直觉梯形模糊数MADM问题的灰色关联分析法

张市芳[1] 刘三阳[2] 翟任何[3]
(西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)[1] (西安电子科技大学理学院 西安 710071)[2]
(陕西理工学院机械工程学院 汉中 723003)[3]

摘 要 针对属性权重信息完全已知且属性值以直觉梯形模糊数形式给出的多属性决策问题,提出了一种灰色关联分析方法。首先给出了直觉梯形模糊数的定义、距离和性质,然后依据传统的灰色关联分析法的基本思想建立了直觉梯形模糊数多属性决策问题的决策步骤。最后给出了一个实例分析,其结果表明了该方法的实用性和有效性。

关键词 灰色关联分析,多属性决策,直觉梯形模糊数,Hamming距离
中图法分类号 TP182,O223 **文献标识码** A

Method of Grey Relational Analysis for MADM Problem with Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Numbers

ZHANG Shi-fang[1] LIU San-yang[2] ZHAI Ren-he[3]
(School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)[1]
(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)[2]
(School of Mechanical Engineering, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723003, China)[3]

Abstract With respect to multiple attribute decision making (MADM) problem in which the attribute weights are known completed and the attribute values are intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers, a method of grey relational analysis was proposed. Firstly, the definition and distance and nature of intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers were given. Then, based on the basic idea of traditional grey relational analysis method, decision making steps of MADM problem with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers were proposed. Finally, an example was given to show the practicality and effectiveness of the developed approach.

Keywords Grey relational analysis, Multiple attribute decision making (MADM), Intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers, Hamming distance

1 引言

多属性决策(MADM)就是利用已有的决策信息,通过一定的方式对一组(有限个)备选方案进行排序并择优,其在社会生活、工程设计、军事科学和经济管理等领域都有着广泛的应用。自从Zadeh[1]提出模糊集理论并用于多属性决策以来,模糊MADM问题得到了迅猛的发展。1986年,保加利亚学者Atanassov[2]提出直觉模糊集的概念,它是Zadeh提出的模糊集理论的拓展。由于其在仅考虑单一隶属度的传统模糊集的基础上增加了一个新的参数——非隶属度,因此,它比传统模糊集在处理模糊性和不确定性的MADM问题时更灵活细腻。1989年,Atanassov等对直觉模糊集进行了拓展,将隶属度和非隶属度由实数推广到区间数,提出了区间直觉模糊集[3]的概念。文献[4-6]对基于区间直觉模糊集的MADM问题进行了研究,提出了相应的决策方法。然而,直觉模糊集、区间直觉模糊集和模糊集一样,其讨论的集合均为离散的情形,而在社会经济生活中经常会出现连续的情况,为此,有学者提出了直觉三角模糊集[7]和直觉梯形模糊集[8-10]的概念。它们是从另一个方面对直觉模糊集进行的扩展,即将离散集合扩展到连续集合,也是对模糊集的拓展。文献[8]指出,直觉梯形模糊集是直觉三角模糊集的扩展,直觉三角模糊集是直觉梯形模糊集的特殊形式,因此,有必要对直觉梯形模糊数的相关问题作深入地研究。作者注意到,到目前为止,将直觉梯形模糊数用于MADM问题的研究还很少见,而且该类问题能更加客观地描述众多的决策问题。为此,本文将依据传统灰色关联分析方法的基本思想[11-15],提出一种基于直觉梯形模糊数MADM问题的灰色关联分析法,并运用该方法进行实例分析。

2 直觉梯形模糊数

下面给出直觉梯形模糊数的定义、两个直觉梯形模糊数之间距离的定义及其性质。

定义1[8-10] 设$\tilde{a}$是实数集上的一个模糊数,其隶属度函数为

到稿日期:2009-12-23 返修日期:2010-03-08 本文受国家自然科学基金项目(60974082),陕西省自然科学基础研究计划项目(ST08A10)资助。

张市芳 博士生,主要研究方向为智能决策与多目标优化算法,E-mail:zhangshifang2005@126.com;刘三阳 教授,博士生导师,主要研究方向为最优化理论方法及其应用。

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{a}}, & a\leqslant x<b\\ \mu_{\tilde{a}}, & b\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{a}}, & c<x\leqslant d\\ 0, & \text{others}\end{cases}\tag{1}$$

其非隶属度函数为

$$\nu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{a}}(x-a_1)}{b-a_1}, & a_1\leqslant x<b\\ \nu_{\tilde{a}}, & b\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{a}}(d_1-x)}{d_1-c}, & c<x\leqslant d_1\\ 0, & \text{others}\end{cases}\tag{2}$$

式中，$0\leqslant\mu_{\tilde{a}}\leqslant1$；$0\leqslant\nu_{\tilde{a}}\leqslant1$；$\mu_{\tilde{a}}+\nu_{\tilde{a}}\leqslant1$；$a,b,c,d\in R$，则称 $\tilde{a}=\langle([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}}),([a_1,b,c,d_1];\nu_{\tilde{a}})\rangle$ 为直觉梯形模糊数。

相对于梯形模糊数，直觉梯形模糊数增加了一个非隶属度函数。非隶属度函数表示决策者认为不属于 $[a_1,b,c,d_1]$ 的程度。当 $\mu_{\tilde{a}}=1,\nu_{\tilde{a}}=0$ 时，称 $\tilde{a}$ 为标准的直觉梯形模糊数，即传统的梯形模糊数；当 $b=c$ 时，直觉梯形模糊数就变成了直觉三角模糊数。一般地，在直觉梯形模糊数 $\tilde{a}$ 中有 $[a,b,c,d]=[a_1,b,c,d_1]$，此时，上述的 $\tilde{a}$ 可简记为：$\tilde{a}=([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$。本文中，直觉梯形模糊数均指这类模糊数。另外，$\pi_{\tilde{a}}=1-\mu_{\tilde{a}}-\nu_{\tilde{a}}$ 表示模糊数的犹豫程度，$\pi_{\tilde{a}}$ 越小，表示模糊数越确定。

定义 2[9] 设 $\tilde{a}_1=([a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_{\tilde{a}_1},\nu_{\tilde{a}_1})$ 和 $\tilde{a}_2=([a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_{\tilde{a}_2},\nu_{\tilde{a}_2})$ 为两个直觉梯形模糊数，则 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$ 的 Hamming 距离为

$$\begin{aligned}d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\frac{1}{8}(&|(1+\mu_{\tilde{a}_1}-\nu_{\tilde{a}_1})a_1-(1+\mu_{\tilde{a}_2}-\nu_{\tilde{a}_2})a_2|+\\&|(1+\mu_{\tilde{a}_1}-\nu_{\tilde{a}_1})b_1-(1+\mu_{\tilde{a}_2}-\nu_{\tilde{a}_2})b_2|+\\&|(1+\mu_{\tilde{a}_1}-\nu_{\tilde{a}_1})c_1-(1+\mu_{\tilde{a}_2}-\nu_{\tilde{a}_2})c_2|+\\&|(1+\mu_{\tilde{a}_1}-\nu_{\tilde{a}_1})d_1-(1+\mu_{\tilde{a}_2}-\nu_{\tilde{a}_2})d_2|)\end{aligned}\tag{3}$$

易见 $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)$ 具有以下性质：

性质 1 设 $\tilde{a}_i(i=1,2,3)$ 为任意的 3 个直觉梯形模糊数，则

(i) $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)\geqslant0$，特别地，$d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_1)=0$；

(ii) $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=d(\tilde{a}_2,\tilde{a}_1)$；

(iii) $d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)\leqslant d(\tilde{a}_1,\tilde{a}_3)+d(\tilde{a}_2,\tilde{a}_3)$。

3 基于直觉梯形模糊数多属性决策问题的灰色关联分析法

灰色关联分析法[11-15]是我国著名学者邓聚龙教授于 1982 年创立的灰色系统理论中的一种重要方法，它是分析不同数据项之间相互影响、相互依赖的关系。其本质是指在系统发展过程中，将子系统（因素）之间发展趋势的相似或相异程度，作为衡量子系统（因素）间关联程度的一种方法。若两个子系统（因素）变化的趋势具有一致性，即同步变化程度较高，则可以认为两者关联程度较大；反之，两者关联程度较小。

对于某模糊多属性决策问题，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为方案集，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为属性集，$w=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}^T$ 为属性的权重向量，且 $w_j\geqslant0,\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$。方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值为直觉梯形模糊数 $\tilde{a}_{ij}=([h_{1j}(x_i),h_{2j}(x_i),h_{3j}(x_i),h_{4j}(x_i)];\mu_j(x_i),\nu_j(x_i))$。其中，$\mu_j(x_i)$ 和 $\nu_j(x_i)$ 分别表示方案 x_i 在属性 u_j 下的满意程度和不满意程度，$0\leqslant\mu_j(x_i)\leqslant1,0\leqslant\nu_j(x_i)\leqslant1,\mu_j(x_i)+\nu_j(x_i)\leqslant1$。本文给出的直觉梯形模糊数多属性决策问题的灰色关联分析法的原理和步骤如下：

Step1 建立直觉梯形模糊数属性决策矩阵 $A=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$。

Step2 将决策矩阵 A 规范化。对于多属性决策问题，常见的属性类型一般有效益型和成本型两种，其中效益型属性是指属性值越大越好的属性，成本型属性是指属性值越小越好的属性。为了消除不同物理量纲对决策结果的影响，可按如下规范化公式进行处理，将决策矩阵 A 转化为规范化决策矩阵 $R=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$，其中

$$\tilde{r}_{ij}=([r_{1j}(x_i),r_{2j}(x_i),r_{3j}(x_i),r_{4j}(x_i)];\mu_j(x_i),\nu_j(x_i))$$

对于效益型属性

$$r_{lj}(x_i)=\frac{h_{lj}(x_i)-\min\limits_{j}(h_{1j}(x_i))}{\max\limits_{j}(h_{4j}(x_i))-\min\limits_{j}(h_{1j}(x_i))}$$

$$i=1,\cdots,m,j=1\cdots,n,l=1,\cdots,4\tag{4}$$

对于成本型属性

$$r_{lj}(x_i)=\frac{\max\limits_{j}(h_{4j}(x_i))-h_{lj}(x_i)}{\max\limits_{j}(h_{4j}(x_i))-\min\limits_{j}(h_{1j}(x_i))}$$

$$i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n,l=1,\cdots,4\tag{5}$$

Step3 确定参考数列。确定参考数列的原则是：参考数列中的元素应由各备选方案的直觉梯形模糊数规范化属性值的最优解组成，其中最优解在属性 u_j 下相对于最大模糊数的隶属度为 1，非隶属度为 0，即

$$\begin{aligned}\tilde{U}_j^0=([&\max(r_{1j}(x_i)),\max(r_{2j}(x_i)),\max(r_{3j}(x_i)),\\&\max(r_{4j}(x_i))];1,0),i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\end{aligned}$$

则参考数列为 $\tilde{U}^0=(\tilde{U}_1^0,\tilde{U}_2^0,\cdots,\tilde{U}_n^0)$。

Step4 计算参考数列与属性值数列对应元素之差的绝对值（即计算参考数列与属性值数列对应元素之间的 Hamming 距离）Δ_{ij}，即

$$\Delta_{ij}=d(\tilde{U}_j^0,\tilde{r}_{ij}),i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\tag{6}$$

Step5 求最大差 $\Delta_{\max}$ 和最小差 $\Delta_{\min}$。其中 $\Delta_{\max}=\max\limits_{i,j}\Delta_{ij}$，$\Delta_{\min}=\min\limits_{i,j}\Delta_{ij}$。

Step6 计算各备选方案属性值数列与参考数列之间的关联系数矩阵 $(\xi_{ij})_{m\times n}$。其中关联系数公式为

$$\xi_{ij}=\frac{\Delta_{\min}+\rho\Delta_{\max}}{\Delta_{ij}+\rho\Delta_{\max}},i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n\tag{7}$$

ρ 称为分辨系数，ρ 越小，分辨能力越大。一般地取 $\rho=0.5$。

Step7 计算各备选方案属性值数列与参考数列之间的关联度 r_i。其中

$$r_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}\cdot w_j,i=1,\cdots,m\tag{8}$$

Step8 依据关联度 $r_i(i=1,\cdots,m)$ 值的大小对各备选方案进行排序并择优，关联度值越大，对应的方案越优。

4 实例分析

利用文献[9]实例分析中的数据来说明本文给出的决策方法。

某发动机零部件制造公司选择供应商，有 5 个供应商 $x_1,\cdots,x_5$ 可供选择。选取的评价指标为：供应能力、交货能力、服务质量、影响力和科研实力，分别记为 $u_1,\cdots,u_5$。这些属性均为效益型属性。决策者根据自己的知识和经验以及统

计数据等确定每个供应商的决策信息，如表 1 所列。

假设决策者给出的属性权重信息是完全已知的，则文献[9]实例分析中求解所得的最优权系数，即：$w=(0.14,0.30,0.14,0.12,0.30)^T$。现选择最优供应商。首先对表 1 进行规范化处理，其结果如表 2 所列。

表 1　直觉梯形模糊数决策矩阵 A

供应商	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	([1,2,3,4];0.7,0.3)	([5,6,7,8];0.7,0.3)	([3,4,5,6];0.6,0.2)	([4,5,7,8];0.6,0.3)	([4,5,6,7];0.8,0.0)
x_2	([2,3,4,5];0.6,0.3)	([6,7,8,9];0.8,0.1)	([4,5,6,7];0.8,0.2)	([3,4,5,6];0.7,0.3)	([6,7,8,9];0.6,0.3)
x_3	([1,2,3,5];0.6,0.4)	([4,6,7,8];0.6,0.3)	([3,4,5,6];0.5,0.5)	([4,5,6,7];0.8,0.1)	([5,6,7,8];0.8,0.2)
x_4	([2,3,4,6];0.6,0.2)	([5,6,7,8];0.8,0.2)	([2,3,5,6];0.6,0.4)	([3,4,5,7];0.6,0.3)	([4,6,7,8];0.6,0.3)
x_5	([2,3,4,5];0.8,0.2)	([4,5,6,7];0.9,0.0)	([3,4,5,6];0.8,0.2)	([3,5,7,8];0.7,0.1)	([4,5,6,7];0.8,0.0)

表 2　规范化处理后的直觉梯形模糊数决策矩阵 R

供应商	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	([1,2,3,4];0.7,0.3)	([5,6,7,8];0.7,0.3)	([3,4,5,6];0.6,0.2)	([4,5,7,8];0.6,0.3)	([4,5,6,7];0.8,0.0)
x_2	([2,3,4,5];0.6,0.3)	([6,7,8,9];0.8,0.1)	([4,5,6,7];0.8,0.2)	([3,4,5,6];0.7,0.3)	([6,7,8,9];0.6,0.3)
x_3	([1,2,3,5];0.6,0.4)	([4,6,7,8];0.6,0.3)	([3,4,5,6];0.5,0.5)	([4,5,6,7];0.8,0.1)	([5,6,7,8];0.8,0.2)
x_4	([2,3,4,6];0.6,0.2)	([5,6,7,8];0.8,0.2)	([2,3,5,6];0.6,0.4)	([3,4,5,7];0.6,0.3)	([4,6,7,8];0.6,0.3)
x_5	([2,3,4,5];0.8,0.2)	([4,5,6,7];0.9,0.0)	([3,4,5,6];0.8,0.2)	([3,5,7,8];0.7,0.1)	([4,5,6,7];0.8,0.0)

确定参考数列 $\tilde{U}^0$：

$\tilde{U}^0=(([2,3,4,6];1,0)([6,7,8,9];1,0)([4,5,6,7];1,0)([4,5,7,8];1,0)([6,7,8,9];1,0))$

计算参考数列与属性值数列对应元素之差的绝对值 Δ_{ij} 以及其最大差 Δ_{max} 和最小差 Δ_{min}，所求结果如表 3 所列。

表 3　参考数列与属性值数列对应元素之差的绝对值及其最大差和最小差

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\min_j\Delta_{ij}$	$\max_j\Delta_{ij}$
Δ_{1j}	2.0000	2.9500	2.3500	2.1000	2.5500	2.0000	2.9500
Δ_{2j}	1.4750	1.1250	1.1000	2.8500	2.6250	1.1000	2.8500
Δ_{3j}	2.1000	3.4375	3.2500	1.3250	2.3000	1.3250	3.4375
Δ_{4j}	1.1250	2.3000	2.9500	2.9125	3.4375	1.1250	3.4375
Δ_{5j}	0.9500	2.2750	1.9000	1.4000	2.5500	0.9500	2.5500
Δ_{min}						0.9500	
Δ_{max}							3.4375

由上表知，最小差 $\Delta_{min}=0.9500$，最大差 $\Delta_{max}=3.4375$，将其代入关联系数式(7)(这里取 $\rho=0.5$)，有

$$(\xi_{ij})_{5\times5}=\begin{bmatrix}0.7177 & 0.5716 & 0.6559 & 0.6989 & 0.6252\\ 0.8356 & 0.9385 & 0.9468 & 0.5841 & 0.6144\\ 0.6989 & 0.5176 & 0.5371 & 0.8768 & 0.6641\\ 0.9385 & 0.6641 & 0.5716 & 0.5763 & 0.5176\\ 1.0000 & 0.6682 & 0.7375 & 0.8557 & 0.6252\end{bmatrix}$$

利用式(8)计算各供应商属性值数列与参考数列的关联度，得

$r_1=0.6352$；$r_2=0.7855$；$r_3=0.6328$；$r_4=0.6351$；

$r_5=0.7340$

由于 $r_2>r_5>r_1>r_4>r_3$，故决策者选择的优先顺序为 $r_2>r_5>r_1>r_4>r_3$，即首先考虑供应商 x_2 作为最优选择方案。

这一结果与文献[9]中的结果相同，说明了该方法的可行性和有效性。

结束语　本文对属性权重完全已知且属性值以直觉梯形模糊数形式给出的多属性决策问题进行了研究，提出了一种基于灰色关联分析的决策方法。文中详细讨论了其实现的原理和步骤，最后以实例分析说明了本文提出的方法。其结果与文献[9]中的结果相同，说明了所提出的方法是可行的、有效的。该方法不仅具有决策原理简单、易于实现的特点，而且该方法的提出拓展了灰色关联分析法的理论及应用，从而为属性权重已知的直觉梯形模糊数多属性决策问题提供了一种新的解决思路。有关属性权重信息完全未知或部分未知的直觉梯形模糊数多属性决策问题，还有待于进一步的研究。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information. and Control, 1965, 8(3): 338-356

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349

[4] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219

[5] 徐泽水, 陈剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(4): 126-133

[6] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a noval accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 6899-6902

[7] Shu M H, Cheng C H, Chang J R. Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly[J]. Microelectronics Reliability, 2006(46): 2139-2148

[8] 王坚强. 模糊多准则决策方法研究综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 601-606

[9] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226-230

[10] 王坚强, 张忠. 基于直觉模糊数的信息不完全的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2008, 23(10): 1145-1148

[11] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999

[12] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey systems: foundations, methodology and applications[M]. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998

[13] 张吉军. 区间数多指标决策问题的灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(6): 1030-1033

[14] 卫贵武, 林锐. 基于二元语义多属性群决策的灰色关联分析法[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(9): 1686-1689

[15] Zhang J J, Wu D S, Olson D L. The method of grey related analysis to multiple attribute decision making problems with interval numbers[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2005, 42: 991-998