多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中的知识遗忘

文习明[1,2]　方良达[2,3]　余　泉[2,4]　常　亮[2]　王　驹[2]

（广东行政学院信息技术教研部　广州 510053）[1]

（广西可信软件重点实验室(桂林电子科技大学)　广西 桂林 541004）[2]

（暨南大学计算机科学系　广州 510632）[3]　（黔南民族师范学院数学与统计学院　贵州 都匀 558000）[4]

摘　要　遗忘在知识表示与推理领域扮演着非常重要的角色。遗忘在多种逻辑语言中都有大量的研究，被广泛应用于诸多领域。模态逻辑适用于智能体的知识表示与推理。随着多智能体系统研究的发展，多智能体模态逻辑中的知识遗忘也开始被关注。现有研究表明，知识遗忘在不同的多智能体模态逻辑系统中具有不同的性质，且大多无法有效计算。为此，多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中的知识遗忘值得进一步研究。首先，基于模型理论给出知识遗忘的定义；接着，分析 $KD45_n$ 中知识遗忘的主要性质；最后，提出 $KD45_n$ 中计算知识遗忘的有效算法。该算法利用人工智能领域解决难求解问题的主要方法之一——知识编译技术，将一般公式编译成交替覆盖析取范式，再利用该范式进行知识遗忘的有效计算。研究结果表明，在 $KD45_n$ 中满足一些很重要的知识遗忘性质，其计算时间复杂度是交替覆盖析取范式公式长度的多项式时间(原公式长度的双重指数时间)。与现有的非初等时间复杂度算法相比，所提算法更高效、更实用。

关键词　多智能体模态逻辑，知识推理，知识编译，知识遗忘

中图法分类号　TP181　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2019.07.030

Knowledge Forgetting in Multi-agent Modal Logic System $KD45_n$

WEN Xi-ming[1,2]　FANG Liang-da[2,3]　YU Quan[2,4]　CHANG Liang[2]　WANG Ju[2]

(Department of Information Science, Guangdong Institute of Public Administration, Guangzhou 510053, China)[1]

(Guangxi Key Laboratory of Trusted Software (Guilin University of Electronic Technology), Guilin, Guangxi 541004, China)[2]

(Department of Computer Science, Jinan University, Guangzhou 510632, China)[3]

(School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun, Guizhou 558000, China)[4]

Abstract　Forgetting plays an important role in knowledge representation and reasoning. It has been extensively studied in many logics and been widely applied to various fields. Modal logic is suitable for representing and reasoning about the knowledge of agents. With the development of the research on multi-agent systems, the investigation on knowledge forgetting in multi-agent modal logics begins to attract attention. However, knowledge forgetting has different properties in different multi-agent modal logic systems, and it cannot be effectively computed in most cases. Therefore, it is necessary to make further investigation on the knowledge forgetting in the multi-agent modal logic system $KD45_n$. Firstly, the knowledge forgetting in the multi-agent modal logic was defined based on model theory. Then, the main properties of knowledge forgetting in $KD45_n$ were analyzed. Finally, an effective algorithm to compute knowledge forgetting in $KD45_n$ was provided. The computing algorithm adopts the idea of knowledge compilation which is an approach for addressing the intractability of a number of artificial intelligence problems. The alternating cover disjunctive formula is introduced. By compiling the general formula into alternating cover disjunctive formula, knowledge forgetting in $KD45_n$ can be effectively computed. The time complexity is double-exponential in the length of the original formula, but polynomial in the length of the compiled one. Compared with the current non-elementary one, the algorithm is more effective and more practical. The results of research show that knowledge forgetting in $KD45_n$ satisfies many important properties and can be effectively computed.

Keywords　Multi-agent modal logic, Reasoning about knowledge, Knowledge compilation, Knowledge forgetting

---

到稿日期：2018-07-09　返修日期：2018-10-25　本文受国家自然科学基金项目(61603152，61463044，61363030)，广西可信软件重点实验室研究课题(KX201604，KX201606，KX201419)，广西自然科学基金项目(2015GXNSFAA139285)资助。

文习明(1979－)，男，博士，讲师，主要研究方向为人工智能、知识表示与推理，E-mail：wenxim@mail2.sysu.edu.cn(通信作者)；**方良达**(1985－)，男，博士，讲师，CCF 会员，主要研究方向为人工智能、知识表示与推理；**余　泉**(1979－)，男，博士，教授，CCF 会员，主要研究方向为人工智能、知识表示与推理；**常　亮**(1980－)，男，博士，教授，CCF 会员，主要研究方向为知识表示与推理、形式化方法；**王　驹**(1950－)，男，博士，教授，主要研究方向为逻辑、泛代数、知识表示与推理、形式化方法。

1 引言

遗忘(forgetting)的思想最早可以追溯到1854年Boole提出的“消去(elimination)”[1]。其直观含义是:从当前理论中删除某些信息,得到一个比原理论更弱的新理论,但在保留下来的信息范围内,新理论和原理论能推导出一致的逻辑结论。

遗忘在知识表示与推理领域扮演着非常重要的角色。在命题逻辑、一阶谓词逻辑、模态逻辑、描述逻辑、回答集逻辑程序设计(Answer Set Programming,ASP)和情景演算(situation calculus)等逻辑语言中都有关于遗忘的研究。遗忘被广泛应用于最弱充分条件和最强必要条件的计算[2-3]、溯因推理[2]、相关性分析[4-6],知识和信念的推理[6-7]、冲突解决[8-11]、本体分析与重用[10-25]、本体信息隐藏[20,22-23]、逻辑差异判定[20,23,25]、知识库更新[26-31]等诸多领域。

关于遗忘的理论研究主要集中在两个方面:可定义性(definability)问题和遗忘结果的计算问题。前者主要研究当前理论用某种逻辑语言表示时,遗忘结果是否依然可以用该逻辑语言来表示(若遗忘结果依然可用原有逻辑语言来表示,则称遗忘在该逻辑语言中是可定义的);后者主要研究如何计算遗忘之后所得的新理论。

遗忘作为一个逻辑概念首次由Lin等于1994年在命题逻辑和一阶谓词逻辑中正式提出[4]。在文献[4]中,Lin等基于模型理论给出了命题逻辑中遗忘原子命题的定义,证明了其可定义性,并且给出了遗忘结果的计算方法。Lang等将命题逻辑的遗忘理论从遗忘原子命题扩展到遗忘命题文字(literal)[5]。方良达等[6]以及林作铨等[32]分别进一步将其扩展到遗忘命题公式。

在文献[4]中,Lin等还对一阶谓词逻辑中的遗忘进行了研究。研究结果表明:一阶谓词逻辑中的遗忘不具备可定义性,在一般情况下,从一阶谓词理论中遗忘一个谓词,其结果需要二阶谓词理论来表示。针对这一问题,一些学者利用量词消去(quantifier elimination)技术寻找遗忘可定义的片段[33]。此外,一些学者提出了受限的遗忘,其中Zhang等先后提出了弱遗忘[34]和有界遗忘[35]。

在描述逻辑中,遗忘问题通常与其对偶问题统一插值(uniform interpolation)一起被研究。描述逻辑中的遗忘被分为3个层次:概念层次的遗忘[12-15],即从概念定义中遗忘原子概念或角色;TBox层次的遗忘[10,14-22,25],即从TBox中遗忘原子概念或角色;知识库层次的遗忘[10,11,15,22-24],即从知识库(由TBox和ABox共同组成)中遗忘原子概念或角色。大部分研究集中在TBox层次的遗忘。既有在轻量级的描述逻辑DL-Lite[10-11,16,24-25]和EL[17-18]中对遗忘的研究,也有在强表达力的描述逻辑ALC[12-15,19-20,23]及其各种扩展语言[21-22]中对遗忘的研究。研究结果表明:在轻量级描述逻辑中,TBox层次的遗忘[16-18,25]和知识库层次的遗忘[24]都具有可定义性;在强表达力的描述逻辑中,ALC概念层次的遗忘具有可定义性[12-15];在ALC及其扩展语言中,无论是TBox层次的遗忘[14-15,19-22]还是知识库层次的遗忘[15,22-23]都不具有可定义性。在遗忘不可定义的情况下,一方面可以采用表达能力更强的描述逻辑语言来表示遗忘结果[21-23],另一方面一些近似计算遗忘结果的算法被提出来[14-15]。

近年来,一些学者对ASP中的遗忘理论展开了研究,定义了多种不同形式的遗忘[9,36-41],将其用于逻辑程序冲突的解决和更新[9,41]。王喆等还对存在量词规则(existential rules)中的遗忘进行了研究[42]。

模态逻辑适用于智能体的知识表示与推理,根据对知识的不同理解和要求,提出了不同的公理系统,其中较常用的正规模态逻辑系统有K,T,$KD45$,$S4$和$S5$等[43]。模态逻辑中区分客观事实与主观知识,模态逻辑中的遗忘又被称为知识遗忘[28]。相比较而言,知识遗忘比命题逻辑中的遗忘要复杂得多,因为命题逻辑只要处理客观世界中的遗忘问题即可,而模态逻辑要同时处理多个可能世界中的遗忘问题[44]。而且在不同的公理系统中,知识遗忘还表现出不同的特性。已有研究成果表明,在K[45-46],T[46],$KD45$[31]和$S5$[28,47]中,知识遗忘是可定义的,但在$S4$中是不可定义的[48]。

随着多智能体系统研究的兴起,多智能体模态逻辑中的知识遗忘开始被关注。由于高阶知识(关于智能体知识的知识)的引入,多智能体模态逻辑中的知识遗忘变得更加复杂。方良达等将知识遗忘的定义扩展到多智能体模态逻辑,并证明了知识遗忘在K_n,T_n,$KD45_n$和$S5_n$中是可定义的,在$S4_n$中是不可定义的[49]。同时,Cate等在描述逻辑ALC中证明了统一插值的可定义性[12],鉴于ALC与模态逻辑的对应关系[50]以及统一插值与知识遗忘的对偶关系[19],实质上他们也给出了K_n中知识遗忘可定义的结论。

文献[49]证明了一些常用正规模态逻辑系统中知识遗忘的可定义性,但采用了一种不太常用的语义模型——多点克里普克模型,而且其知识遗忘计算效率(非初等时间复杂度)非常低,这严重影响了知识遗忘的实际应用。文献[12]给出了K_n系统中知识遗忘计算的指数时间复杂度算法,但该算法在其他多智能体模态逻辑系统中并不适用。因此,探索在各种不同的多智能体模态逻辑系统中,知识遗忘的有效计算方法非常必要。

多智能体模态逻辑系统$KD45_n$被广泛用于多智能体知识和信念的表示与推理[51],因此本文选择在$KD45_n$中研究多智能体的知识遗忘。本文的主要思路是首先利用$KD45_n$公理系统的特殊性,对公式进行知识编译,将其转换成一种特定的析取范式公式,然后利用知识遗忘的性质,提出一种在$KD45_n$中计算知识遗忘的有效算法,最后证明该算法的正确性,并分析其时间复杂度。

本文重点探讨多智能体模态逻辑$KD45_n$中知识遗忘的计算问题。本文第2节介绍相关研究的基础知识;第3节分析$KD45_n$中知识遗忘的重要性质;第4节提出在$KD45_n$中面向知识遗忘的知识编译策略;第5节提出$KD45_n$中知识遗忘的计算方法,证明其正确性并分析其时间复杂度;最后,总结全文并指出进一步的研究方向。

2　基础知识

本节介绍与本文研究相关的基础知识和符号记法。

2.1　多智能体模态逻辑

模态逻辑适用于智能体的知识表示与推理，我们参考文献[43]定义多智能体模态逻辑的语法和语义。

我们用 $\mathscr{P}$ 表示原子命题集，用 $\mathscr{A}$ 表示智能体集合。当智能体个数为 n 时，通常用 $i,j\in[1,n]$ 来指代不同的智能体。

定义 1[43]　多智能体模态逻辑语言 $\mathscr{L}$ 可递归定义如下：

$\phi::=\bot|p|\neg\phi|\phi\wedge\varphi|K_i\phi$

其中，$\bot$ 表示逻辑“假”，$p\in\mathscr{P}$，$i\in\mathscr{A}$。逻辑“真”($\top$)、“析取”($\vee$)和“蕴涵”($\supset$)与命题逻辑中的定义相同。

由定义可知，多智能体模态逻辑是在命题逻辑的基础上引入多个模态算子 $K_i(i\in\mathscr{A})$ 扩充而来。此外，还有一类与 K_i 对偶的模态算子 L_i，其定义为：$L_i\phi\doteq\neg(K_i\neg\phi)$。$K_i\phi$ 表示“智能体 i 知道 ϕ”，$L_i\phi$ 表示“智能体 i 认为 ϕ 有可能”。

多智能体模态逻辑语言 $\mathscr{L}$ 中的元素被称为公式。不包含模态算子的公式被称为客观公式。所有客观公式的集合即为命题逻辑语言，记为 $\mathscr{L}^p$。我们用 $var(\phi)$ 表示公式 ϕ 中出现的原子命题的集合，用 $sub(\phi)$ 表示公式 ϕ 所有子公式的集合。

通常用公式长度或深度来刻画一个模态逻辑公式的复杂程度，它们的定义分别如下。

定义 2[43]　模态逻辑语言 $\mathscr{L}$ 中，公式 ϕ 的长度为符号集 $\mathscr{P}\cup\{\neg,\wedge,(,),K_1,\cdots,K_n\}$ 中符号在 ϕ 中出现的次数，记为 $|\phi|$。

在计算公式长度时，不必要的括号不考虑在内。显然，$|\mathrm{sub}(\phi)|\leqslant|\phi|$，任意公式不同子公式的个数不超过其长度[43]。

定义 3[43]　模态逻辑语言 $\mathscr{L}$ 中，公式 ϕ 的深度 $d(\phi)$ 为公式中模态算子的嵌套层数，其可递归定义如下：

$d(p)=0$，

$d(\neg\phi)=d(\phi)$，

$d(\phi\wedge\varphi)=\max(d(\phi),d(\varphi_0))$，

$d(K_i\phi)=d(\phi)+1,i\in\mathscr{A}$。

本文采用克里普克(Kripke)的可能世界语义[52]。

定义 4[43]　n 个智能体的克里普克结构是一个多元组 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$，其中，W 是一个非空的可能世界集合；$V:W\rightarrow 2^{\mathscr{P}}$ 是一个赋值函数，指定在每个可能世界中哪些原子命题成立；$R_i\subseteq W\times W$ 是 W 上的二元关系。

$(w_1,w_2)\in R_i$ 表明：智能体 i 处于世界 w_1 时，认为可能处于世界 w_2。若用有向图来表示克里普克结构，则$(w_1,w_2)\in R_i$ 表示一条从节点 w_1 到节点 w_2，并被标记为 i 的边，因此 R_i 常被称为可达关系。通常用 $R=\bigcup_{i=1}^{n}R_i$ 来简称所有智能体可达关系的并集，用 R^* 表示 R 的自反传递闭包。令 $R_i(w)=\{w'|(w,w')\in R_i\}$ 表示在世界 w 时，智能体 i 认为其可能所处世界的集合。类似地，$R^*(w)$ 表示从 w 出发，所有可达世界的集合。

定义 5[43]　n 个智能体的克里普克模型是一个二元组 (M,w)，其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$ 是克里普克结构，$w\in W$ 是可能世界之一，被称为当前世界。

多智能体模态逻辑的语义通过克里普克模型与多智能体模态逻辑公式之间的满足关系给出。

定义 6[43]　克里普克模型 (M,w) 满足公式 $\phi\in\mathscr{L}$，记为 $(M,w)\models\phi$，可递归定义如下：

$(M,w)\models p$，当且仅当，$p\in V(w)$；

$(M,w)\models\neg\phi$，当且仅当，$(M,w)\not\models\phi$；

$(M,w)\models\phi\wedge\varphi$，当且仅当，$(M,w)\models\phi$ 且 $(M,w)\models\varphi$；

$(M,w)\models K_i\phi$，当且仅当，对于任意 $w'\in W$，如果 $(w,w')\in R_i$，则 $(M,w')\models\phi$。

由此可知，智能体 i 知道 $\phi(K_i\phi)$，当且仅当在当前世界下，它认为所有可能的世界中 ϕ 都成立；智能体 i 认为 ϕ 可能成立 $(L_i\phi)$，当且仅当在当前世界下，存在一个它认为可能的世界 ϕ 成立。

$\phi\models\varphi$ 表示公式 φ 的所有模型都满足公式 φ，$\phi\equiv\varphi$ 表示 $\phi\models\varphi$ 且 $\varphi\models\phi$。

正规多智能体模态逻辑系统都必须满足如下公理和推理规则：

A1：所有命题逻辑中的公理。

A2：$K_i\phi\wedge K_i(\phi\supset\varphi)\supset K_i\varphi,i=1,\cdots,n$。

R1：由 $\vdash\alpha$ 和 $\vdash\alpha\supset\beta$，可推导出 $\vdash\beta$。

R2：由 $\vdash\alpha$，可推导出 $\vdash K_i\alpha,i=1,\cdots,n$。

仅满足上述公理和推理规则的公理系统被称为 K_n 系统，其是最小的正规多智能体模态逻辑公理系统。在此基础上，根据对知识性质的不同要求，扩展出各种不同的公理系统，如 T_n，$KD45_n$，$S4_n$ 和 $S5_n$ 等[43]。本文重点关注 $KD45_n$ 公理系统，在 $KD45_n$ 中除了要满足上述公理和推理规则之外，还要满足如下公理：

A4：$K_i\phi\supset K_iK_i\phi,i=1,\cdots,n$。

A5：$\neg K_i\phi\supset K_i\neg K_i\phi,i=1,\cdots,n$。

A6：$\neg K_i\bot,i=1,\cdots,n$。

A4 公理被称为“正自省公理”，其含义为“知道什么，就知道知道什么”；A5 公理，被称为“负自省公理”，其含义为“不知道什么，就知道不知道什么”；A6 公理，也称为“D 公理”，其含义为“不知道不一致的事实”。它们分别可以通过约束克里普克结构中可达关系 R_i 满足传递性、欧几里得性(Euclidean)和连续性(serial)来实现[43]。R_i 满足传递性，即要求任意的 w，w'，$w''\in W$，若 $(w,w')\in R_i$ 且 $(w',w'')\in R_i$，则有 $(w,w'')\in R_i$；R_i 满足欧几里得性，即要求任意的 $w,w',w''\in W$，若 $(w,w')\in R_i$ 且 $(w,w'')\in R_i$，则 $(w',w'')\in R_i$；R_i 满足连续性，即要求对于任意的 $w\in W$，都存在 $w'\in W$ 满足 $(w,w')\in R_i$，因此连续性也称为“右无限延展性”。

本文中在未加说明的情况下，克里普克模型均指可达关系满足传递性、欧几里得性和连续性的模型，简称 $KD45_n$ 模型。$\phi\models_{KD45_n}\varphi$ 表示 ϕ 的所有 $KD45_n$ 模型都满足 φ，简写为 $\phi\models\varphi$。

2.2　Σ-互模拟

在模态逻辑的研究中，互模拟(bisimulation)是一个非常

重要的概念[53]，模态逻辑中关于知识遗忘的定义大都基于互模拟的扩展——Σ-互模拟来定义。我们参考文献[49]定义多智能体模态逻辑中的 Σ-互模拟。

定义 7[49] 给定多智能体克里普克模型(M,w)和(M',w')，$M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$，$M'=(W',V',R_1',\cdots,R_n')$，原子命题集 $\Sigma\subseteq\mathscr{P}$。$(M,w)$和$(M',w')$之间 Σ-互模拟，记为$(M,w)\leftrightarrow_{\Sigma}(M',w')$，当存在二元关系 $\rho\subseteq W\times W'$，$(w,w')\in\rho$，且任意$(v,v')\in\rho$ 满足如下条件：

（原子条件）$V(v)\simeq_{\Sigma}V'(v')$，表示可能世界 v 和 v' 中除了 Σ 中的命题之外，其他命题的赋值一致。

（前向条件）对于任意 $u\in W$ 和 $i\in\mathscr{A}$，如果$(v,u)\in R_i$，则存在 $u'\in W'$满足$(v',u')\in R_i'$且$(u,u')\in\rho$。

（反向条件）对于任意 $u'\in W'$和 $i\in\mathscr{A}$，如果$(v',u')\in R_i'$，则存在 $u\in W$ 满足$(v,u)\in R_i$ 且$(u,u')\in\rho$。

$(M,w)\leftrightarrow_{\Sigma}(M',w')$，即模型$(M,w)$和$(M',w')$在除了在 Σ 中的命题之外的命题上相互模拟。当 $\Sigma=\emptyset$ 时，Σ-互模拟实质上就是互模拟，简写成$(M,w)\leftrightarrow(M',w')$。显然，$\Sigma$-互模拟关系是一个等价关系。$\Sigma$-互模拟具有如下重要特性。

命题 1[49] 如果$(M,w)\leftrightarrow_{\Sigma}(M',w')$，给定公式 $\phi\in\mathscr{L}$，$var(\phi)\cap\Sigma=\emptyset$，则$(M,w)\vDash\phi$，当且仅当$(M',w')\vDash\phi$。

命题 1 表明，如果两个克里普克模型之间 Σ-互模拟，则它们满足相同的不包含 Σ 中原子命题的公式。这一性质对知识遗忘的研究非常重要。

2.3 变量遗忘

Lin 等基于模型理论定义了命题逻辑中的变量遗忘[4]。模态逻辑中的知识遗忘在此基础上发展起来，因此有必要介绍一下变量遗忘。

定义 8[4] 给定命题逻辑的公式 $\phi\in\mathscr{L}^p$ 和原子命题 $p\in\mathscr{P}$，公式 ϕ'是公式 ϕ 遗忘 p 的结果，记为 $\phi'\equiv Forget(\phi,p)$，如果对于任意命题逻辑模型 M，$M\vDash\phi'$当且仅当存在模型 $M'\vDash\phi$ 且 $M'\simeq_{\{p\}}M$。

$M'\simeq_{\{p\}}M$ 表示 M'和 M 在 $\mathscr{P}\backslash\{p\}$ 上的真值指派一致。

命题 2[4] 在命题逻辑中，若 $\phi'\equiv Forget(\phi,p)$，则 $\phi'\equiv\phi(p/\top)\vee\phi(p/\bot)$。其中，$\phi(p/\top)$和 $\phi(p/\bot)$分别表示将公式 ϕ 中的命题 p 用$\top$和$\bot$统一替换之后的结果。

3 多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中的知识遗忘

在文献[28]中，Zhang 等定义了单智能体模态逻辑系统 $S5$ 中的知识遗忘，我们将知识遗忘的定义扩展到多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中。

定义 9 给定多智能体模态逻辑公式 $\phi\in\mathscr{L}$ 和原子命题 $p\in\mathscr{P}$，公式 ϕ'是公式 ϕ 遗忘 p 的结果，记为 $\phi'\equiv_{KD45_n}KForget(\phi,p)$，如果对于任意的 $KD45_n$ 模型(M,w)，$(M,w)\vDash_{KD45_n}\phi'$当且仅当存在 $KD45_n$ 模型(M',w')满足$(M',w')\vDash_{KD45_n}\phi$ 且$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。

为简单起见，我们定义的是遗忘一个原子命题 $p\in\mathscr{P}$。在文献[28]中，定义的是遗忘一个原子命题集合 $\Sigma\subseteq\mathscr{P}$。易证，遗忘一个原子命题集合可以通过依次遗忘该集合中的原子命题来实现，且与遗忘的次序无关。在文献[49]中，方良达等也定义了多智能体模态逻辑中的知识遗忘，但在定义中要求 $var(\phi')\subseteq var(\phi)\backslash\{p\}$。我们的定义放弃了这一限制条件，后面会证明这本是知识遗忘的性质之一。

由定义 9 可知，多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中的知识遗忘具有以下重要的性质。

命题 3[28] 若 $\phi\in\mathscr{L}^p$，即 ϕ 是客观公式，$p\in\mathscr{P}$，则：

1）$KForget(\phi,p)\equiv Forget(\phi,p)$；

2）$KForget(K_i\phi,p)\equiv K_i(Forget(\phi,p))$，$i=1,\cdots,n$。

文献[28]中也有类似的结论，故省去证明。命题 3 中结论 1）说明命题逻辑中的变量遗忘实质上是模态逻辑中知识遗忘的特例；结论 2）说明关于客观事实的主观知识中的知识遗忘，可以通过变量遗忘来计算。但对于一般的模态逻辑公式，结论 2）不成立，命题 4 进一步说明了这个问题。

命题 4 给定 $\phi\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，则：

1）$KForget(K_i\phi,p)\vDash K_i(KForget(\phi,p))$，$i=1,\cdots,n$；

2）$KForget(K_iK_j\phi,p)\equiv K_iK_j(Forget(\phi,p))$，$i\neq j$，$\phi\in\mathscr{L}^p$。

证明：根据知识遗忘和变量遗忘的定义可证明如下。

1）由定义 9 可知，对于任意 $KD45_n$ 模型$(M,w)\vDash KForget(K_i\phi,p)$，其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$，必存在 $KD45_n$ 模型$(M',w')\vDash K_i\phi$ 且$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$，其中 $M'=(W',V',R_1',\cdots,R_n')$。即任意 $v'\in W'$，$(w',v')\in R_i'$，均有$(M',v')\vDash\phi$。由定义 7 可知，对于任意 $v\in W$，$(w,v)\in R_i$，均有$(M,v)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',v')$。由定义 9 可知$(M,v)\vDash KForget(\phi,p)$，因此$(M,w)\vDash K_i(KForget(\phi,p))$。

2）$KForget(K_iK_j\phi,p)\vDash K_iK_j(Forget(\phi,p))$，由 1）和命题 3 易证，故只需证 $K_iK_j(Forget(\phi,p))\vDash KForget(K_iK_j\phi,p)$。给定任意 $KD45_n$ 模型$(M,w)\vDash K_iK_j(Forget(\phi,p))$，其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$。对于任意 $v\in W$，若存在 $u\in W$ 满足$(w,u)\in R_i$ 且$(u,v)\in R_j$，则有$(M,v)\vDash Forget(\phi,p)$。由变量遗忘的定义可知，存在 $v'\vDash\phi$ 且 $v'\simeq_{\{p\}}v$。将(M,w)中所有这样的 v 用其对应的 v'进行替换，即可构造出一个 $KD45_n$ 模型(M',w')，显然$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$，且$(M',w')\vDash K_iK_j\phi$。因此有$(M,w)\vDash KForget(K_iK_j\phi,p)$。证毕。

由结论 1）可以看出，当 ϕ 是一般模态逻辑公式时，$KForget(K_i\phi,p)\vDash_{KD45_n}K_i(KForget(\phi,p))$成立，但其反向不一定成立，因而不能通过变量遗忘来计算知识遗忘；由结论 2）可知，当 ϕ 是形如 $K_iK_j\phi(i\neq j,\phi\in\mathscr{L}^p)$的公式时，依然可以通过变量遗忘来计算知识遗忘。注：1），2）分别指命题 4 中的结论 1）和结论 2）。

命题 5[28] 给定 $\phi_1,\phi_2\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，则有：

1）若 $\phi_1\equiv\phi_2$，则 $KForget(\phi_1,p)\equiv KForget(\phi_2,p)$；

2）若 $\phi_1\vDash\phi_2$，则 $KForget(\phi_1,p)\vDash KForget(\phi_2,p)$；

3）$KForget(\phi_1\vee\phi_2,p)\equiv KForget(\phi_1,p)\vee KForget(\phi_2,p)$；

4）$KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)\vDash KForget(\phi_1,p)\wedge KForget(\phi_2,p)$。

文献[28]中有类似的结论，故省去证明。命题 5 中，结论 1)说明知识遗忘的结果具有逻辑唯一性；结论 2)说明知识遗忘保持了逻辑蕴涵关系；结论 3)说明知识遗忘操作对析取运算满足分配率；结论 4)说明知识遗忘操作对合取运算并不满足分配率，这给知识遗忘的计算带来了一定的困难。但在一些特殊情况下，我们也可以找到合取公式知识遗忘的计算方法。

定义 10　给定公式 $\phi\in\mathscr{L}$，若存在公式 $\phi'\in\mathscr{L}$，$\phi\equiv\phi'$ 且 $var(\phi')\cap\{p\}=\emptyset$，$p\in\mathscr{P}$，我们就称 ϕ 与 p 不相关，记为：$IR(\phi,p)$。

命题 6　给定 $\phi_1,\phi_2\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，若 $IR(\phi_1,p)$，则有 $KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)\equiv\phi_1\wedge KForget(\phi_2,p)$。

证明：由知识遗忘和不相关的定义可证：

1)先证 $KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)\models\phi_1\wedge KForget(\phi_2,p)$。任给 $KD45_n$ 模型 $(M,w)\models KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)$，由定义 9 可知，存在 $KD45_n$ 模型 $(M',w')\models\phi_1\wedge\phi_2$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。由 $(M',w')\models\phi_2$ 和 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$ 可知，$(M,w)\models KForget(\phi_2,p)$。由 $IR(\phi_1,p)$，$(M',w')\models\phi_1$，$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$ 和命题 1 可知，$(M,w)\models\phi_1$。因此有 $(M,w)\models\phi_1\wedge KForget(\phi_2,p)$。

2)再证 $\phi_1\wedge KForget(\phi_2,p)\models KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)$。任给 $KD45_n$ 模型 $(M,w)\models\phi_1\wedge KForget(\phi_2,p)$，由定义 9 可知，存在 $KD45_n$ 模型 $(M',w')\models\phi_2$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。由 $(M,w)\models\phi_1$，$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$，$IR(\phi_1,p)$ 和命题 1 可知，$(M',w')\models\phi_1$。因此，$(M',w')\models\phi_1\wedge\phi_2$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$，故有 $(M,w)\models KForget(\phi_1\wedge\phi_2,p)$。证毕。

命题 6 表明：从一个理论(有限个公式的集合)中遗忘命题 p，其与 p 不相关的部分不受影响。

在文献[28]中，Zhang 等提出了 4 个公设：弱化公设(W)、正保持公设(PP)、负保持公设(NP)和不相关公设(IR)，并刻画了 $S5$ 中知识遗忘的语义特征。下面我们将证明在 $KD45_n$ 中知识遗忘依然满足这些公设。

定理 1　在多智能体模态逻辑 $KD45_n$ 中，给定 $\phi_1,\phi_2\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，$\phi_2\equiv KForget(\phi_1,p)$，则满足如下条件：

1)(W)$\phi_1\models\phi_2$，即 ϕ_2 在逻辑上要比 ϕ_1 弱；

2)(PP)任意公式 $\phi\in\mathscr{L}$，$IR(\varphi,p)$，如果 $\phi_1\models\varphi$，则有 $\phi_2\models\varphi$；

3)(NP)任意公式 $\varphi\in\mathscr{L}$，$IR(\varphi,p)$，如果 $\phi_1\not\models\varphi$，则有 $\phi_2\not\models\varphi$；

4)(IR)$IR(\phi_2,p)$，即 ϕ_2 与 p 不相关。

证明：根据定义 9 和定义 10 可证，具体证明如下：

1)任意 $KD45_n$ 模型 $(M,w)\models\phi_1$，有 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M,w)$。由定义 9 可知，$(M,w)\models KForget(\phi_1,p)$，因此有 $\phi_1\models\phi_2$。

2)由 $\phi_2\equiv KForget(\phi_1,p)$ 可知，任意 $KD45_n$ 模型 $(M,w)\models\phi_2$，必存在 $KD45_n$ 模型 $(M',w')\models\phi_1$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。由 $\phi_1\models\varphi$ 可知，$(M',w')\models\varphi$。由 $IR(\varphi,p)$ 和 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$ 以及命题 1 可知，$(M,w)\models\varphi$。因此有 $\phi_2\models\varphi$。

3)若 $\phi_1\not\models\varphi$，则存在 $KD45_n$ 模型 $(M,w)\models\phi_1$ 但是 $(M,w)\not\models\varphi$。由 $(M,w)\models\phi_1$ 和 $\phi_2\equiv KForget(\phi_1,p)$ 可知，存在 $(M',w')\models\phi_2$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。由 $IR(\varphi,p)$ 和命题 1 可知，$(M',w')\not\models\varphi$。因此有 $\phi_2\not\models\varphi$。

4)根据不相关的定义可知，要证 $IR(\phi_2,p)$ 只需证存在公式 $\phi'\in\mathscr{L}$，$var(\phi')\cap\{p\}=\emptyset$ 且 $\phi'\equiv KForget(\phi_1,p)$。文献[49]中已证明在 $KD45_n$ 中确实存在这样的公式。证毕。

推论 1　给定公式 $\phi_1,\phi_2\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，若 $\phi_2\equiv KForget(\phi_1,p)$，则对任意公式 $\varphi\in\mathscr{L}$ 且 $IR(\varphi,p)$，$\phi_1\models\varphi$ 当且仅当 $\phi_2\models\varphi$。

推论 1 说明从一个理论遗忘掉一个命题，所得新理论与原理论在与被遗忘命题无关的结论上保持逻辑一致。

推论 2　给定公式 $\phi\in\mathscr{L}$ 和 $p\in\mathscr{P}$，$\varphi\equiv KForget(\phi,p)$，则存在公式 $\phi'\in\mathscr{L}$，$\phi'\equiv\varphi$ 且 $var(\phi')\subseteq\mathrm{var}(\phi)\setminus\{p\}$。

证明：对于任意 $p'\in\mathscr{P}\setminus var(\phi)$，有 $IR(\phi,p')$。由命题 6 可知 $\phi\equiv KForget(\phi,p')$。令 $\phi'\equiv KForget(KForget(\phi,p'),p)$，即 ϕ' 是依次从 ϕ 遗忘掉 $\mathscr{P}\setminus var(\phi)\cup\{p\}$ 中的原子命题之后的结果。显然，$\phi'\equiv\varphi$。由定理 1 可知，ϕ' 与 $\mathscr{P}\setminus var(\phi)\cup\{p\}$ 中的原子命题均不相关，因此有 $var(\phi')\subseteq var(\phi)\setminus\{p\}$。证毕。

推论 2 充分说明在定义知识遗忘时，不必如文献[49]中那样显式约束 $var(\phi')\subseteq var(\phi)\setminus\{p\}$。

命题 7[49]　在多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中，对于任意公式 $\phi\in\mathscr{L}$ 和原子命题 $p\in\mathscr{P}$，均存在公式 $\phi'\in\mathscr{L}$ 使得 $\phi'\equiv KForget(\phi,p)$。

命题 7 表明：在多智能体模态逻辑 $KD45_n$ 中，知识遗忘是可定义的。

本节在文献[28]的基础上，将知识遗忘的定义扩展到多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中，该定义对[49]中定义的多智能体模态逻辑知识遗忘的定义做了修正，并对其重要性质进行了进一步分析，为后续探讨 $KD45_n$ 中知识遗忘的计算提供了支撑。

4　$KD45_n$ 中面向知识遗忘的知识编译

尽管文献[49]中已给出多智能体模态逻辑系统中知识遗忘的计算方法，但其效率非常低——非初等时间复杂度，这严重影响了知识遗忘的实际应用。我们将利用 $KD45_n$ 公理系统的特殊性，在计算知识遗忘之前，先进行知识编译，从而提高知识遗忘计算的效率。

知识编译，即对已有知识进行预处理，将给定系统中的任意公式等价转换成该系统中的一个片段，该片段对特定领域的推理是高效的，从而提高在线推理的效率。知识编译的关键在目标片段的选择，我们探寻 $KD45_n$ 中有利于知识遗忘计算的目标片段。

为了方便处理否定算子($\neg$)，我们将模态逻辑公式转换为与之等价的否定范式(Negation Normal Form，NNF)。

定义 11　多智能体模态逻辑的 NNF 可递归定义如下：

$$\varphi::=\bot\mid\top\mid p\mid\neg p\mid\varphi\vee\varphi\mid\varphi\wedge\varphi\mid K_i\varphi\mid L_i\varphi$$

其中，$p\in\mathscr{P}$，$i\in\mathscr{A}$，$L_i\varphi\doteq\neg(K_i\neg\varphi)$。

在 NNF 中，否定算子($\neg$)只允许作用于原子命题。所

有 NNF 公式的集合记为 $\mathscr{L}_{NNF}$，显然 $\mathscr{L}_{NNF} \subset \mathscr{L}$。

命题 8 给定任意的模态逻辑公式 $\phi \in \mathscr{L}$，均存在公式 $\varphi \in \mathscr{L}_{NNF}$，满足 $\phi \equiv \varphi$ 且 $|\varphi| \leqslant |\phi|$。

证明：由 $\neg(\varphi \vee \varphi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\varphi$，$\neg(\varphi \wedge \varphi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\varphi$，$\neg\bot \equiv \top$，$\neg(L_i\varphi) \equiv K_i(\neg\varphi)$，$\neg(K_i\varphi) \equiv L_i(\neg\varphi)$ 可证。证毕。

命题 8 表明：任意模态逻辑公式均可转换为与之等价的 NNF，且不会导致公式长度的增长。

多智能体模态逻辑中，嵌套知识的出现给知识遗忘的计算带来了困难。我们考虑利用 $KD45_n$ 公理系统中的反省公理(A4 和 A5)，消除与同一智能体相关的模态算子之间的直接嵌套。

对于智能体 $i \in \mathscr{A}$，与之相关的模态算子为 K_i 或 L_i。令 $O_i \in \{K_i, L_i\}$，$\otimes \in \{\wedge, \vee\}$。若 $O_i(\eta \otimes O_j(\varphi))$，则称模态算子 O_j 直接嵌套于模态算子 O_i。例如：在公式 $K_i(L_j(L_i p))$ 中，模态算子 L_j 直接嵌套于模态算子 K_i，但 L_i 不是直接嵌套于模态算子 K_i。

定义 12 给定公式 $\varphi \in \mathscr{L}$，如果对于任意智能体 i，任意与之相关的模态算子都不直接嵌套于与其自身相关的模态算子，那么就称 ϕ 是一个反省消去公式。

所有反省消去公式的集合记为 $\mathscr{L}_{in}$，显然 $\mathscr{L}_{in} \subset \mathscr{L}$。

命题 9 给定任意的模态逻辑公式 $\phi \in \mathscr{L}$，在 $KD45_n$ 中均存在公式 $\phi' \in \mathscr{L}_{in}$，满足 $\phi \equiv \phi'$ 且 $|\phi'| \leqslant |\phi| 2^{d(\phi)}$。

证明：由 $KD45_n$ 可达关系的传递性和欧几里得性可知：

$$K_i(O_i\alpha \wedge \beta) \equiv O_i\alpha \wedge K_i\beta \tag{1}$$

$$K_i(O_i\alpha \vee \beta) \equiv O_i\alpha \vee K_i\beta \tag{2}$$

$$K_i((O_i\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \equiv (O_i\alpha \vee K_i\gamma) \wedge K_i(\beta \vee \gamma) \tag{3}$$

$$L_i(O_i\alpha \wedge \beta) \equiv O_i\alpha \wedge L_i\beta \tag{4}$$

$$L_i(O_i\alpha \vee \beta) \equiv O_i\alpha \vee L_i\beta \tag{5}$$

$$L_i((O_i\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) \equiv (O_i\alpha \wedge L_i\gamma) \vee L_i(\beta \wedge \gamma) \tag{6}$$

用上述转换规则，对公式 ϕ 中出现同一智能体相关的模态算子直接嵌套的子公式进行等价替换，即可得到与之等价的反省消去公式 ϕ'。仅有转换规则式(3)和式(6)会导致公式长度不超过 2 倍的增长，整个转换过程最多进行 $(d(\phi)-1)$ 轮，因此有 $|\phi'| \leqslant |\phi| 2^{d(\phi)}$。证毕。

命题 9 表明：在 $KD45_n$ 中，任意模态逻辑公式均可通过等价转换，消除与同一智能体相关的模态算子之间的直接嵌套，但最坏情况下公式长度会有指数倍的增长。

Janin 等定义了一种特殊的模态算子——覆盖模态算子(∇_i)[54]，并在此基础上定义了覆盖析取公式(Cover Disjunctive Formula，CDF)。研究结果表明：该析取公式有利于知识遗忘的计算[12,49]。因此，我们也考虑将 $KD45_n$ 中的公式编译成这种析取公式。

定义 13[54] 给定智能体集合 $\mathscr{A}$ 和公式集合 $\Phi \subseteq \mathscr{L}$，覆盖模态算子 ∇_i 可定义为：

$$\nabla_i\Phi \doteq \bigwedge_{\varphi \in \Phi} L_i\varphi \wedge K_i(\bigvee_{\varphi \in \Phi} \varphi)$$

其中，$i \in \mathscr{A}$。

命题 10[49] 给定多智能体克里普克模型 (M, w)，其中 $M = (W, V, R_1, \cdots, R_n)$，$(M, w) \models \nabla_i\Phi$，当且仅当满足如下条件：

1)对于任意 $(w, v) \in R_i$，存在 $\varphi \in \Phi$ 使得 $(M, v) \models \varphi$；

2)对于任意 $\varphi \in \Phi$，存在 $(w, v) \in R_i$ 使得 $(M, v) \models \varphi$。

命题 10 表明：$(M, w) \models \nabla_i\Phi$，当且仅当 w 在 M 中的 i 后继节点 v 满足且仅满足 Φ 中的公式，即 Φ 中覆盖了 w 的 i 后继可满足的公式。因此模态算子 ∇_i 也被称为“覆盖模态算子”。显然 $\nabla_i\{\top\} \equiv \top$，$\nabla_i\{\bot\} \equiv \bot$，$\nabla_i\varnothing \equiv K_i\bot$。在 $KD45_n$ 中，$\nabla_i\varnothing \equiv \bot$。

定义 14[54] 覆盖析取公式可递归定义如下：

$$\phi ::= \bot \mid \top \mid \pi \wedge \nabla_1\Phi_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_n\Phi_n \mid \phi \vee \varphi$$

其中，π 是一致的命题文字合取，$\Phi_1, \cdots, \Phi_n$ 均为覆盖析取公式的有限集。

所有 CDF 公式的集合记为 $\mathscr{L}_{CDF}$，显然 $\mathscr{L}_{CDF} \subset \mathscr{L}_{NNF}$。

命题 11 给定任意的模态逻辑公式 $\phi \in \mathscr{L}$，在 $KD45_n$ 中均存在公式 $\phi' \in \mathscr{L}_{CDF}$，$\phi \equiv \phi'$ 且 $|\phi'| = O(2^{|\phi| . \log|\phi|})$。

证明：不失一般性，我们假定 ϕ 是 NNF 公式。下面我们将递归给出其转换规则：

$$\bot^* = \bot \tag{7}$$

$$\top^* = \top \tag{8}$$

$$l^* = l \tag{9}$$

$$(K_i\varphi)^* = \nabla_i\{\varphi^*\} \tag{10}$$

$$(L_i\varphi)^* = \nabla_i\{\varphi^*, \top\} \tag{11}$$

$$(\varphi \vee \phi)^* = \varphi^* \vee \phi^* \tag{12}$$

合取运算的转换稍微复杂一点，为方便起见，我们把合取算子看作 $\wedge\Phi$，其中 Φ 是有限个公式的集合。

当 Φ 中的公式中有形如 $\top$，$\bot$，$\varphi \vee \phi$ 或 $\wedge\Psi$ 的公式时，有如下转换规则：

$$(\wedge(\Phi \cup \{\top\}))^* = (\wedge\Phi)^* \tag{13}$$

$$(\wedge(\Phi \cup \{\bot\}))^* = \bot \tag{14}$$

$$(\wedge(\Phi \cup \{\varphi \vee \phi\}))^* = (\wedge(\Phi \cup \{\varphi\}))^* \vee (\wedge(\Phi \cup \{\phi\}))^* \tag{15}$$

$$(\wedge(\Phi \cup \{\wedge\Psi\}))^* = (\wedge(\Phi \cup \Psi))^* \tag{16}$$

当 Φ 中的公式中不包含形如 $\top$ 或 $\bot$ 或 $\varphi \vee \phi$ 或 $\wedge\Psi$ 的公式时，则只可能是命题文字或模态文字($K_i\varphi$ 或 $L_i\varphi$)。令 $\Phi = \Phi_{lit} \cup \Phi_1^K \cup \Phi_1^L \cup \cdots \cup \Phi_n^K \cup \Phi_n^L$，其中 Φ_{lit} 是命题文字的集合，Φ_i^K 和 Φ_i^L 分别是模态文字 $K_i\varphi$ 和 $L_i\varphi$ 的集合。则其转换规则为：

$$(\wedge\Phi)^* = \wedge\Phi_{lit} \wedge \bigwedge_i \nabla_i\Phi_i \tag{17}$$

其中，$\Phi_i = \begin{cases} \{(\varphi \wedge \wedge\Gamma_i)^* \mid \varphi \in \Psi_i \cup \{\top\}\}, & \Phi_i^L \neq \varnothing \\ \{(\wedge\Gamma_i)^*\}, & \Phi_i^L = \varnothing \end{cases}$，$\Gamma_i = \{\varphi \mid K_i\varphi \in \Phi_i^K\}$，$\Psi_i = \{\varphi \mid L_i\varphi \in \Phi_i^L\}$。

上述转换规则(7)－(17)均是等价转换，由此可见：任意 NNF 公式 ϕ 可等价转换成 CDF 公式 ϕ^*。至于转换之后会导致公式长度指数级别的增长在文献[12]中有类似结论，因此省去详细证明。公式长度的增长主要由转换规则式(15)和式(17)导致。证毕。

命题 11 表明：在 $KD45_n$ 中，任意模态逻辑公式均可转换为与之等价的 CDF 公式，在最坏情况下，公式长度会有指数倍的增长。

依次经过否定范式、反省消去公式和覆盖析取公式的转换之后，可以得到交替覆盖公式（Alternating Cover Disjunctive Formula，ACDF）。

定义 15　给定任意的 CDF 公式 $\phi \in \mathscr{L}_{CDF}$，如果不存在模态算子$\nabla_i$ 的自我直接嵌套，则该公式为 ACDF 公式。

ACDF 公式的集合记为 $\mathscr{L}_{ACDF}$，显然 $\mathscr{L}_{ACDF} \subset \mathscr{L}_{CDF}$。

定理 2　给定任意的模态逻辑公式 $\phi \in \mathscr{L}$，在 $KD45_n$ 中均存在公式 $\phi' \in \mathscr{L}_{ACDF}$，满足 $\phi \equiv \phi'$ 且 ϕ' 的长度在最坏情况下相对于 ϕ 的长度会有双重指数倍的增长。

证明：由命题 8、命题 9 和命题 11 可证。

定理 2 表明，在 $KD45_n$ 中的任意公式都可等价转换成 ACDF 公式，在最坏情况下公式长度会有双重指数倍的增长。

例 1　给定 $\phi = K_1(L_1 p \vee L_2 q) \wedge K_1(p \supset q) \wedge K_2(p \wedge r)$，则其等价的 ACDF 公式为：

$$\begin{aligned}\phi &\equiv (L_1 p \vee K_1 L_2 q) \wedge K_1(\neg p \vee q) \wedge K_2(p \wedge r)\\ &\equiv L_1 p \wedge K_1(\neg p \vee q) \wedge K_2(p \wedge r) \vee K_1 L_2 q \wedge K_1(\neg p \vee q) \wedge K_2(p \wedge r)\\ &\equiv \nabla_1\{\neg p \vee q, p \wedge q\} \wedge \nabla_2\{p \wedge r\} \vee \nabla_1\{\neg p \wedge \nabla_2\{q, \top\} \vee q \wedge \nabla_2\{q, \top\}\} \wedge \nabla_2\{p \wedge r\}\end{aligned}$$

5　$KD45_n$ 中知识遗忘的计算

在 $KD45_n$ 中，一般模态逻辑公式等价转换为 ACDF 公式，虽然会导致一定程度的长度增长，但在知识遗忘计算时其优越性就会体现出来。

5.1　知识遗忘计算定理

在给出本文的重要结论——知识遗忘计算定理之前，我们先给出与之证明相关的两个引理。

定义 16[53]　给定模型(M,w)，其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$，以及模型(M',w)，其中 $M'=(W',V',R_1',\cdots,R_n')$，$(M',w)$为$(M,w)$的生成子模型，当且仅当其满足下列条件时：

1）$W'=R^*(w)$；

2）$V'(w)=V(w)$，如果 $w \in W'$；

3）$R'_i = R_i \cap (W' \times W')$。

模型(M,w)的生成子模型即仅考虑从当前世界 w 出发可达的可能世界，并保留它们之间的可达关系。

命题 12[53]　若(M',w)为(M,w)的生成子模型，则两者相互模拟$(M,w) \leftrightarrow (M',w)$。

定义 17　$KD45_n$ 模型(M,w)，其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$，我们称之为标准 $KD45_n$ 模型，当且仅当其满足如下性质：

1）不存在 $u \in W$，$(u,w) \in R$；

2）$R_i(w) \cap R_j(w) = \emptyset$，$i \neq j$；

3）对于任意智能体 i，任意 $u \in R_i(w)$，若$(v,u) \in R_j$，则 $v \in R_i(w) \cup \{w\}$且 $j=i$。

性质 1）说明当前世界点 w 只有出边，没有入边；性质 2）说明没有一个可能世界同时既是 w 的 i 后继又是 w 的 j 后继（$i \neq j$）；性质 3）说明 w 的 i 后继仅有来自 $R_i(w) \cup \{w\}$的 i 入边，且由 $KD45_n$ 中可达关系的传递性可知，w 的 i 后继的 i 后继也必是 w 的 i 后继。

引理 1　给定任意的 $KD45_n$ 模型(M,w)，均存在一个与之互模拟的标准 $KD45_n$ 模型(M'',w'')。

证明：令(M,w)的生成子模型为(M',w)，显然$(M,w) \leftrightarrow (M',w)$。只需证存在标准 $KD45_n$ 模型(M'',w'')，满足$(M',w) \leftrightarrow (M'',w'')$。当$(M',w)$本身是标准 $KD45_n$ 模型时，显然成立。假定(M',w)不是标准 $KD45_n$ 模型，令 $M'=(W',V',R_1',\cdots,R'_n)$，则可分别证明如下：

1）若存在 $u \in W'$，$(u,w) \in R'$。构造模型(M'',w'')，$M''=(W'',V'',R''_1,\cdots,R''_n)$，其中：

①$W''=W' \cup \{w''\}$，$W' \cap \{w''\} = \emptyset$；

②$V''(w'')=V'(w)$，若 $u \in W'$，则 $V''(u)=V'(u)$；

③$R_i''=R_i' \cup \{(w'',u) \mid u \in R_i'(w)\}$。

即用 w''复制可能世界 w，并根据 w 的出边构造 w''的出边。易证(M'',w'')是与(M',w)互模拟的 $KD45_n$ 模型，且满足标准 $KD45_n$ 模型性质 1）。

2）若 $R_i'(w) \cap R_j'(w) \neq \emptyset$，$i \neq j$。为简单起见，假定 $R_i'(w) \cap R_j'(w) = \{u'\}$。则可得$(M',u')$的生成子模型$(U',u')$，显然$(M',u') \leftrightarrow (U',u')$。生成其副本$(U,u)$，$U=(W^U,V^U,R_1^U,\cdots,R_n^U)$。令 $W' \cap W^U = \emptyset$，可构造模型(M'',w)，$M''=(W'',V'',R_1'',\cdots,R_n'')$，其中：

①$W''=W' \cup W^U$；

②$v \in W'$，$V''(v)=V'(v)$；$v \in W^U$，$V''(v)=V^U(v)$；

③$R''_i = R'_i \cup R_i^U$，$i \neq j$；$R_j''=R_j' \cup R_j^U \setminus \{(w,v) \mid v \in R_j'(w)\} \cup \{(w,v) \mid v \in R_j^U(u)\}$。

即复制生成子模型(U',u')，断开原模型中 w 的 j 出边，再与(U',u')的副本(U,u)重建这些 j 边。易证(M'',w'')是与(M',w)互模拟的 $KD45_n$ 模型，且满足标准 $KD45_n$ 模型性质 2）。

3）若 $u' \in R_i'(w)$，$(v',u') \in R_j'$，不满足标准模型性质 3），则可细分为两种情况：

①$v' \in R_i'(w) \cup \{w\}$ 但 $j \neq i$。可构造与之互模拟的 $KD45_n$ 模型，消除这种情况。具体如下：首先，获取(M',u')的生成子模型(U',u')，显然$(M',u') \leftrightarrow (U',u')$；接着构造$(U',u')$的副本$(U,u)$，$U=(W^U,V^U,R_1^U,\cdots,R_n^U)$；最后，令 $W' \cap W^U = \emptyset$，可构造模型(M'',w)，$M''=(W'',V'',R_1'',\cdots,R_n'')$，其中：

（A）$W''=W' \cup W^U$。

（B）$v \in W'$，$V''(v)=V'(v)$；$v \in W^U$，$V''(v)=V^U(v)$。

（C）$R_i''=R'_i \cup R_i^U$，$i \neq j$；$R_j''=R'_j \cup R_j^U \setminus (\{(v',v) \mid v \in Q\} \cup Q \times Q) \cup \{(w',v) \mid w' \in \{v'\} \cup Q, v \in R_j^U(u)\}$，$Q=R'_j(v')$。

其构造与引理 1 的 2）中类似，即复制生成子模型(U',u')，断开原模型中与 v'相关的 j 边，再与(U',u')副本(U,u)

重建这些 j 边。易证 (M'',w'') 是与 (M',w) 互模拟的 $KD45_n$ 模型,且满足对于任意智能体 i,任意 $u\in R_i''(w'')$,若 $(v,u)\in R_j''$ 且 $v\in R_i''(w'')\cup\{w''\}$,则 $j=i$。

②$v'\in W'/(R_i'(w)\cup\{w\})$。同样可构造与之互模拟的 $KD45_n$ 模型,消除这种情况。其构造过程与①类似。

综上所述,对于不满足标准 $KD45_n$ 模型性质的 $KD45_n$ 模型,均可构造一个与之互模拟的 $KD45_n$ 模型,使其满足这些性质。引理 1 得证。证毕。

例 2 如图 1(a)所示,(M,w) 是一个 $KD45_n$ 模型,其中 $M=(W,V,R_1,R_2)$,$W=\{w,v\}$,图中圆形节点表示可能世界,不同的填充样式表示可能世界的不同赋值,有向边表示可能世界之间的可达关系。显然,其不是一个标准 $KD45_n$ 模型。如图 1(b)所示,(M',w_1) 是一个标准 $KD45_n$ 模型,其中 $M'=(W',V',R_1',R_2')$,$W'=\{w,w_1,w_2,w_3,v,v_2\}$。$w_1$,$w_2$ 和 w_3 均为 w 的不同副本,在图中表示它们的圆形节点用黑色填充;类似地,v_2 是 v 的副本,表示它们的圆形节点用灰色填充。令 $\rho=\{(w,w_1),(w,w),(w,w_2),(w,w_3),(v,v),(v,v_2)\}$,不难验证 $(M,w)\leftrightarrow(M',w_1)$。

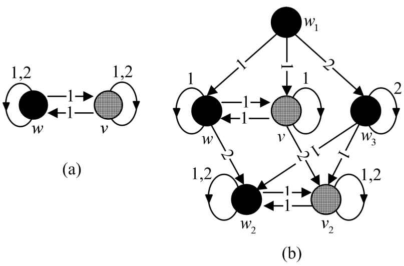

图 1 标准 $KD45_n$ 模型

Fig. 1 Standard $KD45_n$ model

标准 $KD45_n$ 模型具备可分解重构性质,即可先将其分解成若干子模型,然后又可用这些子模型重构该模型。这个性质对知识遗忘定理的证明至关重要。

定义 18 给定模型 (M,w),其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$,以及模型 (M',w),其中 $M'=(W',V',R_1'\cdots,R_n')$,$(M',w)$ 为 (M,w) 的去 i 边生成子模型,当且仅当其满足下列条件时:

1)$W'=R^*(w)$;

2)$V'(u)=V(u)$,如果 $u\in W'$;

3)$R_i'=R_i\cap(W'\times W')\setminus(\{(w,v)\mid v\in Q\}\cup Q\times Q)$,其中 $Q=R_i(w)$。

令 $|R_i(w)|=N_i$,即 w 有 N_i 个 i 后继。令 $u_{ik}\in R_i(w)$ 是 w 的第 k 个 i 后继,则 (M,u_{ik}) 的去 i 边生成子模型为 (M^{ik},u_{ik}),其中 $M^{ik}=(W^{ik},V^{ik},R_1^{ik},\cdots,R_n^{ik})$。假定每个 W^{ik} 均互不相交,我们可定义分解再造模型。

定义 19 给定模型 (M,w),其中 $M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$,则 (M',w) 为 (M,w) 的分解再造模型,其中 $M'=(W',V',R_1',\cdots,R_n')$ 具体定义如下:

$$W'=\{w\}\cup\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{N_i}W^{ik};$$

$V'(w)=V(w)$,如果 $u\in W^{ik}$,则 $V'(u)=V^{ik}(u)$;

$$R_j'=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{N_i}R_j^{ik}\cup\{(w,u)\mid u\in Q\}\cup Q\times Q,Q=\bigcup_{k=1}^{N_j}\{u_{jk}\}。$$

分解再造模型实质上是在当前世界的每个 i 后继生成去 i 边生成子模型,然后再重建当前世界与 i 后继以及它们彼此之间的 i 边构成。

引理 2 给定标准 $KD45_n$ 模型 (M,w),则其分解再造模型 (M',w) 是标准 $KD45_n$ 模型,且满足 $(M,w)\leftrightarrow(M',w)$。

证明:由标准 $KD45_n$ 模型 (M,w) 的性质和分解再造模型的定义可证。

例 3 如图 2 所示,(M'',w_1) 是图 1(b)所示模型 (M',w_1) 的分解再造模型,其中 $M''=(W'',V'',R_1'',R_2'')$,图中图形节点的含义与例 2 相同。显然,$(M'',w_1)$ 是一个标准 $KD45_n$ 模型,且 $(M',w_1)\leftrightarrow(M'',w_1)$。

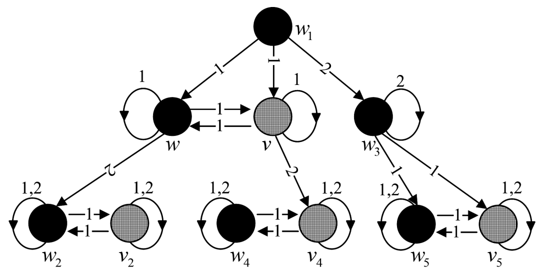

图 2 分解再构模型

Fig. 2 Model reconstructed with decomposed sub-models

由引理 1 和引理 2 可得 $KD45_n$ 中知识遗忘的计算定理。

定理 3 给定任意 ACDF 公式 ξ,其知识遗忘 $KForget(\xi,p)$ 可递归计算如下:

1)$KForget(\top,p)\equiv\top$;

2)$KForget(\bot,p)\equiv\bot$;

3)$KForget(\phi\vee\varphi,p)\equiv KForget(\phi,p)\vee KForget(\varphi,p)$;

4)$KForget(\pi\wedge\bigwedge_i\nabla_i\Phi_i,p)\equiv\pi'\wedge\bigwedge_i\nabla_i\{KForget(\varphi,p)\mid\varphi\in\Phi_i\}$。

其中,π' 为从 π 中删除与 p 相关的文字(p 或 $\neg p$)之后的命题文字合取。

证明:定理 3 中的 1)和 2)显然成立;由命题 5 可知 3)也成立。因此,只需证 4)。

令 $\xi=\pi\wedge\bigwedge_i\nabla_i\Phi_i$,$\eta=\pi'\wedge\bigwedge_i\nabla_i\{KForget(\varphi,p)\mid\varphi\in\Phi_i\}$,需证 $KForget(\xi,p)\equiv\eta$。根据知识遗忘的定义证明如下:

1)显然,$\xi\vDash\eta$ 且 $IR(\eta,p)$。因此,对于任意的 $(M,w)\vDash\xi$,都有 $(M,w)\vDash\eta$。若 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$,由命题 1 可知 $(M',w')\vDash\eta$。

2)给定任意的 $KD45_n$ 模型 $(M',w')\vDash\eta$,其中 $M'=(W',V',R_1',\cdots,R_n')$,需证存在 $KD45_n$ 模型 (M,w) 满足 $(M,w)\vDash\xi$ 且 $(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。下面将构造这样的模型。

由引理 1 可知,存在标准 $KD45_n$ 模型 (U,u),其中 $U=(W^U,V^U,R_1^U,\cdots,R_n^U)$,满足 $(U,u)\leftrightarrow(M',w')$。由 $(M',w')\vDash\eta$ 可知 $(U,u)\vDash\eta$,因此 $u\vDash\pi'$,显然可构造可能世界 w 满足 $w\vDash\pi$ 且 $u\simeq_{\{p\}}w$。由于 ξ 是 ACDF 公式,由归纳假设可知 η 也是 ACDF 公式,因此,对于任意 $(u,u_{ik})\in R_i^U$,(U,u_{ik}) 的去 i

边生成子模型(U^{ik},u_{ik}),均存在 $\varphi_{ik}\in\Phi_i$ 满足$(U^{ik},u_{ik})\models KForget(\varphi_{ik},p)$。由知识遗忘的定义可知,可构造 $KD45_n$ 模型(M^{ik},w_{ik})满足$(M^{ik},w_{ik})\models\varphi_{ik}$且$(M_{ik},w_{ik})\leftrightarrow_{\{p\}}(U^{ik},u_{ik})$。

对(U,u)中 u 的每一个后继结点,均构造出其对应的(M^{ik},w_{ik}),其中 $M_{ik}=(W^{ik},V^{ik},R_1^{ik},\cdots,R_n^{ik})$。假定所有 W^{ik} 以及$\{w\}$都互不相交,则可构造出(M,w),$M=(W,V,R_1,\cdots,R_n)$,其中:$W=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{N_i}W^{ik}\cup\{w\}$;若 $\pi\models p$,则 $V(w)=V^U(u)\cup\{p\}$,否则 $V(w)=V^U(u)$;如果 $v\in W^{ik}$,那么 $V(v)=V^{ik}(v)$;$R_j=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{N_i}R_j^{ik}\cup\{(w,v)\mid v\in Q\}\cup Q\times Q$,$Q=\bigcup_{k=1}^{N_j}\{w_{jk}\}$。

上述构造过程与分解再造模型的构造过程类似。由引理 2 可知,(M,w)是 $KD45_n$ 模型,且$(M,w)\leftrightarrow_{\{p\}}(M',w')$。

由构造过程可知:对于任意 $w''\in R_i(w)$,均存在 $\varphi_{ik}\in\Phi_i$,$(M,w'')\models\varphi_{ik}$;对于任意 $\varphi_{ik}\in\Phi_i$,均存在 $w''\in R_i(w)$,$(M,w'')\models\varphi_{ik}$。因此有$(M,w)\models\nabla_i\Phi_i$,进而$(M,w)\models\xi$。证毕。

推论 3　对于任意的 ACDF 公式 ξ,其知识遗忘 $KForget(\xi,p)$仍然是 ACDF 公式。

例 4　给定 $\phi=K_1(L_1p\vee L_2q)\wedge K_1(p\supset q)\wedge K_2(p\wedge r)$,计算 $KForget(\phi,p)$。

由例 1 可知:

$$\phi\equiv\nabla_1\{\neg p\vee q,p\wedge q\}\wedge\nabla_2\{p\wedge r\}\vee\nabla_1\{\neg p\wedge\nabla_2\{q,\top\}\vee q\wedge\nabla_2\{q,\top\}\}\wedge\nabla_2\{p\wedge r\}$$

因此有:

$$\begin{aligned}KForget(\phi,p)&\equiv\nabla_1\{\top,q\}\wedge\nabla_2\{r\}\vee\nabla_1\{\top\wedge\nabla_2\{q,\top\}\vee q\wedge\nabla_2\{q,\top\}\}\wedge\nabla_2\{r\}\\&\equiv\nabla_1\{\top,q\}\wedge\nabla_2\{r\}\vee\nabla_1\{\nabla_2\{q,\top\}\}\wedge\nabla_2\{r\}\\&\equiv L_1q\wedge K_2r\vee K_1L_2q\wedge K_2r\end{aligned}$$

5.2　知识遗忘计算算法与复杂度分析

在 $KD45_n$ 中,将一般的模态逻辑公式经过一系列的知识编译后转换为与其等价的 ACDF 公式,然后再利用定理 3 即可有效计算其知识遗忘。具体步骤如算法 1 所示。

算法 1　计算 $KForget(\phi,p)$

输入:$\phi\in\mathscr{L}$

输出:KForget(ϕ,p)

1. 首先将 ϕ 转换为与其等价的 NNF 公式 ϕ';
2. 接着将 ϕ'转换为与其等价的反省消去公式 ϕ'';
3. 然后将 ϕ''转换为与其等价的 ACDF 公式 ϕ''';
4. 最后按定理 3 计算 KForget(ϕ''',p);
5. Return KForget(ϕ''',p).

在算法 1 中,第 4 步是关键,即计算 ACDF 公式的知识遗忘,其计算过程和正确性由定理 3 给出。显然,ACDF 公式的知识遗忘的计算可在其公式长度的线性时间内完成。

令 $l=|\phi|$表示公式 ϕ 的长度。算法 1 中,第 1 步可在 l 的线性时间内完成,由命题 8 可知,$|\phi'|\leqslant l$;第 2 步可在$|\phi'|$的多项式时间(即 l 的多项式时间)内完成,由命题 9 可知,$|\phi''|\leqslant|\phi'|\times 2^{d(\phi')}$,由于 $d(\phi')\leqslant|\phi'|$,因此$|\phi''|\leqslant l\times 2^l$;第 3 步可在$|\phi''|$的多项式时间(即 l 的单指数时间)内完成,由命题 11 可知,$|\phi'''|=O(2^{|\phi''|\cdot\log|\phi''|})$,因此$|\phi'''|=O(2^{2^{l\cdot\log l}})$,即在最坏情况下等价转换所得 ACDF 公式相对于原公式(ϕ)长度有双重指数增长;第 4 步可在$|\phi'''|$的线性时间(即 l 的双重指数时间)内完成。因此,整个算法的时间复杂度为 $O(2^{2^{l\cdot\log l}})$,即 l 的双重指数时间。该算法相对于文献[49]中的非初等时间复杂度算法,在效率上有很大的提升。而且,在 $d(\phi)\ll|\phi|$(即公式 ϕ 的深度远小于它的长度)的情况下,其时间复杂度将接近单指数时间。

结束语　本文研究多智能体模态逻辑系统 $KD45_n$ 中的知识遗忘。研究结果表明,$KD45_n$ 中的知识遗忘具备很多知识遗忘的重要性质,特别是满足 S5 中提出的知识遗忘公设[28];充分利用 $KD45_n$ 公理系统的特殊性,任意模态逻辑公式可通过知识编译等价转换为特殊的析取范式公式——ACDF 公式;经过知识编译,$KD45_n$ 中的知识遗忘可有效计算,其计算时间复杂度为编译后公式的多项式时间(原公式的双重指数时间),与现有算法相比,大大提升了知识遗忘的计算效率。

下一步研究,一方面将考虑在 $KD45_n$ 中引入包括分布知识(distributed knowledge)和公共知识(common knowledge)在内的群体知识之后,知识遗忘的计算问题。另一方面,将继续探讨在其他多智能体模态逻辑系统(例如 $S5_n$)中知识遗忘的计算问题。

参 考 文 献

[1]　BOOLE G. The laws of thought [M]. London: Walton and Maberley, 1854.

[2]　LIN F Z. On strongest necessary and weakest sufficient conditions [J]. Artificial Intelligence, 2001, 128(1-2): 143-159.

[3]　DOHERTY P, LUKASZEWICZ W, SZALAS A. Computing strongest necessary and weakest sufficient conditions of first-order formulas[C]// Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2001). Morgan Kaufmann Publishers, 2001: 145-154.

[4]　LIN F Z, REITER R. Forget it! [C]// Proceedings of AAAI Fall Symposium on Relevance. AAAI Press, 1994: 141-146.

[5]　LANG J, LIBERATORE P, MARQUIS P. Propositional independence: Formula-variable independence and forgetting[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2003(18): 391-443.

[6]　FANG L D, WAN H, LIU X Q, et al. Dependence in propositional logic: Formula-formula dependence an formula forgetting-application to belief update and conservative extension[C]// Proceedings of the 32th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2018). AAAI Press, 2018: 1835-1844.

[7]　SU K L, SATTAR A, LV G F, et al. Variable forgetting in reasoning about knowledge [J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 2009(35): 677-716.

[8]　LANG J, MARQUIS P. Reasoning under inconsistency: A forgetting-based approach [J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(12-13): 799-823.

[9]　ZHANG Y, FOO N. Solving logic program conflict through

strong and weak forgettings [J]. Artificial Intelligence, 2006, 170(8/9): 739-778.

[10] ZHANG X W. Forgetting for distance-based reasoning and repair in DL-Lite [J]. Knowledge-Based Systems, 2016(107): 246-260.

[11] XIAO P, WANG K W, WANG Z. Inconsistency-tolerant forgetting in DL-lite [C]//Proceedings of the 16th International Semantic Web Conference. Springer, 2017.

[12] CATE B T, CONRADIE W, MARX M, et al. Definitorially complete description logics [C]//Proceedings of the 10th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2006). AAAI Press, 2006: 79-89.

[13] WANG Z, WANG K W, TOPOR R W, et al. Uniform interpolation for ALC revisited [C]//Australasian Joint Conference on Advances in Artificial Intelligence (ACAI-2009). Springer, 2009: 528-537.

[14] WANG Z, WANG K W, TOPOR R W, et al. Tableau-based forgetting in ALC ontologies [C]//Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-2010). IOS Press, 2010: 47-52.

[15] WANG K W, WANG Z, TOPOR R W, et al. Eliminating concepts and roles from ontologies in expressive descriptive logics [J]. Computational Intelligence, 2014, 30(2): 205-232.

[16] KONTCHAKOV R, WOLTER F, ZAKHARYASCHEV M. Logic-based ontology comparison and module extraction, with an application to DL-Lite [J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(15): 1093-1141.

[17] KONEV B, WALTHER D, WOLTER F. Forgetting and uniform interpolation in large-scale description logic terminologies [C]//Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2009). AAAI Press, 2009: 830-835.

[18] LUTZ C, SEYLAN I, WOLTER F. An automata-theoretic approach to uniform interpolation and approximation in the description logic EL [C]//Proceedings of the 14th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2012). AAAI Press, 2012: 286-296.

[19] LUTZ C, WOLTER F. Foundations for uniform interpolation and forgetting in expressive description logics [C]//Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2011). AAAI Press, 2011: 989-995.

[20] LUDWIG M, KONEV B. Practical uniform interpolation and forgetting for ALC TBoxes with applications to logical Difference[C]//Proceedings of the 14th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2014). AAAI Press, 2014: 318-327.

[21] KOOPMANN P, SCHMIDT R A. Count and forget: Uniform interpolation of SHQ-ontologies [C]//Proceedings of the 7th International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR-2014). Springer, 2014: 434-448.

[22] ZHAO Y, SCHMIDT R A. Concept forgetting in ALCOI-ontologies using an Ackermann approach [C]//Proceedings of the 14th International Semantic Web Conference (ISWC-2015). New York: Springer, 2015: 587-602.

[23] KOOPMANN P, SCHMIDT R A. Uniform interpolation and forgetting for ALC ontologies with ABoxes[C]//Proceedings of the 29th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2015). AAAI Press, 2015: 175-181.

[24] WANG Z, WANG K W, TOPOR R W, et al. Forgetting for knowledge bases in DL-Lite [J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2010, 58(1-2): 117-151.

[25] KONTCHAKOV R, WOLTER F, ZAKHARYASCHEV M. Can you tell the difference between DL-Lite ontologies? [C]//Proceedings of the 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2008), AAAI Press, 2008: 285-295.

[26] NAYAK A, CHEN Y, LIN F Z. Forgetting and knowledge update [C]//Proceedings of 19th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence (AI-2006). Springer, 2006: 131-140.

[27] LIN F Z, REITER R. How to progress a database [J]. Artificial Intelligence, 1997, 92(1-2): 131-167.

[28] ZHANG Y, ZHOU Y. Knowledge forgetting: Properties and applications [J]. Artificial Intelligence, 2009, 173(16-17): 1525-1537.

[29] LIU Y M, LAKEMEYER G. On first-order definability and computability of progression for local-effect actions and beyond [C]//Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2009). AAAI Press, 2009: 860-866.

[30] LIU Y M, WEN X M. On the progression of knowledge in the situation calculus [C]//Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2011). AAAI Press, 2009: 976-982.

[31] FANG L D, LIU Y M, WEN X M. On the progression of knowledge and belief for nondeterministic actions in the situation calculus [C]//Proceedings of the 29th International Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press, 2015: 2955-2963.

[32] XU D, LIN Z Q. A prime implicates-based formulae forgetting [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE-2011). IEEE, 2011: 128-132.

[33] NONNENGART A, OHLBACH H J, SZALAS A. Elimination of Predicate Quantifiers[C]//Proceedings of the 16th International Conference on Automated Deduction (CADE-16). Springer, 1999: 159-181.

[34] ZHANG Y, ZHOU Y. Forgetting revisited [C]//Proceedings of the 12th International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2010). AAAI Press, 2010: 602-604.

[35] ZHANG Y, ZHOU Y. Bounded forgetting [C]//Proceedings of the 25th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2011), AAAI Press, 2011: 280-285.

[36] WANG Y S,WANG K W,WANG Z,et al. Knowledge forgetting in circumscription:A preliminary report [C]// Proceedings of the 29th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2015). AAAI Press,2015:1649-1655.

[37] WANG Y S,WANG K W,ZHANG M Y. Forgetting for answer set programs revisited [C]// Proceedings of the 23rd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2013). AAAI Press,2013:1162-1168.

[38] WANG Y S,ZHANG Y,ZHOU Y,et al. Knowledge forgetting in answer set programming [J]. Journal of Artificial Intelligence Research,2014,(50):31-70.

[39] DELGRANDE J,WANG K W. A syntax-independent approach to forgetting in disjunctive logic programs [C]// Proceedings of the 29th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-2015). AAAI Presss,2015:1482-1488.

[40] JI J M,YOU J H,WANG Y S. On forgetting postulates in answer set programming [C]// Proceedings of the 24th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2015). AAAI Press,2015:3076-3083.

[41] EITER T,WANG K W. Semantic forgetting in answer set programming [J]. Artificial Intelligence, 2008, 172 (14): 1644-1672.

[42] WANG Z,WANG K W,ZHANG X W. Forgetting and unfolding for existential rules [C]// Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-18). AAAI Press, 2018:2013-2020.

[43] HALPERN J Y,MOSES Y. A guide to completeness and complexity for modal logics of knowledge and belief [J]. Artificial Intelligence,1992,54(3):319-379.

[44] HERZIG A,MENGIN J. Uniform interpolation by resolution in modal logic [C]// Proceedings of the 11th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA 2008). Springer, 2008:219-231.

[45] VISSER A. Uniform interpolation and layered bisimulation [M] // Gödel'96: Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics. Springer,1996:139-164.

[46] BÍLKOVÁM. Uniform interpolation and propositional quantifiers in modal logics[J]. Studia Logica,2007,85(1):1-31.

[47] GHILARDI S,LUTZ C,WOLTER F,et al. Conservative extensions in modal logic [C]// Advances in Modal Logic 6, Papers From the Sixth Conference on “Advances in Modal Logic”. College Publications,2006:187-207.

[48] GHILARDI S,ZAWADOWSKI M. Undefinability of propositional quantifiers in the modal system S4 [J]. Studia Logica, 1995,55(2):259-271.

[49] FANG L D,LIU Y M,DITMARSCH H V. Forgetting in multi-agent modal logics [C]// Proceedings of the 25 International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2016). AAAI Press,2016:1066-1073.

[50] BAADER F,CALVANESE D,MCGUINNESS D L,et al. The description logic handbook: theory, implementation, and applications [M]. New York: Cambridge University Press, 2003: 154-155.

[51] HUANG X,FANG B Q,WAN H,et al. A general multi-agent epistemic planner based on higher-order belief change [C]// Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2017). AAAI Press,2017:1093-1101.

[52] KRIPKE S. Semantic analysis of modal logic[J]. Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1963 (9):67-96.

[53] BLACKBURN P,DE RIJKE M,VENEMA Y. Modal Logic [M]. Cambridge: Cambridge University Press,2001:55-57.

[54] JANIN D,WALUKIEWICZ I. Automata for the modal μ-calculus and related results [M] // Mathematical Foundations of Computer Science 1995. Springer,1995:552-562.