$P_{(\rho,\sigma)}$-集合与它的随机特性

于秀清

(德州学院数学系 德州 253000) (山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

摘 要 P-集合(packet sets)是由具有动态特征的内 P-集合与外 P-集合构成的集合对,其动态特性是通过元素迁移实现的。基于元素迁移具有随机特性,将 P-集合进行改进,提出了 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的概念,给出了它的结构,论证了 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合是 P-集合的一般形式,P-集合是 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的特例,并讨论了 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的概率特征与动态特性,给出了内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合、外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与元素迁移随机性的关系定理与应用。

关键词 P-集合,$P_{(\rho,\sigma)}$-集合,元素迁移,随机特征

中图法分类号 O144,TP18 **文献标识码** A

$P_{(\rho,\sigma)}$-sets and its Random Characteristics

YU Xiu-qing

(Department of Mathematics Sciences, Dezhou University, Dezhou 253000, China)

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract P-sets(packet sets) is a pair of sets composed of internal P-set and outer P-set, which has dynamic characteristics. The dynamic characteristics are got by element transfer that has random characteristics. Based on it this paper presented concepts of $P_{(\rho,\sigma)}$-sets, gave its structure and proved that $P_{(\rho,\sigma)}$-sets is the general case of P-sets, while P-sets is the special case of $P_{(\rho,\sigma)}$-sets. The paper discussed random and dynamic characteristics of $P_{(\rho,\sigma)}$-sets, and gave random relation theorems among internal $P_{(\rho,\sigma)}$-set, outer $P_{(\rho,\sigma)}$-set and element transfer probability, and their applications.

Keywords P-sets, $P_{(\rho,\sigma)}$-sets, Element transfer, Random characteristics and applications

1 引言

给定有限普通集合(Cantor set)$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合。如果 α 内被补充有限个属性,属性集合 α 变成属性集合 α^F,$\alpha\subseteq\alpha^F$(或者 card$(\alpha)\leqslant$ card(α^F)),则有限普通集合 X 变成有限普通集合 X^F,$X^F\neq\phi$,$X^F\subseteq X$(或者 card$(X^F)\leqslant$card(X)),这里:card= cardinal number。如果在 α 内删除部分属性,属性集合 α 变成属性集合 α^F,$\alpha^F\neq\phi$,$\alpha^F\subseteq\alpha$(或者 card$(\alpha^F)\leqslant$card (α)),则有限普通集合 X 变成有限普通集合 X^F,$X\subseteq X^F$(或者 card$(X)\leqslant$card(X^F))。显然,若对属性集合 α 内不断地补充部分属性,又不断删除部分属性,则有限普通集合 X 发生动态变化:集合 X 变成一个集合对(X^F,X^F)。这是一个十分重要的现象,这个现象在普通集合理论中不存在。根据这个现象,2008 年文献[1,2]提出 P-集合(Packet sets),给出 P-集合的结构;文献[3-10]给出了 P-集合在数据恢复、数据的生成-辨识方面的应用,这些应用都是基于 P-集合的动态特征,P-集合的动态特征是通过元素迁移来实现的:$\exists x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$;$\exists u\in U$,$u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X$。前者表示集合 X 内的元素 x 在元素迁移 $\overline{f}\in\overline{F}$ 的作用下,x 被迁出集合 X;后者表示集合 X 外的元素 u 在元素迁移 $f\in F$ 的作用下,u 被迁入集合 X。若元素 x 被元素迁移 $\overline{f}\in\overline{F}$ 迁出集合 X 与元素 u 被元素迁移 $f\in F$ 迁入集合 X 都具有随机性,则在元素迁入、元素迁出具有随机性特征条件下,文献[1,2]提出的 P-集会合变成什么样的结构、具有什么样的特征?文献[1-10]对此没有给出讨论。本文把随机特征引入到 P-集合中,对文献[1,2]提出的 P-集合继续讨论,给出 P-集合的随机特征和 P-集合的随机特征在疾病治疗中的应用。

约定 U 是非空有限论域,$X\subset U$ 是非空集合,V 是非空有限属性论域,$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_\lambda\}$,$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_\gamma\}$ 是元素迁移族[1,2],$f\in F$,$\overline{f}\in\overline{F}$ 是元素迁移[1,2];IDE= identifi-cation, UNI= unidentification, card= cardinal number。

2 P-集合与它的动态特性

2008 年,文献[1,2]给出:

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$,$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合,称 X^F 是 X 生成的内 P-集合(internal packet sets X^F),简称 X^F 是内 P-集合,而且

$$X^F=X-X^- \tag{1}$$

X^- 称作 X 的 $\overline{F}$-元素删除集合,而且

$$X^-=\{x|x\in X,\overline{f}(x)=u\overline{\in}X,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{2}$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha'|f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\} \tag{3}$$

式中,$\beta\in V$,$\beta\overline{\in}\alpha$;$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$;$X^F\neq\phi$。

到稿日期:2009-10-19 返修日期:2010-01-27 本文受山东省自然科学基金(No. Y2007H02),福建省自然科学基金(No. 2009J01293)资助。

于秀清(1968-),女,硕士生,副教授,主要研究方向为粗系统理论与应用,E-mail:sddzyxq@163.com。

给定有限普通集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}\subset V$ 是 X 的属性集合，称 X^F 是 X 生成的外 P-集合(outer packet sets X^F)，简称 X^F 是外 P-集合，而且

$$X^F=X\cup X^+ \tag{4}$$

X^+ 称作 X 的 F-元素补充集合，而且

$$X^+=\{x'\mid u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{5}$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F=\alpha-\{\alpha_i\mid\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{6}$$

式中，$\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$；$\alpha^F\neq\phi$。

由内 P-集合 $X^{\overline{F}}$ 与外 P-集合 X^F 构成的集合对，称作普通集合 X 生成的 P-集合(packet sets，P=packet)，简称 P-集合，如果有

$$(X^{\overline{F}},X^F) \tag{7}$$

普通集合 X 称作 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 的基集合(基础集合，ground sets)。

因为 P-集合具有动态特性，P-集合的一般表示形式是

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\} \tag{8}$$

式中，I,J 是指标集(index sets)，式(8)是 P-集合族的表示形式。

P-集合结构与概念的重要说明

1°. 为了简单，又不引起误解，式(7)只用若干个集合对中的一个集合对来表示 P-集合。

2°. $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$\overline{F}=\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_n\}$ 是元素迁移族；$f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 是元素迁移；在应用中 $f\in F$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 是给定的一个函数(函数是一个变换或者是映射)。$f\in F$ 的特征是：$u\in U$，$u\overline{\in}X$，$f\in F$ 把 u 变成 $f(u)=x'\in X$，或者 $\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$。$\overline{f}\in\overline{F}$ 的特征是：$x\in X$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 x 变成 $\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$，或者 $\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$。

3°. 式(3)的特征与计算机的内存储器 $T=T+1$ 相似，$T=T+1$ 具有动态特性，式(3)也具有动态特性，式(3)中 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 是表示被补充到 α 内的新元素构成的集合，$\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 与被补充新元素之前的 α，满足 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}\cap\alpha=\phi$。

4°. 式(4)的动态特性是：式(4)，式(5)可以用一个式子表示

$$X^F=X\cup\{u\mid u\in U,u\overline{\in}X,f(u)=x'\in X,f\in F\} \tag{9}$$

式(9)的动态特征与式(3)的相同。

5°. 在式(1)－式(3)中，X 内被删除部分元素，X 生成内 P-集合 $X^{\overline{F}}$，等价于对 X 的属性集合 α 内补充属性，α 生成 $\alpha^{\overline{F}}$，$\alpha\subset\alpha^{\overline{F}}$。或者，若 $\alpha_1^{\overline{F}}$，$\alpha_2^{\overline{F}}$ 分别是 $X_1^{\overline{F}}$，$X_2^{\overline{F}}$ 的属性集合，而且 $\alpha_1^{\overline{F}}\subseteq\alpha_2^{\overline{F}}$，则有 $X_2^{\overline{F}}\subseteq X_1^{\overline{F}}$。式(3)中的 $\{\alpha'\mid f(\beta)=\alpha'\in\alpha,f\in F\}$ 不是 X 内被删除的元素构成的集合 X^- 的属性集合，X^- 是式(2)。

利用式(1)－式(8)给出的结构，容易得到 P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 与普通集合 X 之间的关系：

定理 1 若 $\overline{F}=F=\phi$，则 P-集合 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 与普通集合 X 满足

$$(X^{\overline{F}},X^F)_{\overline{F}=F=\phi}=X \tag{10}$$

定理 2 若 $\overline{F}=F=\phi$，则 P-集合族 $\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$ 与普通集合 X 满足

$$\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}_{\overline{F}=F=\phi}=X \tag{11}$$

式(11)指出：在 $\overline{F}=F=\phi$ 的条件下和每一个 $X_i^{\overline{F}}$，每一个 X_j^F 都回到了有限普通集合 X 的"原点"；或者 $\{(X_i^{\overline{F}},X_j^F)\mid i\in I,j\in J\}$ 回到了普通集合 X 的"原点"。

定理 3 若 $(X^{\overline{F}},X^F)$ 是 X 生成的 P-集合，则

$$X^{\overline{F}}\subseteq X\subseteq X^F \tag{12}$$

式(12)指出：内-集合 $X^{\overline{F}}$ 被有限普通集合 X 包含，或者 $X^{\overline{F}}$ 包在 X 内；有限普通集合 X 被 X^F 外包含，或者 X^F 包在 X 外；P-集合的名称由此得到，P=packet。

3 元素迁移概率与 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合生成

定义 1 设 U 是有限论域，集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，$\exists x\in X$，$\overline{f}(x)=u\overline{\in}X$ 发生的可能性大小称作是元素迁移 $\overline{f}$ 的概率，记作

$$p_{\overline{F}}(\overline{f}(x)=u\overline{\in}X)=\rho \tag{13}$$

简记为 $p_{\overline{F}}(\overline{f})=\rho$，$\rho\in[0,1]$。

定义 2 设 U 是有限论域，集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset U$，对于 $u\in U$，$u\overline{\in}X$，$f(u)=x'\in X$ 发生的可能性的大小称作是元素迁移 f 的概率，记作

$$p_F(f(u)=x'\in X)=\sigma \tag{14}$$

简记为 $p_F(f)=\sigma$，$\sigma\in[0,1]$。

这里指出：对于 ρ(或 σ)可以从两个层面上理解：1°. 把 ρ(或 σ)理解为元素迁移 $\overline{f}\in\overline{F}$(或 $f\in F$)将集合 X 内(或外)的元素迁出(或迁入)发生的可能性大小，它反映了人们的经验和知识，称为主观概率；2°. 把 ρ(或 σ)看作是元素迁移 $\overline{f}\in\overline{F}$(或 $f\in F$)在多次重复观察中，出现的相对频率，称为客观概率。

定义 3 集合 $X_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 称作是集合 X 依元素迁移概率 $p_{\overline{F}}(\overline{f})$ 随机生成的内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，简称内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，而且

$$X_\rho^{p_{\overline{F}}}=X-X_\rho^{\overline{f}} \tag{15}$$

$X_\rho^{\overline{f}}$ 称作是集合 X 的 ρ-删除集合，而且

$$X_\rho^{\overline{f}}=\{x\mid x\in X,p_{\overline{F}}(\overline{f}(x)=u\overline{\in}X)\geqslant\rho,\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{16}$$

如果 $X_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 的属性集 $\alpha_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 与集合 X 的属性集 α 满足

$$\alpha_\rho^{p_{\overline{F}}}=\alpha\cup\{\alpha'\mid p_F(f(\beta)=\alpha'\in\alpha)\geqslant\rho',f\in F\} \tag{17}$$

式中，$\beta\in V$，$\beta\overline{\in}\alpha$，$f\in F$ 把 β 变成 $f(\beta)=\alpha'\in\alpha$ 的概率大于或等于 ρ'，$X_\rho^{p_{\overline{F}}}\neq\phi$。

定义 4 集合 $X_\sigma^{p_F}$ 称作是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$ 随机生成的外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，简称外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，而且

$$X_\sigma^{p_F}=X\cup X_\sigma^f \tag{18}$$

集合 X_σ^f 称作是集合 X 的 σ-补充集合，如果

$$X_\sigma^f=\{x'\mid u\in U,u\overline{\in}X,p_F(f(u)=x'\in X)\geqslant\sigma,f\in F\} \tag{19}$$

如果集合 $X_\sigma^{p_F}$ 的属性集 $\alpha_\sigma^{p_F}$ 与 X 的属性集 α 满足

$$\alpha_\sigma^{F}=\alpha-\{\alpha_i\mid p_{\overline{F}}(\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha)\geqslant\sigma',\overline{f}\in\overline{F}\} \tag{20}$$

式中，$\alpha_i\in\alpha$，$\overline{f}\in\overline{F}$ 把 α_i 变成 $\overline{f}(\alpha_i)=\beta_i\overline{\in}\alpha$ 的概率大于或等于 σ'，$\alpha_\sigma^{F}\neq\phi$。

定义 5 由内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合 $X_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 与外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合 $X_\sigma^{p_F}$ 构成的集合对称作是集合 X 的 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，且

$$(X_\rho^{p_{\overline{F}}},X_\sigma^{p_F}) \tag{21}$$

定义 6 $\eta_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 称作 $X_\rho^{p_{\overline{F}}}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_{\overline{F}}(\overline{f})$ 随机生成的内包度，如果

$$\eta_\rho^{p_{\overline{F}}}=\mathrm{card}(X_\rho^{p_{\overline{F}}})/\mathrm{card}(X) \tag{22}$$

$\eta_\sigma^{p_F}$ 称作 $X_\sigma^{p_F}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$ 随机生成的外包度，如果

$$\eta_{\sigma}^{p_F}=\mathrm{card}(X_{\sigma}^{p_F})/\mathrm{card}(X) \tag{23}$$

由定义 1—定义 6,直接得到:

命题 1 具有 $p_F(\bar{f})\equiv 0$ 的 $X_{\rho}^{p_F}$ 满足 $X_{\rho}^{p_F}=X$;反之亦真。

命题 2 具有 $p_F(f)\equiv 0$ 的 $X_{\sigma}^{p_F}$ 满足 $X_{\sigma}^{p_F}=X$;反之亦真。

命题 3 具有 $p_F(\bar{f})\equiv 1$ 的 $X_{\rho}^{p_F}$ 满足 $X_{\rho}^{p_F}=X^{\bar{F}}$;反之亦真。

命题 4 具有 $p_F(f)\equiv 1$ 的 $X_{\sigma}^{p_F}$ 满足 $X_{\sigma}^{p_F}=X^{F}$;反之亦真。

命题 5 在 $p_F(\bar{f})$,$p_F(f)$存在的条件下,集合 X 的 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合($X_{\rho}^{p_F}$,$X_{\sigma}^{p_F}$)是集合 X 的 P-集合($X^{\bar{F}}$,X^{F})一般形式,P-集合($X^{\bar{F}}$,X^{F})是 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合($X_{\gamma}^{p_F}$,$X_{\beta}^{p_F}$)的特例。

命题 6 若 $\eta_{\rho}^{p_F}$ 是 $X_{\rho}^{p_F}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$随机生成的内包度,则

$$0\leqslant\eta_{\rho}^{p_F}\leqslant 1 \tag{24}$$

命题 7 若 $\eta_{\beta}^{p_F}$ 是 $X_{\beta}^{p_F}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$随机生成的外包度,则

$$\eta_{\sigma}^{p_F}\geqslant 1 \tag{25}$$

由定义 1—定义 6,命题 1—命题 7 得到:

定理 4(内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合关系定理) 若($X_{\rho}^{p_F}$,$X_{\sigma}^{p_F}$)是集合 X 的 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,则

$$X_{\rho}^{p_F}\subseteq X\subseteq X_{\sigma}^{p_F} \tag{26}$$

定理 5(内 P-集合与内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合关系定理) 若 $X^{\bar{F}}$,$X_{\rho}^{p_F}$ 分别是集合 X 的内 P-集合与内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,$\rho\in(0,1)$,则

$$X_{\rho}^{p_F}\subseteq X^{\bar{F}} \tag{27}$$

证明:$X^{-}=\{x|x\in X,\bar{f}(x)=u\bar{\in}X,\bar{f}\in\bar{F}\}=\{x|x\in X,p_F(\bar{f}(x)=u\bar{\in}X)\equiv 1,\bar{f}\in\bar{F}\}$,$X_{\rho}^{\bar{f}}=\{x|x\in X,p_F(\bar{f}(x)=u\bar{\in}X)\geqslant\rho,\bar{f}\in\bar{F}\}$,又知 $\rho\in(0,1)$,所以 $X_{\rho}^{\bar{f}}\supseteq X^{-}$,故 $X_{\rho}^{p_F}=X-X_{\rho}^{\bar{f}}\subseteq X-X^{-}=X^{\bar{F}}$,则有式(27)。

定理 6(外 P-集合与外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合关系定理) 若 X^{F},$X_{\sigma}^{p_F}$ 分别是集合 X 的外 P-集合与外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,且 $\sigma\in(0,1)$,则

$$X^{F}\subseteq X_{\sigma}^{p_F} \tag{28}$$

定理 7(P-集合与 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合关系定理) 若($X^{\bar{F}}$,X^{F}),($X_{\rho}^{p_F}$,$X_{\sigma}^{p_F}$)分别是 X 的 P-集合与 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,则

$$(X^{\bar{F}},X^{F})\Subset(X_{\rho}^{p_F},X_{\sigma}^{p_F}) \tag{29}$$

式中,$\Subset$表示:$X_{\rho}^{p_F}\subseteq X^{\bar{F}}$,$X^{F}\subseteq X_{\sigma}^{p_F}$。

定理 6 与定理 7 的证明与定理 5 类似,略。

定理 8(内包度关系定理) 若 $\eta_{\rho}^{p_F}$ 是 $X_{\rho}^{p_F}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$随机生成的内包度,$\eta_{\bar{F}}$是 $X^{\bar{F}}$关于集合 X 生成的内包度[1,2],则

$$\eta_{\rho}^{p_F}\leqslant\eta_{\bar{F}} \tag{30}$$

证明:设 $X^{\bar{F}}$,$X_{\rho}^{p_F}$ 分别是集合 X 的内 P-集合与内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,$\rho\in[0,1]$,根据定理 5 知 $X_{\rho}^{p_F}\subseteq X^{\bar{F}}$,即 $\mathrm{card}(X_{\rho}^{p_F})\leqslant\mathrm{card}(X^{\bar{F}})$,故 $\eta_{\rho}^{p_F}=\mathrm{card}(X_{\rho}^{p_F})/\mathrm{card}(X)\leqslant\mathrm{card}(X^{\bar{F}})/\mathrm{card}(X)=\eta_{\bar{F}}$,则有式(30)。

定理 9(外包度关系定理) 若 $\eta_{\sigma}^{p_F}$ 是 $X_{\sigma}^{p_F}$ 关于集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$随机生成的外包度,η_F 是 X^{F} 关于集合 X 生成的外包度[1,2],则

$$\eta_{\sigma}^{p_F}\geqslant\eta_F \tag{31}$$

4 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的随机特性

定理 10(内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与元素迁移概率关系定理) 若 ρ_1,ρ_2 是元素迁移概率,$0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant 1$,则

$$X_{\rho_1}^{p_F}\subseteq X_{\rho_2}^{p_F} \tag{32}$$

式中,$X_{\rho_1}^{p_F}$,$X_{\rho_2}^{p_F}$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$的内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合。

证明:因为 $0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant 1$,则有集合 X 的删除集合满足关系 $X_{\rho_1}^{\bar{f}}=\{x|x\in X,p_F(\bar{f}(x)=u\bar{\in}X)\geqslant\rho_1\}\supseteq X_{\rho_2}^{\bar{f}}=\{x|x\in X,p(\bar{f}(x)=u\bar{\in}X)\geqslant\rho_2\}$,所以 $X_{\rho_1}^{p_F}=X-X_{\rho_1}^{\bar{f}}\subseteq X-X_{\rho_2}^{\bar{f}}=X_{\rho_2}^{p_F}$,则有式(32)。

推论 1 若 ρ_i,$i=1,2,3,\cdots,m$ 是元素迁移概率,$0\leqslant\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_m\leqslant 1$,则

$$X_{\rho_1}^{p_F}\subseteq X_{\rho_2}^{p_F}\subseteq\cdots\subseteq X_{\rho_m}^{p_F} \tag{33}$$

式中,$X_{\rho_i}^{p_F}$,$i=1,2,\cdots,m$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$的内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合。

定理 11(内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与属性迁移概率关系定理) 若 ρ'_1,ρ'_2 是属性迁移概率,$0\leqslant\rho'_1<\rho'_2\leqslant 1$,则

$$X_{\rho_1}^{p_F}\subseteq X_{\rho_2}^{p_F} \tag{34}$$

式中,$X_{\rho_1}^{p_F}$,$X_{\rho_2}^{p_F}$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$的内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合;$\alpha_{\rho_1}^{p_F}$,$\alpha_{\rho_2}^{p_F}$ 分别是 $X_{\rho_1}^{p_F}$,$X_{\rho_2}^{p_F}$ 的属性集。

证明:设 α 是集合 X 的属性集,因 $0\leqslant\rho_1'<\rho_2'\leqslant 1$,$\rho_1'$,$\rho_2'$是属性迁移概率,则$\{\alpha'|\beta\in V,\beta\bar{\in}\alpha,p_F(f(\beta)=\alpha'\in\alpha)\geqslant\rho_1',f\in F\}\supseteq\{\alpha'|\beta\in V,\beta\bar{\in}\alpha,\geqslant p_F(f(\beta)=\alpha\in\alpha)\geqslant\rho_2',f\in F\}$,则有 $\alpha\cup\{\alpha'|\beta\in V,\beta\bar{\in}\alpha,p_F(f(\beta)=\alpha\in\alpha)\geqslant\rho_1',f\in F\}\supseteq\alpha\cup\{\alpha'|\beta\in V,\beta\bar{\in}\alpha,p_F(f(\beta)=\alpha'\in\alpha)\geqslant\rho'_2,f\in F\}$,从而 $X_{\rho_1}^{p_F}$,$X_{\rho_2}^{p_F}$ 的属性集 $\alpha_{\rho_1}^{p_F}$,$\alpha_{\rho_2}^{p_F}$满足关系 $\alpha_{\rho_1}^{p_F}\supseteq\alpha_{\rho_2}^{p_F}$,由内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的定义、属性集与元素集之间的关系可得 $X_{\rho_1}^{p_F}\subseteq X_{\rho_2}^{p_F}$。

推论 2 若 ρ_i',$i=1,2,3,\cdots,m$ 是属性迁移概率,$0\leqslant\rho_1'<\rho_2'<\cdots<\rho'_m\leqslant 1$,则

$$X_{\rho_1}^{p_F}\subseteq X_{\rho_2}^{p_F}\subseteq\cdots\subseteq X_{\rho_m}^{p_F} \tag{35}$$

式中,$X_{\rho_i}^{p_F}$,$i=1,2,\cdots,m$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(\bar{f})$的内 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,$\alpha_{\rho_i}^{p_F}$,$i=1,2,3,\cdots,m$ 分别是 $X_{\rho_i}^{p_F}$ 的属性集。

定理 12(外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与元素迁移概率关系定理) 若 σ_1,σ_2 是元素迁移概率,$0\leqslant\sigma_1<\sigma_2\leqslant 1$,则

$$X_{\sigma_1}^{p_F}\supseteq X_{\sigma_2}^{p_F} \tag{36}$$

式中,$X_{\sigma_1}^{p_F}$,$X_{\sigma_2}^{p_F}$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$的外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合。

证明:因 $0\leqslant\sigma_1<\sigma_2\leqslant 1$,则有集合 X 的补充集合满足关系:$X_{\sigma_1}^{f}=\{x'|u\bar{\in}X,p_F(f(u)=x'\in X)\geqslant\sigma_1,f\in F\}\supseteq X_{\sigma_2}^{f}=\{x'|u\bar{\in}X,p_F(f(u)=x'\in X)\geqslant\sigma_2,f\in F\}$,所以 $X_{\sigma_1}^{F}=X\cup X_{\sigma_1}^{f}\supseteq X\cup X_{\sigma_2}^{f}=X_{\sigma_2}^{F}$,则有式(36)。

推论 3 若 σ_i,$i=1,2,3,\cdots,m$ 是元素迁移概率,$0\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_m\leqslant 1$,则

$$X_{\sigma_1}^{p_F}\supseteq X_{\sigma_2}^{p_F}\supseteq\cdots\supseteq X_{\sigma_m}^{p_F} \tag{37}$$

式中,$X_{\sigma_i}^{p_F}$,$i=1,2,3,\cdots,m$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$的外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合。

定理 13(外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合与属性迁移概率关系定理) 若 σ_1',σ_2'是属性迁移概率,$0\leqslant\sigma_1'<\sigma_2'\leqslant 1$,则

$$X_{\sigma_1}^{p_F}\supseteq X_{\sigma_2}^{p_F} \tag{38}$$

式中,$X_{\sigma_1}^{p_F}$,$X_{\sigma_2}^{p_F}$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$的外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合,$\alpha_{\sigma_1}^{p_F}$,$\alpha_{\sigma_2}^{p_F}$ 分别是 $X_{\sigma_1}^{p_F}$,$X_{\sigma_2}^{p_F}$ 的属性集。

定理 13 的证明与定理 11 的证明类似,略。

推论 4 若 σ_i',$i=1,2,3,\cdots,m$ 是属性迁移概率,$0\leqslant\sigma'_1<\sigma_2'<\cdots<\sigma_m'\leqslant 1$,则

$$X_{\sigma_1}^{p_F} \supseteq X_{\sigma_2}^{p_F} \supseteq \cdots \supseteq X_{\sigma_m}^{p_F} \tag{39}$$

式中，$X_{\sigma_i}^{p_F}$，$i=1,2,3,\cdots,m$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$的外 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合，$\alpha_{\sigma_i}^{p_F}$，$i=1,2,3,\cdots,m$ 分别是 $X_{\sigma_i}^{p_F}$ 的属性集。

由定理 10—定理 13 与推论 1—推论 4 直接得到：

推论 5 若 $\rho_1,\rho_2,\sigma_1,\sigma_2$ 是元素迁移概率，且 $0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant 1$，$0\leqslant\sigma_1<\sigma_2\leqslant 1$，则

$$(X_{\rho_2}^{p_F},X_{\sigma_2}^{p_F})\subset(X_{\rho_1}^{p_F},X_{\sigma_1}^{p_F}) \tag{40}$$

推论 6 若 $\rho_i,\sigma_j\in[0,1](i\in I,j\in J)$是元素迁移概率，$\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_{\max\{I\}}$，$\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_{\max\{J\}}$，则

$$(X_{\rho_k}^{p_F},X_{\sigma_l}^{p_F})\subset(X_{\rho_t}^{p_F},X_{\sigma_r}^{p_F})$$

式中，I,J 是指标集，$k,t\in I,l,r\in J$ 且 $k>t,l>r$。

推论 7 若 $\rho_1',\rho_2',\sigma_1',\sigma_2'$是属性迁移概率，$0\leqslant\rho_1'<\rho_2'\leqslant 1$，$0\leqslant\sigma_1'<\sigma_2'\leqslant 1$，则

$$(X_{\rho_2}^{p_F},X_{\sigma_2}^{p_F})\subset(X_{\rho_1}^{p_F},X_{\sigma_1}^{p_F}) \tag{41}$$

推论 8 若 $\rho_i',\sigma_j'\in[0,1](i\in I,j\in J)$是属性迁移概率，且 $\rho_1'<\rho_2'<\cdots<\rho'_{\max\{I\}}$，$\sigma_1'<\sigma_2'<\cdots<\sigma'_{\max\{J\}}$，则

$$(X_{\rho_k}^{p_F},X_{\sigma_l}^{p_F})\subset(X_{\rho_t}^{p_F},X_{\sigma_r}^{p_F}) \tag{42}$$

式中，I,J 是指标集，$k,t\in I,l,r\in J$ 且 $k>t,l>r$。

推论 9 若 $\rho_i,\sigma_i,i=1,2,\cdots,m$ 是元素迁移概率，$0\leqslant\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_m\leqslant 1$，$0\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_m\leqslant 1$，$\eta_{\rho_i}^{p_F}$，$\eta_{\sigma_i}^{p_F}$ 分别是$(X_{\rho_i}^{p_F},X_{\sigma_i}^{p_F})$内包度与外包度，则

$$1°.\ 1\geqslant\eta_{\rho_1}^{p_F}\geqslant\eta_{\rho_2}^{p_F}\geqslant\cdots\geqslant\eta_{\rho_m}^{p_F}\geqslant 0 \tag{43}$$

$$2°.\ 1\geqslant\eta_{\sigma_m}^{p_F}\geqslant\eta_{\sigma_{m-1}}^{p_F}\geqslant\cdots\geqslant\eta_{\sigma_2}^{p_F}\geqslant\eta_{\sigma_1}^{p_F}\geqslant 0 \tag{44}$$

推论 10 若 $\rho_i',\sigma_j'\in[0,1]$，$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$是属性迁移概率，且 $\rho_1'<\rho_2'<\cdots<\rho_m'$，$\sigma'_1<\sigma_2'<\cdots<\sigma_n'$，$\eta_{\rho_i}^{p_F}$，$\eta_{\sigma_j}^{p_F}$ 分别是集合 X 依元素迁移概率 $p_F(f)$的 $P_{(\rho_i,\sigma_j)}$-集合$(X_{\rho_i}^{p_F},X_{\sigma_j}^{p_F})$的内包度与外包度，则

$$1°.\ 0\leqslant\eta_{\rho_m}^{p_F}\leqslant\eta_{\rho_{m-1}}^{p_F}\leqslant\cdots\leqslant\eta_{\rho_1}^{p_F}\leqslant 1 \tag{45}$$

$$2°.\ 0\leqslant\eta_{\sigma_1}^{p_F}\leqslant\eta_{\sigma_2}^{p_F}\leqslant\cdots\leqslant\eta_{\sigma_m}^{p_F}\leqslant 1 \tag{46}$$

式中，$\alpha_{\rho_i}^{p_F}$，$\alpha_{\sigma_j}^{p_F}$ 分别是 $X_{\rho_i}^{p_F}$，$X_{\sigma_j}^{p_F}$ 的属性集。

定理 14 若$(X_{\rho_i}^{p_F},X_{\sigma_j}^{p_F})$是集合 X 的 $P_{(\rho_i,\sigma_j)}$-集合，I,J 是指标集，$\forall i\in I,\forall j\in J$，$\rho_i,\sigma_j\in[0,1]$，则

$$1°.\ \bigcup_{i\in I,j\in J}(X_{\rho_i}^{p_F},X_{\sigma_j}^{p_F})=(X^{p_F}_{\max\limits_{i\in I}\rho_i},X^{p_F}_{\min\limits_{i\in J}\sigma_j}) \tag{47}$$

$$2°.\ \bigcap_{i\in I,j\in J}(X_{\rho_i}^{p_F},X_{\sigma_j}^{p_F})=(X^{p_F}_{\min\limits_{i\in I}\rho_i},X^{p_F}_{\max\limits_{j\in J}\sigma_j}) \tag{48}$$

5 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的随机特性在疾病治疗中的应用

为了简单又不失一般性，本文以属性迁移概率 $\rho'=1$ 条件下的内 $P_{(\rho_i,\sigma_j)}$-集合为例。

下面的例子来自德州市人民医院消化科病房的病例，病例集合是 2006 年 8 月同一天入院治疗的、因食用同一种食物中毒而住院的 7 位患者 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$，初诊后，医生采用同一个处方 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$对 7 位患者进行治疗。其中 $x_i,i=1,2,3,4,5,6,7$，$\alpha_j,j=1,2,3,4$ 分别表示患者与处方中的药物，具体名称略。治疗一个疗程后，7 位患者病情没有明显好转。医生根据复诊情况，在处方中添加了 $\alpha_1',\alpha_2'(\alpha_1',\alpha_2'\overline{\in}\alpha)$两种药物，利用处方$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1',\alpha_2'\}$ $(\alpha_1',\alpha'_2$ 迁入 $\alpha)$，对患者进行第二个疗程的治疗。由于 7 位患者自身状况的差异，经过第二个疗程的治疗后，每位患者能否出院具有随机性，这与内 $P_{(\rho_i,\sigma_j)}$-集合 $X_\rho^{p_F}$ 的随机特征相吻合。将患者构成的集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$看作是 P-集合的基础集，处方上的药物构成的集合 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是集合 X 的属性集，若患者病愈，其出院的概率 $\rho=1$，若患者未完全康复，其出院的概率 $\rho\in(0,1)$。在第二个疗程中，处方外的两种药物 α_1',α_2'被迁入属性集 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$的概率 $\rho'=1$，$\alpha_{\rho'=1}^{p_F}=\alpha^F=\alpha\cup\{\alpha_1',\alpha_2'\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1',\alpha_2'\}$。下面用表 1、表 2 分别表示第一个疗程与第二个治疗后患者病情的康复情况，本文采用患者出院的概率来表示患者病情的康复情况。

表 1 患者采用处方 α 治疗第一个疗程后，出院的概率分布

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
ρ	0	0	0	0	0	0	0

表 2 患者采用处方 α^F 治疗第二个疗程后，出院的概率分布

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
ρ	0.87	0.95	1	1	0.9	0.88	0.96

医生根据临床经验，确定病情康复到 $\rho=0.9$ 就可以出院，这样经过两个疗程的治疗后，住院患者构成的集合由 X 变成集合 $X_\rho^{p_F}=X-\{x_i|x_i\in X,p(\overline{f}(x_i)=u_i\overline{\in}X)=\rho\geqslant 0.9,\overline{f}\in\overline{F}\}=\{x_1,x_6\}$；或者 x_1,x_6 仍在医院接受治疗；x_2,x_3,x_4,x_5,x_7 已康复出院。

结束语 本文在 P-集合的基础上提出了元素迁移的随机性，给出了集合 X 依元素迁移概率生成的 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的概念与结构，讨论了 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合的随机特性，$P_{(\rho,\sigma)}$-集合是既考虑了元素的动态特性，又考虑了元素迁移的随机特性而得到的一个数学结构与模型。并给出了 P-集合与 $P_{(\rho,\sigma)}$-集合关系定理，扩充了对 P-集合及其特性的认识与应用。利用本文给出的结果与文献[1-10]，我们能够说：P-集合是计算机科学、信息科学中一个新的数学工具与数学方法；P-集合具有很好的应用前景。

参 考 文 献

[1] Shi Kai-quan. P-sets and its applications [J]. An International Journal Advan-ces in Systems Science and Applications, 2009, 9(2): 209-219

[2] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报：理学版，2008，43(11)：75-84

[3] 史开泉，张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(4)：8-14

[4] 汤积华，陈保会，史开泉. P-集合与$(\overline{F},F)$-数据生成-辨识[J]. 山东大学学报：理学版，2009，44(11)：19-25

[5] 于秀清. P-集合的识别与筛选[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(1)94-98

[6] 张飞，陈萍，张丽. P-集合的 P-分离与应用[J]. 山东大学学报：理学版，2010，45(3)：18-22

[7] Shi Kai-quan, Li Xiu-hong, Camouflaged information and its on identificat-ion and its applications[J]. An International Journal Advances in Systems Sci-ence and Applications, 2010, 10(2): 208-216

[8] Zhang Li, Cui Yu-quan. Outer P-sets and data internal-recover [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 229-236

[9] Lin Hong-kang, Li Yu-ying. P-sets and its P-separation theo-rems[J]. An In-ternational Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 245-251

[10] Zhang Guan-yu, Li En-zhong. Information gene and its informa-tion kno-ck-out/knock-in[J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 267-275