

粗糙集构成的拓扑空间

乔全喜^{1,2} 秦克云¹ 洪智勇^{1,3}

(西南交通大学数学系 成都 610031)¹ (河南理工大学数学与信息科学学院 焦作 454000)²
(五邑大学计算机学院 江门 529020)³

摘 要 在 Pawlak 近似空间意义下研究粗糙集构成的拓扑空间。讨论了当论域不受限于有限集时粗糙集可以构成一个拓扑空间,并从拓扑空间的分离性上证明了其粗糙拓扑空间是一个正规的拓扑空间。

关键词 粗糙集,拓扑,拓扑空间,正规空间

Topological Space Based on Rough Sets

QIAO Quan-xi^{1,2} QIN Ke-yun¹ HONG Zhi-yong^{1,3}

(Department of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)¹
(School of Mathematics & Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)²
(School of Computer Science, Wuyi University, Jiangmen 529020, China)³

Abstract This paper is devoted to the discussion of topological structure of rough sets in Pawlak approximation space. Topological space based on rough sets on the universe which is not restricted to be finite was investigated and it was proved that the rough topological space is a normal space on separability of topological space.

Keywords Rough set, Topology, Topological space, Normal space

1982 年由波兰数学家 Pawlak^[1]提出的粗糙集理论是继 Zadeh 的模糊集理论之后的处理不确定性概念的又一新的数学工具^[1,2]。粗糙集概念刚提出来就得到了包括 Zadeh 在内的许多学者的肯定和高度重视。Zadeh 还把它列入他新提倡的软计算的基础理论之中。经过二十多年的发展,粗糙集理论在数据分析和知识发现等领域已经有许多的应用。在理论研究方面,人们研究了它的代数结构、格序结构、拓扑结构。我们认为 Pawlak 正是受了点集拓扑理论的启发而引入粗糙集这一概念的。我们知道确定性概念和不确定性概念的本质区别是二者有无边界。论域中的元素对于确定性的概念是黑白分明、非此即彼的,不存在边界;而不确定性概念它有一个灰色地带我们称之为边界,该区域内的元素对于讨论的概念来说既属于又不属于。点集拓扑理论告诉我们,一个拓扑空间 (U, T) 中的任何一个集合 X 都对应对着它的内部 $i(X)$ 和闭包 $c(X)$, 内部与闭包之间的区域称为 X 的边界。据此, Pawlak 由论域 U 上的等价关系定义了一个近似空间 $A = (U, R)$ 。我们将 U/R 中元素的有限并称作 A 中的合成集,所有合成集所组成的集族记为 $Com(A)$ 。假设空集也在 $Com(A)$ 中,那么显然 $Com(A)$ 是一个布尔代数。即 $Com(A)$ 中元素对于交、并、补是封闭的。对于 U 中的任一子集 X , 存在 $Com(A)$ 中包含 X 的最小元,称之为 X 的上近似集 $\bar{R}(X)$, 还存在一个含于 X 内的最大元,称之为 X 的下近似集 $\underline{R}(X)$ 。通常我们将 $(\underline{R}(X), \bar{R}(X))$ 叫做 A 的一个粗糙集。显然, $Com(A)$ 是 U 上的一个拓扑。亦即 U 上所有的下近似集所组成的集合是 U 上

的一个拓扑,当然, U 上所有的上近似集所组成的集合也是 U 上的一个拓扑。

粗糙集的拓扑结构是粗糙集理论研究的核心问题之一^[3-5]。Yao^[4]研究了自反、传递关系下的粗糙集模型,证明了其上的上、下近似算子恰为一个拓扑空间的闭包与内部算子。需要指出的是,文献[4]本质上刻画的是近似空间下精确集的拓扑结构。对于模糊粗糙集构成的模糊拓扑空间也有大量文献论及^[6-11]。文献[12]研究了当论域为非空有限集合时 Pawlak 近似空间意义下粗糙集构成的拓扑空间。本文证明了当论域不限制是有限集合时所有粗糙集所构成的集合是论域上的一个拓扑空间,并证明了此拓扑空间是一个正规的拓扑空间。

1 粗糙集构成的拓扑空间

设 U 是一个非空集合, R 为 U 上的一个等价关系, $P(U)$ 是 U 的幂集。称二元组 (U, R) 为一个 Pawlak 近似空间。对于任意 $X \subseteq U$, X 关于近似空间 (U, R) 的下近似 $\underline{R}(X)$ 与上近似 $\bar{R}(X)$ 分别定义为^[1]:

$$\begin{aligned}\underline{R}(X) &= \{x \in U \mid [x]_R \subseteq X\} = \bigcup \{Y \in U/R \mid Y \subseteq X\} \\ \bar{R}(X) &= \{x \in U \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\} = \bigcup \{Y \in U/R \mid Y \cap X \neq \emptyset\}\end{aligned}\quad (1)$$

式中, $[x]_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$ 是 x 关于 R 的等价类, $U/R = \{[x]_R \mid x \in U\}$ 是所有 R 等价类的集合。

对于 $X \subseteq U$, 称二元组 $(\underline{R}(X), \bar{R}(X))$ 为 R 粗糙集。若 R

到稿日期:2009-12-16 返修日期:2010-02-26 本文受国家自然科学基金项目(批准号:60875034)资助。

乔全喜 博士生,主要研究方向为智能控制及应用, E-mail: qiaoqx@hpu.edu.cn; 秦克云 博士,教授,主要研究方向为代数逻辑与智能信息处理; 洪智勇 博士生,主要研究方向为智能信息处理。

$(X)=\bar{R}(X)$, 则称 $(\underline{R}(X), \bar{R}(X))$ 为 R 精确集; 否则, 称 $(\underline{R}(X), \bar{R}(x))$ 为 R 近似集。令 Z_0 是从每一 R 等价类中选取一个元素构成的集合, 且 $S=\{x \in U; |[x]_R|=1\}$ 。

定理 1^[12] 设 (U, R) 是一个近似空间, $X, Y \subseteq U$ 是 R 可定义集 (即为若干 R 等价类之并)。 (X, Y) 为 R 粗糙集当且仅当 $X \subseteq Y$ 且 $(Y-X) \cap S = \emptyset$ 。

对于任意 $X \in P(U)$, 定义 $P(U)$ 到 $P(U)$ 的算子:

$$X_A = \underline{R}(X) \cup ((\bar{R}(X) - \underline{R}(X)) \cap Z_0) = \bar{R}(X) \cap (\underline{R}(X) \cup Z_0) \quad (3)$$

定理 2^[12] 对于任意 $X \in P(U)$, 有 $\underline{R}(X_A) = \underline{R}(X)$, $\bar{R}(X_A) = \bar{R}(X)$ 。

令 $M = \{X_A; X \in P(U)\}$, 那么, M 是论域 U 上所有粗糙集的集合, 若 X 是 R 可定义集合, 一定有 $X_A = X$, 因此, $P(U) \subseteq M$ 。

定理 3 设 (U, R) 是近似空间, 则 M 是 U 上的一个拓扑空间。

证明: (1) 显然 $\emptyset, U \in P(U) \subseteq M$;

(2) 由 $\underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y) \subseteq \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y)$ 及 $((\bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y)) - (\underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y))) \cap S \subseteq ((\bar{R}(X) - \underline{R}(X)) \cup (\bar{R}(Y) - \underline{R}(Y))) \cap S = \emptyset$, 故存在 $Z \in P(U)$ 使得 $\underline{R}(Z) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$, $\bar{R}(Z) = \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y)$, 于是

$$\begin{aligned} Z_A &= \bar{R}(Z) \cap (\underline{R}(Z) \cup Z_0) = \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y) \cap ((\underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)) \cup Z_0) \\ &= \bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y) \cap (\underline{R}(X) \cup Z_0) \cap (\underline{R}(Y) \cup Z_0) = X_A \cap Y_A \end{aligned}$$

从而 $X_A \cap Y_A \in M$ 。

(3) 对于任意 $X_A \in M (i \in I, I \text{ 是指标集})$, 由 $\bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i) \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i)$ 及 $(\bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i) - \bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i)) \cap S \subseteq \bigcup_{i \in I} ((\bar{R}(X^i) - \underline{R}(X^i)) \cap S) = \emptyset$

故存在 $Z \in P(U)$ 使得 $\underline{R}(Z) = \bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i)$, $\bar{R}(Z) = \bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i)$, 于是

$$Z_A = \bar{R}(Z) \cap (\underline{R}(Z) \cup Z_0) = (\bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i)) \cap (\bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i) \cup Z_0)$$

因为 $(\bigcup_{i \in I} X_A^i) = \bigcup_{i \in I} (\bar{R}(X^i) \cap (\underline{R}(X^i) \cup Z_0)) \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i)$

$$(\bigcup_{i \in I} X_A^i) = \bigcup_{i \in I} (\bar{R}(X^i) \cap (\underline{R}(X^i) \cup Z_0)) \subseteq \bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i) \cup Z_0$$

所以 $\bigcup_{i \in I} X_A^i \subseteq (\bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i)) \cap (\bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i) \cup Z_0) = \bar{R}(Z) \cap (\underline{R}(Z) \cup Z_0) = Z_A$

又因为 $\bigcup_{i \in I} X_A^i \supseteq \bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i)$

$$X_A = (\bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i)) \cup (\bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i) \cap Z_0) \supseteq \bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i) \cap Z_0$$

所以 $\bigcup_{i \in I} X_A^i \supseteq (\bigcup_{i \in I} \underline{R}(X^i)) \cup (\bigcup_{i \in I} \bar{R}(X^i) \cap Z_0) = Z_A$, 故 $\bigcup_{i \in I} X_A^i \in M$ 。

由 (1), (2), (3) 知 M 是 U 上的一个拓扑空间。

2 拓扑空间的分离性

定义 1^[13] 设 X 是一个拓扑空间。如果 X 中的任何两个互不相交的闭集各有一个开邻域并且这两个邻域互不相交, 则称拓扑空间 X 是一个正规空间。

定理 4^[12] 拓扑 M 中的任意开集都具有形式 $\underline{R}(X) \cup (X \cap Z_0)$, 任意闭集都具有形式 $X \cup (\bar{R}(X) - Z_0)$ 。

定理 5 设 (U, M) 是由等价关系 R 导出的粗糙拓扑空间, 则 U 是一个正规空间。

证明: 假设 $A = X \cup (\bar{R}(X) - Z_0)$, $B = Y \cup (\bar{R}(Y) - Z_0)$ 。其

中 A, B 是 U 中任意两个互不相交的闭集, 即 $(X \cup (\bar{R}(X) - Z_0)) \cap (Y \cup (\bar{R}(Y) - Z_0)) = \emptyset$, 那么存在 A 的开邻域 $\bar{R}(X)$ 和 B 的开邻域 $\bar{R}(Y)$ 。不妨假设 $\bar{R}(X) \cap \bar{R}(Y) \neq \emptyset$, 因为 $X \cap Y = \emptyset$, 所以存在 $z' \in U$, 有 $z' \in (\bar{R}(X) - X) \cap (\bar{R}(Y) - Y)$ 。如果 $z' \notin Z_0$, 那么一定有 $z' \in (\bar{R}(X) - Z_0) \cap (\bar{R}(Y) - Z_0)$, 如果 $z' \in Z_0$, 那么有 $[z']_R \subseteq (\bar{R}(X) - \underline{R}(X)) \cap (\bar{R}(Y) - \underline{R}(Y))$, 由定理 1 知, 存在 $t_0 \in [z']_R$ 并且 $t_0 \neq z'$, 使得, $t_0 \in (\bar{R}(X) - \underline{R}(X)) \cap (\bar{R}(Y) - \underline{R}(Y))$, 因此, $t_0 \in (\bar{R}(X) - Z_0) \cap (\bar{R}(Y) - Z_0)$ 。这与 $(\bar{R}(X) - Z_0) \cap (\bar{R}(Y) - Z_0) = \emptyset$ 矛盾, 所以, U 是一个正规空间。

下面的例子可以说明, U 不是 T_0 空间、 T_1 空间、 T_2 空间、 T_3 空间、 T_4 空间、正则空间。设 $U = \{a, b, c\}$, $U/R = \{\{a\}, \{b, c\}\}$, $Z_0 = \{a, b\}$, 那么 $\{a\}_A = \{a\}$, $\{b, c\}_A = \{b, c\}$, $\{b\}_A = \{b\}$, $\{c\}_A = \{b\}$, $\{a, b\}_A = \{a, b\}$, $\{a, c\}_A = \{a, b\}$ 。 $T = \{\emptyset, U, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 是 U 上的粗糙集拓扑。对于 a, c 两点, c 的唯一的开邻域为 U , 显然 $a \in U$ 。所以 (U, T) 不是一个 T_0 空间。又对于点 a 和闭集 $\{b, c\}$, 存在 a 的开邻域 $\{a\}$ 和 $\{b, c\}$ 的开邻域 U , 有 $\{a\} \cap U \neq \emptyset$, 所以 (U, T) 不是正则空间, 因此, (U, T) 也不是 T_1 空间、 T_2 空间、 T_3 空间、 T_4 空间。

结束语 本文建立了 Pawlak 近似空间意义下真正的粗糙集 X_A 所构成的拓扑空间并讨论了该拓扑空间的分离性, 推广了已有的相关性工作。对于广义近似空间意义下的粗糙集所构成的拓扑空间还有待进一步研究。

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough Sets[J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982, 11: 341-356
- [2] Pawlak Z. Rough sets; Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991
- [3] Yao Y Y. Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators[J]. Information Sciences, 1998, 111(1-4): 239-259
- [4] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15(4): 291-317
- [5] Kortelainen J. On relationship between modified sets, topological spaces and rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(1): 91-95
- [6] Lashin E F, Kozae A M, Abo K A, et al. Rough set theory for topological spaces [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2005, 40(1/2): 35-43
- [7] Qin K, Pei Z. On the topological properties of fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(3): 601-613
- [8] Kuncheva L I. Fuzzy rough sets; Application to feature selection [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 51(2): 147-153
- [9] Morsi N N, Yakout M M. Axiomatics for fuzzy rough sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 100(1-3): 327-342
- [10] Qin K. Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations[J]. information science, 2008
- [11] 秦克云, 裴峰, 杜卫锋. 粗糙近似算子的拓扑性质[J]. 系统工程学报, 2006(01)
- [12] 秦克云, 乔全喜. 粗糙集的拓扑结构[J]. 计算机科学, 2007(12)
- [13] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003