

通用计算网络图聚类系数和环方法

程婷婷 王恒山 刘建国

(上海理工大学管理学院 上海 200093)

摘要 二分图中不存在三角形,由标准聚类系数概念扩展二分图聚类系数将其定义为四边形所占比例,提出计算聚类系数的通用公式,并证明这两个聚类系数具有同样的聚类特征。把这两个聚类系数应用于计算大尺度环数目,得到适合于二分网络或是多分网络的通用计算大环数目公式。

关键词 聚类系数,环,网络图

Common Algorithm on Computing Networks' Clustering Coefficient and Cycles

CHENG Ting-ting WANG Heng-shan LIU Jian-guo

(Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract Triangles are absent in bipartite networks, this paper proposed clustering coefficient definition in bipartite networks which is the fraction of quadrilaterals. Numerical results show that both coefficients have the same property. Furthermore this paper applied both coefficients to compute the number of large cycles, deduced an common expression for estimating number of large size cycles.

Keywords Clustering coefficient, Cycles, Network graph

1 引言

聚类系数由 Watts and Strogatz^[1]提出,是刻画复杂网络拓扑结构特性的一个重要量,目的是考察网络中邻居关系之间的社团特性,其大小是邻居真实连接数目占邻居最大可能连接数比例的平均。这个量被用来衡量小世界网络特性,了解无标度振荡器网络中的同步性^[2],刻画化学反应的性质^[3]。

二分网络中有两类结点,当且仅当结点属于不同类时才有可能连接,因此二分网络不能形成三角形^[3],因此标准聚类系数为0。不同的二分网络具有不同的聚类特性和社团^[3],因此有必要寻找另外一个聚类系数来表征不同二分网络的拓扑特性。

本文用标准聚类系数研究一分网络中的社团特性,用四边形的比例研究二分网中的社团特性。然后,研究新定义标准聚类系数在规则网、小世界网、无标度网中的基本性质,证明和标准聚类系数有着共同性质。

最近研究证明大尺度环的频率和分布特性非常重要,比如通过研究大尺度环深入了解网络层次结构^[4]、网络结构稳定性^[5],探查玻色子网不同时期变化^[6],随机游走计算结点相似性^[7]。计算任一大型网络环数目工作量非常大,通常使用近似计算方法^[8,9]或是统计学估计^[10,11]。本文把任一网络结构如一分网和二分网看作由基本单位三角形和四边形组成,应用这两个聚类系数推导出一个新的表达式来估计大尺度环数目。研究大尺度环估计数目和分布特性,是对以前估计^[11]

的一个非常好的推广。

本文第2节由标准聚类系数演绎出扩展聚类系数(四边形聚类系数);第3节应用这两个聚类系数来计算一分网络大尺度环数目,并将其推广到通用网络结构;最后是结论。

2 两个互补的聚类系数

定义1(i 结点一阶邻居集) 网络图中与结点 i 直接相连结点集。形式化描述为: $Set_1^{Neib}(i) = \{x | \forall x_j \in Set^{Neib}(i) \rightarrow link(x_i, x_j)\}$,用 G 表示网络图结点集, $link(x_i, x_j)$ 表示网络图 G 中结点 x_i 与结点 x_j 连接关系, N 为网络图结点数目, $Set^{Neib}(i, N)$ 中结点的数目是 i 结点度 d_i 。

定义2(i 结点二阶邻居集) 网络图中两 i 一阶邻居结点又有除 i 之外的共同邻居结点,所有满足这样要求的结点组成 i 的二阶邻居集。形式化描述为: $Set_2^{Neib}(i) = \{x | \forall x_g \in Set_1^{Neib}(i) \rightarrow (link(x_k, x_g) \wedge link(x_j, x_g)), x_j, x_k \in Set_1^{Neib}(i)\}$

标准聚类系数 C_3 定义为真实存在三角形个数占可能存在三角形最大数目的分数。用 d_i 代表结点 i 邻居数目,最大可能存在三角形数目即邻居结点最大相连数目为 $d_i(d_i-1)/2$ 。所以对结点 x_i ,其聚类系数 $C_3(i)$ 为:

$$C_3(i) = \frac{2rm_i}{d_i(d_i-1)} | \forall x_i \in G \quad (1)$$

式中, rm_i^3 表示真实存在的三角形数目,即 d_i 个邻居相连的数目。

用 $C_4(i)$ 表示四边形聚类系数,其值类推为真实存在四边形数目除以最大可能四边形数目。对于一个给定结点 i ,真

到稿日期:2010-12-21 返修日期:2011-04-13 本文受国家自然科学基金(71071098),上海市重点学科管理科学与工程(S30504)资助。

程婷婷(1981—),女,博士生,主要研究方向为系统工程、计算机应用技术;王恒山(1948—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为数据挖掘、信息自动过滤算法、知识管理系统、决策支持系统;刘建国(1979—),男,硕士生导师,主要研究方向为信息过滤、复杂网络、数据挖掘、科学知识图谱分析。

实存在四边形数目为任两个一阶邻居结点具有二阶邻居的数目;可能存在的四边形最大数目为真实存在四边形数目加上任两个邻居结点没有共同邻居但理论上可能存在四边形的数目,即两个一阶邻居集中结点度分别减去其共同二阶邻居结点数后,再减去1或是0(如果这两点相连则要减1,否则不减)后的乘积。四环聚类系数 $C_4(i)$ 为:

$$C_4(i) = \frac{\sum_{m=1}^{d_i} \sum_{n=m+1}^{d_i} \eta_p(m, n)}{\sum_{m=1}^{d_i} \sum_{n=m+1}^{d_i} [\phi_i(m, n) + \eta_p(m, n)]} \quad (2)$$

式中, m 和 n 表示结点 i 的任意两个邻居结点, $\eta_p(m, n)$ 表示 i 二阶邻居结点数。 $\phi_i(m, n)$ 表示任意两一阶邻居集结点可能存在二阶邻居但现实网络中不存在数目。其中 $link(m, n)$ 表示 m 和 n 是否连接, 如果为 1 表示 m 和 n 互相连接, 为 0 表示不连接, 则有:

$$\begin{aligned} \phi_i(m, n) &= (k_m - \gamma_i(m, n))(k_n - \gamma_i(m, n)) | \\ &\begin{cases} \gamma_i(m, n) = 1 + \eta_p(m, n) + 1, link(m, n) = 1 \\ \gamma_i(m, n) = 1 + \eta_p(m, n), link(m, n) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

因为 $C_3(i)$ 表示结点 i 的任意两个邻居结点相连的概率, 则 $C_4(i)$ 表示任意两邻居结点具有共同邻居(二阶邻居)概率。把所有结点的聚类系数加和平均分别得到系统聚类系数 $\langle C_3 \rangle$ 和 $\langle C_4 \rangle$, 表示用一阶邻居和二阶邻居考查得到的社团性质, 为引用方便将其简写为 C_3 和 C_4 , 并称为一阶聚类系数和二阶聚类系数。

图 1 中 C_3 和 C_4 分别用实线和虚线表示。图 1(a) 显示聚类系数关于 n/N 的函数曲线, 结点总数 $N=10^3$, 网络是任一个结点有 n 条对称分布边组成的规则网络。 $C_4 < C_3$ 并且聚类系数都随着 n 增大而单调上升, 在中间区域 C_3 大致是一个常数, C_4 值有些轻微的下降。研究证明在规则网络中聚类系数依赖于 n/N , 不同规模的规则网络有类似的曲线。

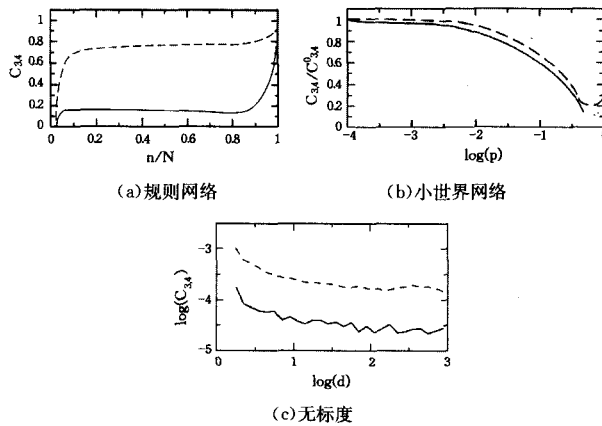


图 1 不同拓扑结构网络的 C_3 和 C_4

图 1(b) 小世界网络是从 $n=4$ 的 $N=10^3$ 个结点的规则网络开始以概率 p 把短程连接重建成长程连接演化成的小世界网络, 初始规则网络的聚类系数 $C_{3,4}^0$ 。可以看到在 p 较小时, $C_{3,4}$ 稍大于 $C_{3,4}^0$, p 较大时 $C_{3,4}$ 远大于 $C_{3,4}^0$ 。 $C_{3,4}$ 远大于 $C_{3,4}^0$ 是小世界特征的一种展现, 因此 p 在此范围会产生小世界网络。也可以用文献[12]的方法构造小世界网络(不断短程边重连), 可以得到同样的性质。

图 1(c) 示出无标度网中两个聚类系数关于结点数 d 函数曲线。无标度网是由两个相连的初始结点, 由优先连接规

则构造的 $N=10^5$ 个结点的网络。 $C_4(d)$ 和 $C_3(d)$ 随着 d 的增加几乎都不变; 对任一 d , $C_4(d)$ 和 $C_3(d)$ 几乎是一个常数。

综上所述, 图 1 证明可用一阶聚类系数刻画的各种网络拓扑性质, 同样也可以用二阶聚类系数 C_4 来刻画。 C_4 计算的是四边形的数目而不是三角形的数目, 所以其适用于特殊网络——二分网络。

3 用三角形和四边形聚类系数估计大尺度环数目

定义 3(基础子环) 因某中心点的环都可由顶点(中心点)和其一阶邻居结点组成的三角形或是四边形构成, 则定义这种三角形为基础三角形, 这种四边形为基础四边形, 并将其统称为基础子环。

定义 4 完全 s 尺度环, 用 o_s^0 表示: 如图 2(a) 所示出结构, $o_s(s$ 尺度环) 是完全由基础三角形组成的环。

定义 5 ρ 度非完全 s 尺度环 o_s^ρ : 当且仅当 o_s 由 ρ 个基础四边形, 其它基础子环全部为基础三角形组成, $\rho=0$ 表示完全 s 尺度环。

最近越来越多的研究关注复杂网络中环结构, 因为环对于网络中信息传播^[13] 和流感传播^[14] 具有非常重要的作用。为解决计算任意尺度环个数需要长计算时间的问题, 本文运用概率统计方法估计不同尺度数目^[11], 该方法用到了度分布 $P(d)$ 和一阶聚类系数分布 $C_3(d)$ 。该方法环尺度上界较小且不能被应用于二部图, 本文环的尺度指环中结点数。在这部分应用 C_4 和 C_3 改进该方法, 改进方法不仅适用于一分图也适用于二分图和分网络。

文献[11]对一个中心结点估计环数目, 中心结点和其它所有结点都相连。如图 2(a) 所示, 中心结点与其两个一阶邻居结点连接形成两条边, 两一阶邻居结点连接形成第三条边, 组成三角形, 则相邻三角形会形成四边形, 五边形等。由以上过程可估计网络结构中度为 d 的中心结点存在完全由基础三角形构成的 o_s^0 数目, 其中 $s \in [3, d+1]$ 。第一步取包括中心点的 s 个结点, 不妨设先选择中心结点再从其一阶邻居集中选择 $s-1$ 个结点, 有 $\binom{1}{1} \binom{d}{s-1}$ 种情况。第二步把选出的除中心结点外的 $s-1$ 个结点排序并顺次连接, 因为一个序列和其逆序组成的环相同, 则排序可能情况有 $\frac{(s-1)!}{2}$, 即顺序连接这 $s-1$ 结点可能形成 o_s^0 的数目为 $\frac{(s-1)!}{2}$ 。综合前两步, o_s^0 存在最大数目为 $n_0^{\max}(s, d) = \binom{1}{1} \binom{d}{s-1} \frac{(s-1)!}{2} | s \in [3, k+1]$ 。第三步估计真实存在的概率, 因为 $s-1$ 个结点和中心结点的连线全部真实出现, 则第二步每种可能形成 o_s^0 的情况存在概率是由 $s-1$ 个结点能同时存在 $s-2$ 个连线的概率决定的。每两个一阶邻居结点连接的概率为 $C_3(d)$, $s-2$ 个连线同时存在的概率为 $C_3(d)^{s-2}$, 即环真实存在的概率 $p_0(s, d) = C_3(d)^{s-2}$ 。综上所述, 计算度为 d 的中心点得到 o_s^0 数目的公式为:

$$N_{o_s^0}(d) = n_0^{\max}(s, d) p_0(s, d) | 3 \leq s \leq d+1 \in N \quad (4)$$

在网络图中只要度满足 $d_{\max} \geq d \geq s-1$ 的结点都有可能形成 o_s^0 , 网络系统的度分布为 $P(d)$, 则整个网络中具有 o_s^0 的数目估计为:

$$H_{o_s}^0 = N * \psi_s * \sum_{k=s-1}^{\max} p(d) * n_0^{\max}(s, d) * p_0(s, d) \quad (5)$$

式中, ψ_s 表示考虑重复计算环数目的调节系数, 为 1 时表示所有的 o_s 都没有重复计算, 趋于 0 时表示重复计算情况非常严重, 其值为 $1/s$ 。式(5)只考虑完全由基础三角形组成的 O_s^0 数量, 网络系统中这类结点的数目也是非常有限的, 因此由式(5)得到的环数量具有很小的上界。对于一个结点, 在其形成的大尺度环中, 除该结点外的其余结点不一定是该结点的一阶邻居, 还有可能是其两个一阶邻居的共同一阶邻居, 即该结点的二阶邻居。如图 2(b) 和图 2(c) 所示, 这种情况是式(5)无法计算的也是其漏掉的情况, 并且在二分网络中, 顶点只含有基础四边形, 应用式(5)计算时因为 $C_3(k) \equiv 0$, 所以式(5)中所有的环都不存在, $T_{o_s}^N = 0$ 会产生错误估计。

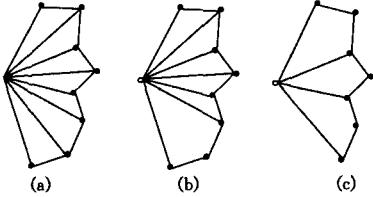


图 2 三种形式基础子环结构

本文考虑由顶点, 一阶邻居结点和二阶邻居结点构成环的情况(如图 2(b), 图 2(c)所示), 并根据环不完全度来分析计算环数目, 本文中环不完全度 ρ 即为环中四边形的数目也是环中基础四边形的数目, 因此估计真实存在环数目会用到式(2)定义的二阶聚类系数 $C_4(d)$ 。首先考虑顶点(o)连接环中除了其中一个结点外所有结点的情况, 即 o_s^1 的数目, 在这种情况下有 $s-2$ 个结点连接到结点 o 。计算度为 d 的结点包含一个基础四边形的数目 o_s^1 , 过程如下:

第一步 把 o 结点选出, 有 $\binom{1}{1}$ 种可能;

第二步 从和 o 相连的 d 个结点中选择 $s-2$ 个结点, 有 $\binom{k}{s-2}$ 种可能;

第三步 把与顶点 o 相连的 $s-2$ 个结点排序易知有 $(s-2)!/2$ 种情况;

第四步 在任一排序情况下, 取任两排序为相邻的一阶邻居结点, 再取这两个结点的共同一阶邻居, 因为有 $s-2$ 个邻居结点, 则顺序结点对有 $s-3$ 个, 则有 $\binom{s-3}{1}$ 种情况;

由以上几步知 $n_1^{\max}(s, d) = \binom{1}{1} \binom{d}{s-2} \frac{(s-2)!}{2} * \binom{s-3}{1} |s \in [3, k+2]$ 。

第五步 求真实存在概率, 估计存在 o_s^1 环数目。 o_s^1 环中有 $s-2$ 个一阶邻居结点, 一个二阶邻居结点。经分析, 会存在 $s-4$ 对顺序一阶邻居结点连接成的边, 一对不连接的顺序相邻一阶邻居结点, 在这里称为虚边, 并且此结点对要满足有共同二阶邻居。下面将分别两步详细计算:

a) 计算连接 o_s^1 中 $s-4$ 对顺序一阶邻居结点连线存在的概率, 任两一阶邻居结点连接概率独立, 则存在 $s-4$ 条边的概率为 $C_3(d)^{s-4}$;

b) 形成一个四边形的概率, 即有一条虚边, 且有共同二阶

邻居的概率。虚边存在概率为 $1-C_3(d)$, 两一阶邻居有共同二阶邻居的概率 $C_4(d)$, 因此此步得到的概率为 $(1-C_3(d)) * C_4(d)$;

总体来说, 第五步求得的 o_s^1 存在概率为 $p_1(s, d) = C_3(d)^{s-4} * C_4(d) * (1-C_3(d))$

第六步 估计存在 o_s^1 的数目。 $N_{o_s^1}^{\max}(s, d) = n_1(s, d) * p_1(s, d)$ 。

这样就可以得到和式(5)相似的公式, 不同的是用 $n_1(s, d)$ 和 $p_1(s, d)$ 分别替代 $n_0(s, d)$ 和 $p_0(s, k)$, 求和的下限是 $s-2$ 而不是 $s-1$, 得到整个网络中环的数目为:

$$H_{o_s}^1 = N * \psi_s * \sum_{d=s-2}^{\max} p(d) * n_1(s, d) * p_1(s, d) \Big| \psi_s = \frac{1}{s} \quad (6)$$

这是在式(5)中没有计算的环数目, 上面考虑的是 1 度非完全 s 环的数目, 同理推得 o_s^g 的数目, 其中 $1 \leq g \leq ([s/2]-1)$, $[a]$ 表示 a 取整数部分。有 g 个四边形且尺度为 s 的环最大数目为 $n_g(s, d) = \binom{d}{s-g-1} * \frac{(s-g-1)!}{2} * \binom{s-g-1}{g} | 0 \leq g \leq [s/2]-1$, 估计发生概率为 $p_g(s, d) = C_3(d)^{s-2g-2} * C_4(d)^g * (1-C_3(d))^g$, o_s^g 估计存在数目为:

$$N_{o_s^g} = \binom{d}{s-g-1} (s-g-1)! / 2 * C_3(d)^{s-2g-2} * C_4(d)^g * (1-C_3(d))^g | 0 \leq g \leq (s/2-1) \quad (7)$$

考虑 $g=s/2-1$ 的情况, o_s^g 环全部由基础四边形构成, 但经过验证也适用于上式。

易知网络系统中 o_s^g 数目:

$$H_{o_s^g} = N * \psi_s * \sum_{d=s-g-1}^{\max} p(d) * n_g(s, d) * p_g(s, d) \Big| \psi_s = \frac{1}{s} \quad (8)$$

在网络结构中 o_s 有 $o_s^0, o_s^1, \dots, o_s^{(s/2)-1}$ 情况, 即 $T_{o_s} = H_{o_s^0} + H_{o_s^1} + \dots + H_{o_s^{(s/2)-1}}$, 因此网络系统中 o_s 的数目计算如下式:

$$T_{o_s} = N * \psi_s * \sum_{d=s-g-1}^{\max} \sum_{g=0}^{[s/2]-1} (p(d) * n_g(s, d) * p_g(s, d)) \Big| \psi_s = 1/s \quad (9)$$

式中, 第一项 $g=0$ 时就是式(5), 上限 $[s/2]-1 \geq 0$, 来自于式(7)中 $C_3(d)$ 的指数非负, $s-2g-2 \geq 0 \Rightarrow [s/2]-1$ 。式(9)不但改进了式(5)的估计, 还可以计算更大尺度的环。分析式(5)中 $\forall d, \exists \binom{d}{s-1} \Rightarrow s-1 \leq d \leq d_{\max}$, 则能估计的环最大尺度为 $d_{\max}+1$, 而在式(9)中 $\forall d, \exists (s-2g-2 \leq d_{\max}) \wedge ((s-g-1) \leq d_{\max}) \Rightarrow \exists s \leq 2d_{\max}$ 可知估计环的最大尺度为 $2d_{\max}$ 。

式(9)另外一个改进就是其可以用来估计二分网络中的环, 在二分网络中一阶邻居集内没有连接, 式(9)中所有 $C_3(d)$ 的指数都会消失; 二分网络结构类似于图 2(c) 只由基础四边形构成, 因此可知尺度为 s 的环由且仅由 g 个基础四边形组成, 满足 $s=2(g+1)$, 即 $g=(s-2)/2$ 。 g 个相邻四边形, 则需要在第二步中需取 $g+1=s/2$ 个一阶邻居结点, 第三步再顺次排序有 $\frac{(s/2)!}{2}$ 种情况, 第四步在 g 对顺序一阶邻居结点加入 g 个二阶共同邻居情况只有一种。第五步估计存在概率时任意两顺序一阶邻居结点存在二阶邻居的概率为 $C_4(d)$, $s/2$ 个顺序排列一阶邻居结点会产生 $(s/2)-1$ 个四边形, 二阶邻居结点数目也为 $(s/2)-1$, 其存在的概率为 $C_4(d)^{s/2-1}$, 组成四边形中两一阶邻居结点不相连的概率为 1,

(下转第 256 页)

- [2] Qi Yong-feng, Zhang Jia-shu. (2D)2PCALDA: An efficient approach for face recognition[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 213(1): 1-7
- [3] Wang Jin, Barret A, Wang Lu, et al. Multilinear principal component analysis for face recognition with fewer features[J]. Neurocomputing, 2010, 73(10-12): 1550-1555
- [4] Yang J, Zhang D, et al. Two-dimensional PCA: a new approach to appearance-based face representation and recognition [J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2004, 26(1): 131-137
- [5] Visanni M, Garcia C, Laurent C. Comparing robustness of two-dimensional PCA and eigenfaces for face recognition[J]. Lecture notes in computer science, 2004, 3212: 717-724
- [6] Lu C, Liu W, Liu X, et al. Double sides 2DPCA for face recognition[J]. Lectures notes in computer science, 2008, 5226: 446-459
- [7] Kim Y, Song Y, et al. Face recognition using a fusing method based on bidirectional 2DPCA [J]. Applied mathematics and computation, 2008, 205(2): 601-607
- [8] Kim C, Choi C. Image covariance-based subspace method for face recognition[J]. Pattern recognition, 2007, 40(5): 1592-1604
- [9] Nguyen N, Liu W, Venkates S. Random subspace two-dimensional PCA for face recognition[J]. Lecture notes in computer science, 2007, 4810: 655-664
- [10] Pan X, Ruan Q. Palmprint recognition using Gabor feature-based (2D)²PCA[J]. Neurocomputing, 2008, 71(13-15): 3032-3036
- [11] Yu W, Wang Z, Chen W. A new framework to combine vertical and horizontal information for face recognition[J]. Neurocomputing, 2009, 72(4-6): 1084-1091
- [12] Yu H, Bennamoun M. 1D-PCA, 2D-PCA to nD-PCA[C]// The 18th international conference in pattern recognition. 2006
- [13] Lu H, Plataniotis K N, Venetsanopoulos A N. MPCA: multilinear principal component analysis of tensor objects [J]. IEEE transactions in neural networks, 2008, 19(1)
- [14] Zheng Wei-shi, Lai J H, Li S Z. 1D-LDA vs. 2DLDA: when is vector-based linear discriminant analysis better than matrix-based[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(7): 2156-2172
- [15] 李晓东, 费树岷. 一种改进的模块化 2DPCA 人脸识别方法[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(15): 4672-4675
- [16] Zhang Li-jing, Zhang Ying. Facial feature extraction with weighted modular Two-Dimensional PCA[C]// The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering, 2008. ICBBE, 2008: 1992-1995

(上接第 215 页)

所以相应地被 1 取代。因此可得二分网络计算环数目公式:

$$T_{\phi_s}^2 = N_{\phi_s}^2 = N * \phi_s * \sum_{d=s/2}^{d_{\max}} p(d) * \frac{(s/2)!}{2} * \binom{d}{s/2} C_4$$

$$(d)^{s/2-1} | \phi_s = 1/s \quad (10)$$

任一多分网络都是由三角形或四边形组成的,所以可知式(9)不仅可以在一分网络和二分网络中应用,还可以在多分网络中应用。

结束语 本文引申一阶聚类系数的概念,提出计算二阶聚类系数方法,即存在的四边形数目占最多可能四边形数目的分数。证明二阶聚类系数和一阶聚类系数对研究各种不同拓扑结构复杂网络起同等重要作用。二阶聚类系数使得在没有三角形的二分网络中计算二分网络社团变成可能。任一环都是由三角形和四边形基构成,因此一分网络可用一阶聚类系数计算一分网络中的聚类系数,类似可用扩展聚类系数计算二分网络图中的社团性质,进而可以用一阶和二阶聚类系数计算多分网络结构中的社团性质。

在一分网络中估计某尺度环数目时,环尺度存在上限 $s < d_{\max} + 1$, $d_{\max}$ 表示网络中最大结点数。本文提出一更通用的表达式,此表达式不仅增加了估计某尺度环数目时漏掉的类型数目,并且也适合于二分网络,同时可使估计环尺度最大值增加到 $2d_{\max}$ 。为验证这些结论,应该把该计算应用于大型网络,这将在以后文章中详细研究的问题。

参 考 文 献

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442
- [2] McGraw P N, Menzinger M. Clustering and the Synchronization of Oscillator Networks[Z]. cond-mat/0501663, 2005
- [3] Holme P, Edling C R, Liljeros F. Structure and Time-evolution of an Internet Dating Community[J]. Social Networks, 2004, 26 (155)
- [4] Caldarelli G, Pastor-Satorras R, Vespignani A. Structure of cycles and local ordering in complex networks[Z]. Eur. Phys. J. 2004, B 38: 183-186
- [5] Marinari E, Monasson R J. Circuits in random graphs: from local trees to global loops[J]. Stat. Mech. , 2004
- [6] Bianconi G, Capocci A. Number of loops of size h in growing scale-free networks[J]. Phys. Rev. Lett. , 2003, 90: 078701
- [7] Bianconi G, Caldarelli G, Capocci A. Loop structure of the Internet at the Autonomous System Level[Z]. cond-mat/0408349, 2004
- [8] Herrero C P. Self-avoiding walks on scale-free networks [J]. Phys. Rev. , 2005, E 71: 016103
- [9] Yang S J. Exploring complex networks by walking on them[J]. Phys. Rev. , 2005, E 71: 016107
- [10] Bianconi G, Marsili M. Loops of any size and Hamilton cycles in random scale-free networks[Z]. cond-mat/0502552, 2005
- [11] V'azquez A, Oliveira J G, Barab'asi A-L. Modeling bursts and heavy tails in human dynamics [J]. Phys. Rev. , 2005, E 71: 025103(R)
- [12] Newman M E J, Watts D J. Scaling and percolation in the small-world network model[J]. Phys. Rev. , 1999, E 60: 7332-7342
- [13] Petermann T, de los Rios P. The role of clustering and gridlike ordering in epidemic spreading[Z]. cond-mat/0401434, 2004
- [14] Petermann T, de los Rios P. The role of clustering and gridlike ordering in epidemic spreading[Z] cond-mat/0401434, 2004