

# 自适应 CRBF 非线性滤波器及其改进学习算法

曾祥萍<sup>1</sup> 金炜东<sup>2</sup> 赵海全<sup>2</sup> 李天瑞<sup>1</sup>

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031)<sup>1</sup> (西南交通大学电气工程学院 成都 610031)<sup>2</sup>

**摘要** 传统的随机梯度算法由于采用基于二阶统计量的平方误差代价函数,因此含有的信息量较少,难以实现更高的精度。针对此问题,以基于高阶统计量的指数平方误差作为代价函数,结合基于两层 RBF 网络凸组合的非线性自适应滤波器,提出了最小指数平方误差自适应学习算法。非线性系统辨识和非线性信道均衡的实验仿真结果表明,该改进算法的收敛性能明显优于传统的随机梯度算法。

**关键词** 径向基函数神经网络,非线性自适应滤波器,随机梯度算法,非线性系统辨识,非线性系统均衡

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2014.07.055

## Adaptive CRBF Nonlinear Filter and its Improved Learning Algorithm

ZENG Xiang-ping<sup>1</sup> JIN Wei-dong<sup>2</sup> ZHAO Hai-quan<sup>2</sup> LI Tian-rui<sup>1</sup>

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)<sup>1</sup>

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The traditional stochastic gradient algorithm uses squared error cost function based on second order statistics. It is difficult to achieve higher precision because it contains less information. To solve the problem, a new minimum exponential squared error adaptive learning algorithm was put forward. It uses exponential squared error cost function based on high order statistics, and combines the nonlinear adaptive filter based on convex combination of two RBF networks. The simulation experimental results of nonlinear system identification and nonlinear channel equalization show that the convergence performance of the improved algorithm is superior to the traditional stochastic gradient algorithm.

**Keywords** Radial basis function neural network, Nonlinear adaptive filter, Stochastic gradient algorithm, Nonlinear system identification, Nonlinear channel equalization

基于高斯基函数的径向基函数(RBF)神经网络因为具有通用的逼近能力和简单的拓扑结构,已经广泛用于非线性自适应滤波器中<sup>[1,2]</sup>。为了训练基于 RBF 网络的非线性自适应滤波器,最近几十年,研究者提出的训练算法主要有以下几种:随机梯度(SG)算法<sup>[3]</sup>、正交最小二乘(OLS)算法<sup>[4]</sup>、资源分配网络扩展卡尔曼滤波器(RANEKF)<sup>[5]</sup>、生长剪枝(GAP)算法<sup>[6]</sup>等等。其中 SG 算法的应用最为广泛,因为它具有以下优点<sup>[7]</sup>:(1)该算法易于实现;(2)该算法是在线学习算法;(3)该算法同时可以自适应调整 RBF 网络所有的参数,这不仅可以产生很好的全局收敛结果,而且具有更好的鲁棒性。然而,SG 算法中的学习步长一般都是取固定的常数,它们的取值直接影响着自适应滤波器的收敛性能<sup>[3,8]</sup>。例如:学习步长越小,自适应过程的迭代越慢,更多的过去的的数据被该算法所记忆,因此滤波精度越高;反之,学习步长越大,迭代过程越快,滤波精度越低,稳态误差越高。因此,在选择学习步长值的时候,需要在收敛速度和稳态误差之间取得平衡,但这往往非常困难。

为了解决上述自适应 RBF 滤波器的 SG 算法中遇到的

折中问题,结合凸组合策略能够提高自适应滤波器整体性能的观点<sup>[9,10]</sup>,我们已在文献[11]提出了一种新型的基于两层 RBF 网络凸组合(CRBF)的非线性自适应滤波器结构,并给出其学习算法。这种方法是将两个不同步长的 RBF 网络通过凸组合的方式组合起来,并通过混合参数的自适应调整,保留了凸组合结构中快速 RBF 网络迅速收敛及慢速 RBF 网络稳态误差低的优点,从而使得这种基于两层 RBF 网络凸组合的非线性自适应滤波器的整体性能得到了一定程度的提高。这种方法虽然加快了整个网络的收敛速度,并在一定程度上降低了稳态误差,但是由于采用误差的平方作为代价函数,因此精度还是相对低。为了进一步提高整个滤波器的精度,降低稳态误差,本文在文献[11]提出的学习算法的基础上进行改进,提出了基于两层 RBF 网络凸组合非线性自适应滤波器改进的学习算法。

## 1 基于两层 RBF 网络凸组合(CRBF)的非线性自适应滤波器

CRBF 非线性自适应滤波器的结构如图 1 所示<sup>[11]</sup>,该网

到稿日期:2013-09-29 返修日期:2013-10-29 本文受国家自然科学基金项目(61271340,61134002),四川省青年科技基金(2012JQ0046),中央高校基本科研业务费专项资金(SWJTU12CX026)资助。

曾祥萍(1974-),女,博士生,主要研究方向为智能信息处理,E-mail:zxp163@163.com;金炜东(1959-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为智能信息处理;赵海全(1974-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为非线性信号处理;李天瑞(1969-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为数据挖掘与知识发现、粗糙集与粒计算等。

络结构由两层组成,第一层为非线性滤波单元,由两个不同步长值的 RBF 网络(大步长的 RBF1 和小步长的 RBF2)组成,两个 RBF 网络独立地通过自适应算法调整各自的网络参数;第二层为凸组合结构单元,为两个独立的 RBF 网络的凸组合,通过自适应算法对混合参数  $\lambda(n)$  进行调整,从而使整个 CRBF 的误差达到最小。

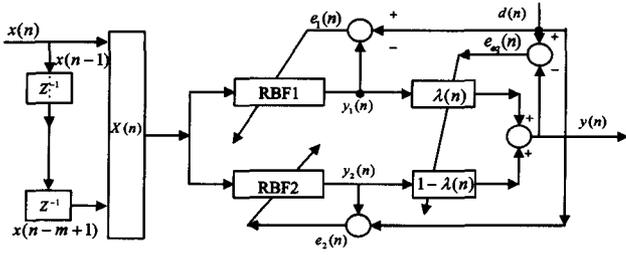


图1 CRBF非线性自适应滤波器结构

在图1中,  $x(n)$  为源输入信号,  $Z^{-1}$  为单位延迟因子, 则输入向量  $X(n)$  定义如下:

$$X(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-m+1)]^T \quad (1)$$

其中,  $m$  为记忆长度。

$y_1(n)$  和  $y_2(n)$  分别为 RBF1 网络与 RBF2 网络的实际输出, 并假设两个 RBF 网络的隐节点数均为  $k$ , 则对于网络 RBF $i$  ( $i=1, 2$ ), 输出  $y_i(n)$  可以表示为:

$$y_i(n) = \sum_{l=1}^k w_{i,l}(n) h_{i,l}(n) = W_i^T(n) H_i(n) \quad (2)$$

上式中权系数向量  $W_i(n)$  和向量  $H_i(n)$  分别定义如下:

$$W_i(n) = [w_{i,1}(n), w_{i,2}(n), \dots, w_{i,k}(n)]^T \quad (3)$$

$$H_i(n) = [h_{i,1}(n), h_{i,2}(n), \dots, h_{i,k}(n)]^T \quad (4)$$

其中,  $h_{i,l}(n)$  表示网络 RBF $i$  的第  $l$  个隐藏神经元对输入  $X(n)$  的响应:

$$h_{i,l}(n) = \exp\left(-\frac{\|X(n) - C_{i,l}(n)\|^2}{2\sigma_{i,l}^2(n)}\right), l=1, 2, \dots, k \quad (5)$$

式中,  $\sigma_{i,l}(n)$  为网络 RBF $i$  的第  $l$  个隐藏神经元的扩展常数,  $C_{i,l}(n)$  为网络 RBF $i$  的第  $l$  个隐藏神经元的中心, 且

$$C_{i,l}(n) = [c_{i,l,1}(n), c_{i,l,2}(n), \dots, c_{i,l,m}(n)]^T \quad (6)$$

图1中第二层凸组合的输出  $y(n)$  为整个组合网络的输出, 实际上是  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$  与混合参数  $\lambda(n)$  的线性映射, 定义如下:

$$y(n) = \lambda(n)y_1(n) + (1-\lambda(n))y_2(n) \quad (7)$$

该凸组合策略的优点是两个 RBF 网络的优点都通过凸组合中的混合参数的方式得以保留, 也就是说, 大步长的自适应 RBF 滤波器使得整个网络快速收敛, 而小步长的自适应 RBF 滤波器使得稳态误差减小。

## 2 基于 CRBF 自适应滤波器的改进的学习算法

基于 CRBF 自适应滤波器的网络参数和混合参数的训练都是通过 SG 自适应学习算法来完成的<sup>[11]</sup>。该算法虽然可以通过大步长的 RBF1 网络来提高收敛速度, 并通过小步长的 RBF2 网络来降低稳态误差, 但是从某种程度上来说, 滤波精度还是比较低。为了进一步提高小步长的 RBF2 网络的滤波精度, 降低其稳态误差, 本文提出了一种基于 CRBF 自适应滤波器的改进的学习算法, 该算法由以下 3 个部分组成。

### 2.1 大步长 RBF1 网络参数的训练

为了提高收敛速度, 仍然采用 SG 自适应算法规则来训

练大步长 RBF1 网络的各个参数。

设  $e_1(n)$  为 RBF1 网络实际输出与期望输出之间的误差, 定义为:

$$e_1(n) = d(n) - y_1(n) \quad (8)$$

则 RBF1 网络的代价函数  $J_1(n)$  为:

$$J_1(n) = e_1^2(n) \quad (9)$$

根据 SG 自适应算法规则, 得到 RBF1 的网络参数  $W_1(n), \sigma_{1,l}(n), c_{1,l,j}(n)$  ( $j=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, k$ ) 的递推更新公式:

$$W_1(n+1) = W_1(n) + u_1 e_1(n) H_1(n) + \eta_1 (W_1(n) - W_1(n-1)) \quad (10)$$

$$c_{1,l,j}(n+1) = c_{1,l,j}(n) + u_2 e_1(n) W_1(n) h_{1,l}(n) \frac{x(n-j+1) - c_{1,l,j}(n)}{\sigma_{1,l}^2(n)} + \eta_2 (c_{1,l,j}(n) - c_{1,l,j}(n-1)) \quad (11)$$

$$\sigma_{1,l}(n+1) = \sigma_{1,l}(n) + u_3 e_1(n) W_1(n) h_{1,l}(n) \frac{\|X(n) - C_{1,l}(n)\|^2}{\sigma_{1,l}^3(n)} + \eta_3 (\sigma_{1,l}(n) - \sigma_{1,l}(n-1)) \quad (12)$$

其中,  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 为学习步长, 且取较大的值;  $\eta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 为动量因子。

### 2.2 小步长 RBF2 网络参数的训练

RBF2 网络主要用于提高整个滤波器的滤波精度, 降低稳态误差。作为二阶统计量的平方误差代价函数, 因含有的信息较少而难以达到更高的精度。与二阶统计量相比, 高阶统计量可以提供更加丰富的信息, 在 RBF2 网络参数的训练算法中本文采用如下的指数平方误差代价函数来替代平方误差代价函数<sup>[12]</sup>:

$$J_2(n) = \exp[e_2^2(n)] \quad (13)$$

式中,  $e_2(n)$  是 RBF2 网络的实际输出与期望输出之间的误差, 定义为:

$$e_2(n) = d(n) - y_2(n) \quad (14)$$

将式(13)按麦克劳林级数(Maclaurin series)展开, 可得

$$J_2(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} e^{2i}(n) \quad (15)$$

由此可见, 该指数误差代价函数包含了所有误差函数的偶数次幂, 因而含有更多的信息, 用此代价函数训练出来的网络具有更高的精度和更小的稳态误差; 同时其误差曲面比平方误差代价函数的误差曲面更为陡峭, 因而具有更快的收敛速度。

根据随机梯度规则, 可以得到 RBF2 的网络参数  $W_2(n), \sigma_{2,l}(n), c_{2,l,j}(n)$  ( $j=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, k$ ) 的递推公式:

$$W_2(n+1) = W_2(n) + u_4 e_2(n) \exp[e_2^2(n)] H_2(n) + \eta_4 (W_2(n) - W_2(n-1)) \quad (16)$$

$$c_{2,l,j}(n+1) = c_{2,l,j}(n) + \eta_5 (c_{2,l,j}(n) - c_{2,l,j}(n-1)) + u_5 e_2(n) \exp[e_2^2(n)] W_2(n) h_{2,l}(n) \frac{x(n-j+1) - c_{2,l,j}(n)}{\sigma_{2,l}^2(n)} \quad (17)$$

$$\sigma_{2,l}(n+1) = \sigma_{2,l}(n) + \eta_6 (\sigma_{2,l}(n) - \sigma_{2,l}(n-1)) + u_6 e_2(n) \exp[e_2^2(n)] W_2(n) h_{2,l}(n) \frac{\|X(n) - C_{2,l}(n)\|^2}{\sigma_{2,l}^3(n)} \quad (18)$$

其中,  $u_i$  ( $i=4, 5, 6$ ) 为学习步长, 且取较小的值;  $\eta_i$  ( $i=4, 5, 6$ )

为动量因子。

### 2.3 混合参数的自适应调整

整个 CRBF 滤波器的输出  $y(n)$  由 RBF1 和 RBF2 网络输出的凸组合的形式来计算, 见式(7), 式中的  $\lambda(n)$  是一个混合标量参数, 范围在区间  $[0, 1]$  内。为了确保混合参数  $\lambda(n)$  在此范围内, 通过一个 Sigmoid 函数来计算:

$$\lambda(n) = \frac{1}{1 + \exp(-a(n))} \quad (19)$$

定义整个网络的总误差  $e_{eq}(n)$  为总的期望响应  $d(n)$  和输出  $y(n)$  之间的差值:

$$e_{eq}(n) = d(n) - y(n) \quad (20)$$

则其代价函数  $J(n)$  为:

$$J(n) = \frac{1}{2} e_{eq}^2(n) \quad (21)$$

采用随机梯度算法, 使得整个网络的代价函数最小来调整凸组合中的混合参数, 从而可得  $a(n)$  的更新公式如下:

$$a(n+1) = a(n) + u_a e_{eq}(n) [y_1(n) - y_2(n)] \lambda(n) [1 - \lambda(n)] \quad (22)$$

其中,  $u_a$  为学习步长。

### 3 仿真实验

为了验证本文提出的基于 CRBF 非线性自适应滤波器的改进学习算法的有效性, 将其应用于下列非线性系统辨识和非线性信道均衡的实例中, 并在 Matlab 平台上进行了仿真实验。

#### 3.1 非线性系统辨识中的应用

图 2 给出了基于 CRBF 滤波器的非线性系统辨识原理结构, 其中  $x(n)$  为输入信号,  $y(n)$  为未知非线性系统的输出信号,  $\hat{y}(n)$  为 CRBF 自适应滤波器的输出信号,  $e(n)$  为两者的误差信号。在仿真中采用如下未知非线性系统:

$$y(n+1) = 0.3y(n) + 0.6y(n-1) + g[u(n)] \quad (23)$$

其中的非线性函数  $g$  由下式给出:

$$g(u(n)) = 0.6\sin(\pi u(n)) + 0.3\sin(3\pi u(n)) + 0.1\sin(5\pi u(n)) \quad (24)$$

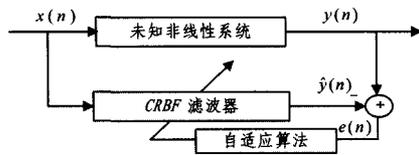


图 2 非线性系统辨识结构图

实验中, 分别用本文提出的改进学习算法的 CRBF 滤波器 (CRBF-EE)、文献 [11] 提出的学习算法的 CRBF 滤波器 (CRBF) 以及传统的 RBF 滤波器 (RBF) 来逼近以上非线性函数。表 1 列出了上述 3 种滤波器参数的所有取值。

表 1 3 种滤波器参数的汇总

参数	CRBF-EE	CRBF	RBF
	$u_1 = 0.5$	$u_1 = 0.5$	
	$u_2 = 0.05$	$u_2 = 0.1$	$u_1 = 0.15$
学习步长	$u_3 = 0.5$	$u_3 = 0.5$	$u_2 = 0.15$
	$u_4 = 0.1$	$u_4 = 0.1$	$u_3 = 0.15$
	$u_a = 200$	$u_a = 200$	
输入数	2	2	2
隐节点数	4	4	4

从图 3 给出的基于本文提出的改进算法的 CRBF-EE 滤

波器的非线性系统辨识来看, 其结果还是比较令人满意的; 图 4 给出了 3 种滤波器的均方误差 (MSE) 性能的比较结果。从图中可以看出, CRBF-EE 滤波器的估计误差要小于 CRBF 滤波器和传统 RBF 滤波器, 而 CRBF-EE 滤波器的收敛速度明显快于其它两个滤波器。收敛后, CRBF-EE、CRBF 和 RBF 滤波器的归一化均方误差 (NMSE) 如表 2 所列, 这些数据说明, CRBF-EE 滤波器的辨识精度明显优于 CRBF 滤波器和传统 RBF 滤波器。

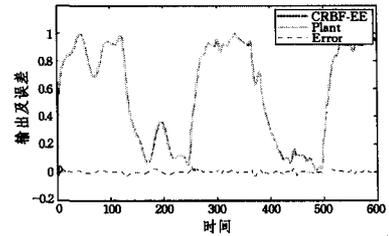


图 3 CRBF-EE 系统辨识结果

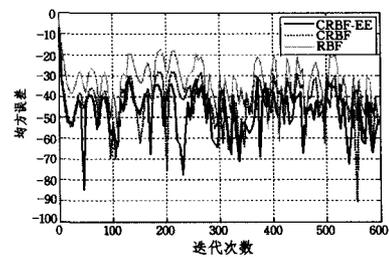


图 4 3 种滤波器的系统辨识误差比较

表 2 3 种滤波器的 NMSE

预测模型	NMSE (dB)
CRBF-EE	-22.0216
CRBF	-19.0216
RBF	-14.1377

#### 3.2 非线性信道均衡中的应用

基于 CRBF 的非线性信道均衡的原理如图 5 所示。图中  $x(n)$  为源信号,  $u(n)$  为噪声信号 (一般为高斯白噪声),  $r(n)$  为加到 CRBF 均衡器中的信号,  $y(n)$  为其输出信号,  $d(n)$  为源信号  $x(n)$  经过延迟后的信号,  $e(n)$  为两者的误差信号。而发射滤波器、传输介质及其它组成部分的联合影响都包含在“非线性信道”中。“NL”模块表示信道中信号的非线性失真。可见, 加到 CRBF 均衡器中的信号  $r(n)$  包含了非线性信道本身和外部噪声的综合影响, 我们的目的就是调整自适应滤波器的参数, 使得其输出信号与源信号的延迟一致, 从而消除非线性信道本身及外部噪声的影响。

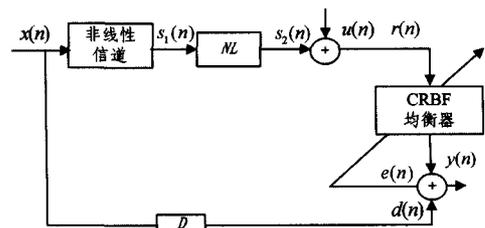


图 5 带有 CRBF 均衡器的数字传输系统

通过文献 [8, 13] 所提出的方法, 对“非线性信道”的影响建模如下:

$$s_1(n) = x(n) + 0.5x(n-1) \quad (25)$$

式中, 输入序列信号  $x(n)$  是形式为  $\{+1, -1\}$  的二进制脉冲

调幅(PAM)信号,并且每个信号都从均匀分布中获得。

“NL”非线性失真模块可以建模如下:

$$s_2(n) = s_1(n) - 0.9s_1^3(n) \quad (26)$$

同时,信道中  $s_2(n)$  的输出被噪声  $u(n)$  污染了,建模的时候通常添加均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。这样,接收端接收到的信号就是这个被噪声污染了的信号  $r(n) = s_2(n) + u(n)$ ,这里“D”是跟物理信道相关的传输延迟,则期望信号  $d(n)$  定义为:  $d(n) = x(n-D)$ 。

图 6 给出了实验中 CRBF、RBF1 及 RBF2 3 种不同的均衡器的收敛性能,包括收敛速度和稳态均方误差 MSE。每次运行都采用不同的二进制相移键控(BPSK)随机序列并且信道也采用随机的初始化参数,SNR 设为 20dB,学习步长等参数的设定见表 3。从图中可以明显看出,传统的 RBF 均衡器需要通过步长值的选择,在加快收敛速度和降低稳态均方误差(MSE)之间进行权衡,然而 CRBF 均衡器同时展现了快速收敛和低的稳态均方误差(MSE)的优点,由于采用了基于 RBF 网络的凸组合策略,这个结果是情理之中的。

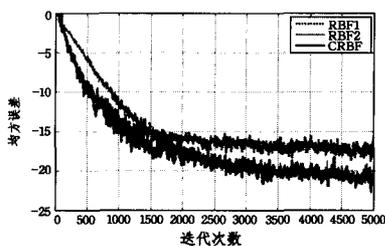


图 6 CRBF、RBF1、RBF2 均衡器性能比较

表 3 非线性均衡器参数的汇总

参数	CRBF-EE	CRBF	RBF1	RBF2
学习步长	$u_1 = 0.4$	$u_1 = 0.4$		
	$u_2 = 0.015$	$u_2 = 0.02$		
	$u_3 = 0.2$	$u_3 = 0.2$	$u_1 = 0.4$	$u_1 = 0.02$
	$u_4 = 0.04$	$u_4 = 0.04$	$u_2 = 0.2$	$u_2 = 0.04$
	$u_5 = 0.2$	$u_5 = 0.2$	$u_3 = 0.2$	$u_3 = 0.04$
	$u_6 = 0.04$	$u_6 = 0.04$		
	$u_a = 50$	$u_a = 50$		
输入数	2	2	2	2
隐节点数	30	30	30	30

图 7 给出了 CRBF-EE 和 CRBF 均衡器的收敛性能和稳态均方误差的比较。从图中可以看出,CRBF-EE 均衡器无论是收敛速度还是稳态误差方面的性能都要优于 CRBF 均衡器。

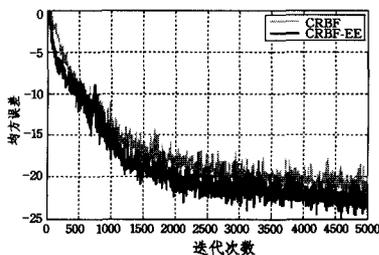


图 7 CRBF-EE 和 CRBF 均衡器性能比较

综合上面两个例子可见,CRBF-EE 滤波器无论是在收敛速度还是辨识精度方面,其性能都要优于 CRBF 滤波器和传

统 RBF 滤波器。

**结束语** 本文基于两层 RBF 凸组合的非线性自适应滤波结构,提出了一种基于最小指数平方误差的学习算法。该算法将原 CRBF 网络学习算法中小步长的 RBF 网络的误差代价函数替换为具有高阶统计量的指数平方误差代价函数,并利用梯度下降准则来对该网络的参数进行自适应调整。计算机仿真结果证明了本文提出的算法在收敛速度和精度上都优于 RBF 滤波器以及采用传统的 SG 算法的 CRBF 滤波器。

## 参考文献

- [1] Park J, Sandberg I W. Universal approximation using radial-basis-function networks[J]. Neural Comput, 1991, 3(2): 246-257
- [2] Kassam S A, Cha I. Radial basis function networks in nonlinear signal processing applications[C]// Proceedings of the 11<sup>th</sup> Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 1993; 1021-1025
- [3] Chng E S, Chen S, Mulgrew B. Gradient radial basis function networks for nonlinear and nonstationary time series prediction [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1996, 7(1): 190-194
- [4] Chen S, Cowan C F N, Grant P M. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1991, 2(2): 302-309
- [5] Kadirkamanathan V, Niranjan M. A function estimation approach to sequential learning with neural networks[J]. Neural Comput, 1993, 5(6): 954-975
- [6] Huang G-B, Saratchandran P, Sundararajan N. An efficient sequential learning algorithm for growing and pruning RBF(GAP-RBF) networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2004, 34(6): 2284-2292
- [7] Zeng X, Zhao H, Jin W, et al. Identification of nonlinear dynamic systems using convex combinations of multiple adaptive radius basis function networks[J]. Measurement, 2013, 46(1): 628-638
- [8] Cha I, Kassam S A. Channel equalization using adaptive complex radial basis function networks[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1995, 13(1): 122-131
- [9] Andersson P. Adaptive forgetting in recursive identification through multiple models[J]. International Journal of Control, 1985, 42(5): 1175-1193
- [10] Niedzwiecki M. Multiple-model approach to finite memory adaptive filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(2): 470-473
- [11] Zeng X, Zhao H, Jin W. Adaptive Convex Combination of Two RBF Networks and its Application to Nonlinear System Identification[J]. Advanced Materials Research, 2012, 562: 1697-1701
- [12] Boukis C, Mandic D P, Constantinides A G. A class of stochastic gradient algorithms with exponentiated error cost functions[J]. Digital Signal Processing, 2009, 19(2): 201-212
- [13] Lee J, Beach C, Tepedelenioglu N. A practical radial basis function equalizer [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1999, 10(2): 450-455