=_{<}C$,则 $E_r(B)=E_r(C)$。

但定理 5 和推论 1 的逆命题不一定成立。

由定理 2 及定理 5 易得:

推论 2 设(U,A,F)为集值信息系统。则对任意的 $B\subseteq A$,有 $E_r(A)\leqslant E_r(B)$。

定理 6 设(U,A,F)为集值信息系统。则对任意的 $B,C\subseteq A$,若 $E_r(B)=E_r(C)$且 $B\leq C$,则 $B=_{<}C$。

证明:由 $B\leq C$ 知对任意的 $x_i\in U$,$R_B^{\subseteq}(x_i)\subseteq R_C^{\subseteq}(x_i)$。假设 $B=_{<}C$ 不成立,则 $R_B^{\subseteq}\neq R_C^{\subseteq}$。于是存在 $x_0\in U$ 使得 $R_B^{\subseteq}(x_0)\subset R_C^{\subseteq}(x_0)$,所以

$$
\begin{aligned}
E_r(B) &= -\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2\frac{1}{|R_B^{\subseteq}(x_i)|} \\
&= \sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)| \\
&= \sum_{x_i\neq x_{i_0}}\frac{|R_B^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_B^{\subseteq}(x_i)|+\frac{|R_B^{\subseteq}(x_{i_0})|}{|U|}\log_2 |R_B^{\subseteq}(x_{i_0})| \\
&\leqslant \sum_{x_i\neq x_{i_0}}\frac{|R_C^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_C^{\subseteq}(x_i)|+\frac{|R_B^{\subseteq}(x_{i_0})|}{|U|}\log_2 |R_B^{\subseteq}(x_{i_0})| \\
&< \sum_{x_i\neq x_{i_0}}\frac{|R_C^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_C^{\subseteq}(x_i)|+\frac{|R_C^{\subseteq}(x_{i_0})|}{|U|}\log_2 |R_C^{\subseteq}(x_{i_0})| = \sum_{i=1}^{|U|}\frac{|R_C^{\subseteq}(x_i)|}{|U|}\log_2|R_C^{\subseteq}(x_i)| = E_r(C)
\end{aligned}
$$

这与 $E_r(B)=E_r(C)$矛盾,所以 $B=_{<}C$。

由定理 6 的证明及定理 5 可得:

推论 3 设(U,A,F)为集值信息系统,$B,C\subseteq A$,若 $B<C$,则有 $E_r(B)<E_r(C)$。

结束语 熵理论是信息系统中不确定性研究的有效工具之一。本文在集值信息系统中定义拟序关系,在此基础上给出了覆盖集的性质,引入了粗糙熵的概念,研究了粗糙熵的极值性,证明了粗糙熵随着信息粒的减小而单调减小。

参 考 文 献

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11:341-356

[2] Pawlak Z, Grzymala-Busse J W, Slowinski R, et al. Rough sets [J]. Communication of the ACM, 1995, 38(11):89-95

[3] Pawlak Z. Rough set theory and its application to data analysis [J]. Cybernetics and Systems, 1998, 9:661-668

[4] 张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001

[5] 张文修,梁怡,吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京:科学出版社,2003

[6] Shannon C E. The mathematical theory of communication [J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(3/4):373-423

[7] 苗夺谦,王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]. 软件学报,1999,10(2):113-116

[8] 苗夺谦,王珏. 粗糙集理论中知识熵与信息熵关系得讨论[J]. 模式识别与人工智能,1998,11(3):34-40

[9] Wang G Y. Algebra view and information view of rough sets theory[C]// Conference on Data Mining and knowledge Discovery: Theory, Tools, and Technology. Orlando, 2001, 4384:200-207

[10] 王国胤,于洪,杨大春. 基于条件信息熵的决策表约简[J]. 计算机学报,2002,25(7):759-766

[11] Liang J Y, Shi Z Z. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2004, 12(1):37-46

[12] 梁吉业,李德玉. 信息系统中的不确定性与知识获取[M]. 北京:科学出版社,2004

[13] 梁吉业,钱宇华. 信息系统中的信息粒与熵理论[J]. 中国科学 E 辑:信息科学,2008,38(12):2048-2065