

费用约束下的多状态网络可靠性评估方法

徐秀珍, 吴国林, 张媛媛, 牛义锋

引用本文

徐秀珍, 吴国林, 张媛媛, 牛义锋. 费用约束下的多状态网络可靠性评估方法[J]. 计算机科学, 2022, 49(11A): 211200259-7.

XU Xiu-zhen, WU Guo-lin, ZHANG Yuan-yuan, NIU Yi-feng. [Evaluation Method for Multi-state Network Reliability Under Cost Constraint](#) [J]. Computer Science, 2022, 49(11A): 211200259-7.

相似文章推荐 (请使用火狐或 IE 浏览器查看文章)

Similar articles recommended (Please use Firefox or IE to view the article)

[一种面向SDN的移动网络可靠性评估算法](#)

SDN Oriented Mobile Network Reliability Evaluation Algorithm

计算机科学, 2022, 49(11A): 211000080-8. <https://doi.org/10.11896/jsjx.211000080>

[面向Lustre集群存储的错误日志分析及系统优化](#)

Error Log Analysis and System Optimization for Lustre Cluster Storage

计算机科学, 2022, 49(10): 1-9. <https://doi.org/10.11896/jsjx.220100134>

[一种面向电能量数据的联邦学习可靠性激励机制](#)

Reliable Incentive Mechanism for Federated Learning of Electric Metering Data

计算机科学, 2022, 49(3): 31-38. <https://doi.org/10.11896/jsjx.210700195>

[一种传输时限下认知无线电网络的动态广播策略](#)

Dynamic Broadcasting Strategy in Cognitive Radio Networks Under Delivery Deadline

计算机科学, 2021, 48(7): 340-346. <https://doi.org/10.11896/jsjx.200900001>

[基于连续型深度置信神经网络的软件可靠性预测](#)

Software Reliability Prediction Based on Continuous Deep Confidence Neural Network

计算机科学, 2021, 48(5): 86-90. <https://doi.org/10.11896/jsjx.210200055>

费用约束下的多状态网络可靠性评估方法

徐秀珍 吴国林 张媛媛 牛义锋

重庆邮电大学现代邮政学院 重庆 400065

(xuxz@cqupt.edu.cn)

摘要 多状态网络是指网络及其组成单元具有多种不同的性能水平,该网络模型已被广泛应用于描述现实中众多技术网络的行为特征。费用约束下的多状态网络可靠性 $Rel_{(d,b)}$ 是指网络能够把 d 单位的需求流量从源点成功输送到汇点且总的流传输费用不超过给定预算 b 的概率,该可靠性指标可以通过费用约束下的极小容量向量(简称 (d,b) -MCV)来计算。由于 (d,b) -MCV 问题是典型的 NP-hard 问题,求解时间会随着网络规模增加呈指数增长,为提高求解效率,利用边的容量下限建立了关于 (d,b) -MCV 的改进数学模型,并从求解复杂度方面证明了该模型的优势;并且,利用超越数的概念,建立了 (d,b) -MCV 与实数之间的一一映射关系;基于此关系,提出了一种新的 (d,b) -MCV 去重方法。复杂度分析表明,该去重方法比现有方法更实用、更高效。最后,利用数值实验对提出的 (d,b) -MCV 算法的性能进行了检验;结果表明,该算法在求解 (d,b) -MCV 方面具有明显的效率优势,从而为费用约束下的多状态网络可靠性评估提供了一种新方法。

关键词: 多状态网络;可靠性;费用约束;极小容量向量

中图法分类号 N945

Evaluation Method for Multi-state Network Reliability Under Cost Constraint

XU Xiu-zhen, WU Guo-lin, ZHANG Yuan-yuan and NIU Yi-feng

School of Modern Posts, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract Multi-state networks are composed of multi-state components that have different performance levels, and multi-state network model has been extensively used to describe the complex behaviors of many technological networks. Multi-state network reliability under cost constraint, denoted by $Rel_{(d,b)}$, is defined as the probability that the network is able to transmit d units of flow from the source to the destination while satisfying the condition that the total transportation cost is within a given budget b , and can be computed in terms of minimal capacity vector with budget constraint (called (d,b) -MCV for short). Solving (d,b) -MCVs is an NP-hard problem, which means the computational time will exponentially increase with the network scale. In order to enhance the efficiency of solving (d,b) -MCVs, this paper constructs an improved model by introducing lower capacity bounds of arcs, and theoretically demonstrates the merit of the model. Furthermore, this paper employs the concept of transcendental number to establish a one-to-one mapping relationship between (d,b) -MCV and real number, based on which a novel method is proposed to remove duplicate (d,b) -MCVs. It is demonstrated from the viewpoint of time complexity that the proposed method is more practical and efficient in comparison with the existing ones. The performance of the proposed (d,b) -MCV algorithm is tested by numerical experiments, and the results indicate that the algorithm is more efficient in solving (d,b) -MCVs and thus provides a new method for computing $Rel_{(d,b)}$.

Keywords Multi-state network, Reliability, Cost constraint, Minimal capacity vector

1 引言

随着社会经济的飞速发展和科学技术的全面进步,人们的日常生活越来越高度依赖于各种技术网络所提供的服务,譬如计算机网络、通信网络、交通网络、电力(燃气、水)网络等。然而,随着技术网络的全局性、系统性、复杂性特征愈发凸显,整个网络也越来越容易受到内部故障或外部不确定因素的干扰,

交通瘫痪、电力崩溃、通信中断等成为这些技术网络的主要失效模式,同时也成为社会安全稳定的主要威胁^[1]。作为衡量技术网络服务质量最重要的指标之一,网络可靠性被越来越多地应用于分析网络在不确定环境下的行为特征。广义的网络可靠性是指网络在一定的条件下提供符合要求的服务质量的能力。研究表明^[1],可靠性高的网络不仅能显著提高自身运行安全水平、降低维护成本,而且能极大地提升服务效率,满足用户

基金项目:国家自然科学基金(61872126);重庆市教委科学技术研究项目(KJQN202100623, KJQN201900634);重庆市教委人文社科项目(20SKGH069, 20SKGH061);重庆市社科联社会科学规划博士项目(2019BS064)

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(61872126), Scientific and Technological Research Program of Chongqing Municipal Education Commission(KJQN202100623, KJQN201900634), Planning Project of Human Social Science of Chongqing Municipal Education Commission(20SKGH069, 20SKGH061) and Doctoral Project of Chongqing Federation of Social Science Circles(2019BS064).

通信作者:牛义锋(niuyf@cqupt.edu.cn)

需求。因此,网络可靠性不仅是管理者关心的问题,更是学者们一直关注的课题。网络可靠性研究对于保障网络安全运行、维护社会经济发展具有重要的现实意义^[2-5]。

由于受自身或外界不确定因素的影响,网络及其组成单元在运行过程中一般会表现出多种不同的性能水平,这样的网络被称为多状态网络。事实上,现实中的大多数网络都可以看作多状态网络。以通信网络为例,由于受各种随机因素的干扰,网络中的各条传输线路可能处于正常工作状态、退化状态或中断状态等多种状态,从而导致整个通信网络的服务能力也表现出多种状态水平。对于多状态网络来说,网络的可靠运行不仅要求能够连通,而且能够满足一定的性能水平(吞吐量、传输量等)。在多状态网络模型中,网络的每条边具有相互独立的、有限的、取非负整数的随机容量(即每条边的容量是多状态的),该随机容量代表该条边上的服务能力水平^[3-8]。给定性能水平 d ,多状态网络可靠性 Rel_d 是指网络能够把 d 单位的流量从源点成功输送到汇点的概率。该可靠性指标主要关注网络的流传输能力。除了流传输能力,流传输费用也是衡量网络效率的重要方面,并且是影响网络运营效益极其关键的一个指标。在现实生活中,技术网络的运行应控制在合理的预算约束下,比如,对于计算机网络来说,应充分考虑网络运行过程中的成本因素,在可靠性中加入费用指标,从而更全面地评估网络服务质量^[8]。

费用约束下的多状态网络可靠性 $Rel_{(d,b)}$ 是指网络能够把 d 单位的流量从源点成功输送到汇点且总的传输费用不超过给定的预算约束 b 的概率。计算 $Rel_{(d,b)}$ 最简单的方法是穷举法,该方法需要对容量向量空间中的每个容量向量逐一进行枚举,故计算复杂度很高,只适用于规模较小的多状态网络。目前,计算 $Rel_{(d,b)}$ 最常用的一种方法是利用费用约束下的极小容量向量^[8-12],为便于叙述,本文将费用约束下的极小容量向量简称为 (d,b) -MCV。如果网络在容量向量 $\mathbf{X}$ 下能够把 d 单位的流量从源点成功输送到汇点且总的流输送费用不超过给定的预算约束 b ,而任何小于 $\mathbf{X}$ 的其他容量向量都不能同时满足这两个条件,则称 $\mathbf{X}$ 为 (d,b) -MCV。如果知道网络所有的 (d,b) -MCV,则 $Rel_{(d,b)}$ 可以通过容斥定理方法、不交和方法^[13-14]或状态空间分解方法^[15-16]等成熟方法计算得到。因此,求解 (d,b) -MCV 问题是计算 $Rel_{(d,b)}$ 的核心,也是现有研究关注的重点。

目前,研究者已经提出了许多 (d,b) -MCV 搜索算法。根据性能水平、费用约束和容量约束等关键要素,Lin^[9]在研究中利用网络极小路构建了 (d,b) -MCV 的搜索模型,该模型的可行解被称作候选 (d,b) -MCV,候选 (d,b) -MCV 需要进一步验证以确定是否为真正的 (d,b) -MCV;此外,该模型的结果中会出现重复的 (d,b) -MCV,即出现多个完全一样的 (d,b) -MCV。因为重复 (d,b) -MCV 只会增加可靠性计算的复杂度,而不会对可靠性结果产生任何影响,所以需要去除所有的重复 (d,b) -MCV。Lin^[10]在构建 (d,b) -MCV 搜索模型时既考虑了边的容量的多态性,又考虑了点的容量的多态性;同时,Lin 提出的比较法既能够判定候选 (d,b) -MCV 是否是 (d,b) -MCV,又能够去除重复 (d,b) -MCV。Yeh^[11]认为比较法在验证候选 (d,b) -MCV 时效率不高,并提出利用有向圈法验证候选 (d,b) -MCV,该方法不需要知道网络所有极小路。Niu 等^[8]利用 (d,b) -MCV 的性质构建了一个新的搜索模型,

该模型相比上述两种方法在验证候选 (d,b) -MCV 时具有更高的效率,但该模型仅适用于有向网络。最近,Forghani-elahabad 等^[12]提出了一种关联数比较法来识别重复的 (d,b) -MCV,该方法被认为是目前最高效的方法,但缺点是当网络规模较大时该方法不方便实现。

我们注意到,求解 (d,b) -MCV 是典型的 NP-hard 问题,求解时间会随着网络规模增加呈指数增长。尽管研究者已经提出了一些 (d,b) -MCV 搜索算法,但这些算法仍面临两个主要难题:其一,候选 (d,b) -MCV 模型的求解复杂度很高;其二,重复 (d,b) -MCV 的识别仍面临较大的效率瓶颈。针对以上两个难点,首先,通过引入边的容量下限,本文对现有的候选 (d,b) -MCV 模型进行了改进,在改进后的候选 (d,b) -MCV 模型中,关于变量的约束条件更加严格,从而缩小了候选 (d,b) -MCV 的搜索空间,提高了搜索效率;其次,通过引入超越数的概念,本文建立了 (d,b) -MCV 与实数之间的一一映射关系,在此基础上提出了一种高效的重复 (d,b) -MCV 识别方法。基于以上两点工作,提出了一种更高效的 (d,b) -MCV 求解方法。数值计算的结果表明,该算法在求解 (d,b) -MCV 方面具有较明显的效率优势,进而为费用约束下的多状态网络可靠性评估提供了一种新方法。

2 预备知识

多状态网络模型是可靠性分析的基础,本节先对其相关知识进行介绍。用 $G(V,E,U,C)$ 表示一个多状态网络,其中, V 是节点集合, $E=\{e_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ 是边集合, $U=(U_1, U_2, \dots, U_m)$ 是最大容量向量,且 U_i 代表边 e_i 的最大容量, $C=(C_1, C_2, \dots, C_m)$ 是费用向量,且 C_i 表示单位流量通过 e_i 时的传输费用,也称作单位费用。在网络中,源点 s 代表起点(即出发地),汇点 t 代表终点(即目的地)。用 x_i 表示边 e_i 当前的容量状态,且 x_i 的取值在 0 到 U_i 之间。所有边的容量状态组成一个容量向量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $F(\mathbf{X})$ 表示网络在 $\mathbf{X}$ 下的最大流量。

定义 1 给定性能水平 d 和费用约束 b ,如果 $\mathbf{X}$ 满足如下条件:1) $F(\mathbf{X})=d$;2) 对于所有的 $x_i > 0$, $F(\mathbf{X}-0(e_i)) < d$,其中 $0(e_i)=(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$;3) $C(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^m x_i C_i \leq b$,则称容量向量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为 (d,b) -MCV。

根据以上定义易知, (d,b) -MCV 实际上是满足性能水平 d 和费用约束 b 的极小容量向量。假设网络所有的 (d,b) -MCV 为 $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \dots, \mathbf{X}^\sigma$, 令 $\Phi_1=\{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^1\}$, $\Phi_2=\{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^2\}$, $\dots$, $\Phi_\sigma=\{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^\sigma\}$, 则计算 $Rel_{(d,b)}$ 的不交和方法如下:

$$\begin{aligned} Rel_{(d,b)} &= Pr\{\mathbf{X} \mid F(\mathbf{X}) \geq d \text{ 且 } C(\mathbf{X}) \leq b\} \\ &= Pr(\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_\sigma) \\ &= Pr(\Phi_1 \cup (\Phi_2 - \Phi_1) \cup \dots \cup (\Phi_\sigma - \bigcup_{j=1}^{\sigma-1} \Phi_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} Pr(\Theta_i) \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\Theta_1=\Phi_1$, $\Theta_i=\Phi_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} \Phi_j$ ($i=2, \dots, \sigma$), $Pr(\Theta_i)=\sum_{\mathbf{X} \in \Theta_i} Pr(\mathbf{X})$, $Pr(\mathbf{X})=\prod_{k=1}^m Pr(x_k)$ 。

3 基础模型

从前文可知,计算 $Rel_{(d,b)}$ 的核心是求得所有 (d,b) -

MCV。目前,现有算法在求解 (d,b) -MCV时一般包含如下3个主要步骤:1)求得所有的候选 (d,b) -MCV;2)验证候选 (d,b) -MCV是否是真正的 (d,b) -MCV;3)删去重复的 (d,b) -MCV。在步骤1)中,为了求得候选 (d,b) -MCV,现有算法大多采用如下的搜索模型。

引理 1^[9] 如果容量向量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是候选 (d,b) -MCV,则存在一个对应的流向量 $\mathbf{F}=(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_p)$ 满足如下条件:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_p = d \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_1 W_1 + \mathbf{F}_2 W_2 + \dots + \mathbf{F}_p W_p \leq b \quad (3)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_j \leq \min\{M_j, d\}, 1 \leq j \leq p \quad (4)$$

$$0 \leq \sum_{e_i \in P_j} \mathbf{F}_j \leq \min\{U_i, d\}, 1 \leq i \leq m \quad (5)$$

$$x_i = \sum_{e_i \in P_j} \mathbf{F}_j, 1 \leq i \leq m \quad (6)$$

其中, p 是网络中极小路的数量, $F_j (1 \leq j \leq p)$ 表示第 j 条极小路 P_j 中通过的流量, $M_j = \min\{U_i \mid e_i \in C_i P_j\}$ 是极小路 P_j 的最大容量($1 \leq j \leq p$), $W_j = \sum_{e_i \in P_j} C_i$ 是单位流量通过 P_j 时的费用($1 \leq j \leq p$)。我们注意到,引理1实际上是一个没有目标函数的整数规划问题,Chen等^[17]提出的快速枚举法可以用来求解所有的可行流向量,然后再将每一个可行流向量通过关系式(6)转化为候选 (d,b) -MCV。

在步骤2)中,Yeh提出的有向圈验证法是相对高效的一种方法:对于给定的候选 (d,b) -MCV,如果网络中不存在有向圈,则该候选 (d,b) -MCV是真正的 (d,b) -MCV;否则不是 (d,b) -MCV。利用引理1求得的结果中会出现重复的 (d,b) -MCV,在步骤3)中,现有算法在去重时采用 (d,b) -MCV两两比较的方法,该方法虽然简单、易实现,但效率不高。

4 改进模型

为了提高 (d,b) -MCV的求解效率,本文将重点讨论在步骤1)中如何提升候选 (d,b) -MCV的求解效率;此外,针对 (d,b) -MCV两两比较去重时存在的效率瓶颈,本文将提出一种更加高效的 (d,b) -MCV去重方法。

首先,我们定义边 e_i 的容量下限 $LC_i (1 \leq i \leq m)$ 为当网络能够满足性能水平 d 时,边 e_i 应保持的最低容量状态。在最大容量向量 $\mathbf{U}$ 的基础上,我们进一步定义一个特殊的容量向量 $\mathbf{U}(0_i) = (U_1, \dots, U_{i-1}, 0, U_{i+1}, \dots, U_m)$,即将 $\mathbf{U}$ 的第 i 个分量设为0,其他分量保持不变。根据文献[8],给定性能水平 d ,边 e_i 的容量下限 $LC_i = \max\{d - F(\mathbf{U}(0_i)), 0\}$,并且对任意 (d,b) -MCV $\mathbf{X}$ 来说,一定满足 $x_i \geq LC_i (1 \leq i \leq m)$ 。利用该约束条件可得如下的改进模型。

定理 1 如果容量向量 $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是候选 (d,b) -MCV,则存在一个对应的流向量 $\mathbf{F}=(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_p)$ 满足如下条件:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_p = d \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_1 W_1 + \mathbf{F}_2 W_2 + \dots + \mathbf{F}_p W_p \leq b \quad (8)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_j \leq \min\{M_j, d\}, 1 \leq j \leq p \quad (9)$$

$$LC_i \leq \sum_{e_i \in P_j} \mathbf{F}_j \leq \min\{U_i, d\}, 1 \leq i \leq m \quad (10)$$

$$x_i = \sum_{e_i \in P_j} \mathbf{F}_j, 1 \leq i \leq m \quad (11)$$

需要指出的是,虽然定理1和引理1只有一个约束条件的差别,但候选 (d,b) -MCV在搜索方面仍会有较大的计算量差异,下面通过一个简单例子加以说明。图1是一个包含两

条极小路 $P_1 = \{e_1, e_2\}$ 和 $P_2 = \{e_3\}$ 的简单网络。令 $\mathbf{U}=(3, 2, 2)$, $C=(2, 1, 2)$, 则 $M_1=2, M_2=2, W_1=3, W_2=2$ 。假设性能水平 $d=3$, 费用约束 $b=8$, 则 $\min\{M_j, d\} = 2 (j=1, 2)$; $\min\{U_1, d\} = 3, \min\{U_2, d\} = \min\{U_3, d\} = 2$ 。根据引理1,求解候选 $(3,8)$ -MCV $\mathbf{X}$ 的数学模型如下:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 3 \quad (12)$$

$$3\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 \leq 8 \quad (13)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (14)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (15)$$

$$0 \leq x_1 = \mathbf{F}_1 \leq 3 \quad (16)$$

$$0 \leq x_2 = \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (17)$$

$$0 \leq x_3 = \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (18)$$

即

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 3 \quad (19)$$

$$3\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 \leq 8 \quad (20)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (21)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (22)$$

$$x_1 = \mathbf{F}_1 \quad (23)$$

$$x_2 = \mathbf{F}_1 \quad (24)$$

$$x_3 = \mathbf{F}_2 \quad (25)$$

因此,为了求解候选 $(3,8)$ -MCV,在理论上总共需要对9个流向量(由条件(22)和(23)决定)进行验证。

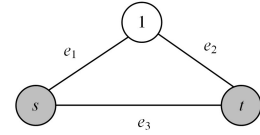


图1 一个简单网络

Fig. 1 A simple network

另一方面,因为 $d=3$,则容量下限 $LC_1 = \max\{0, d - F(\mathbf{U}(0_1))\} = \max\{0, 3 - 2\} = 1$,类似地, $LB_2 = 1, LB_3 = 1$ 。根据定理1,求解候选 $(3,8)$ -MCV $\mathbf{X}$ 的数学模型为:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 3 \quad (26)$$

$$3\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 \leq 8 \quad (27)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (28)$$

$$0 \leq \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (29)$$

$$1 \leq x_1 = \mathbf{F}_1 \leq 3 \quad (30)$$

$$1 \leq x_2 = \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (31)$$

$$1 \leq x_3 = \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (32)$$

即

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 3 \quad (33)$$

$$3\mathbf{F}_1 + 2\mathbf{F}_2 \leq 8 \quad (34)$$

$$1 \leq \mathbf{F}_1 \leq 2 \quad (35)$$

$$1 \leq \mathbf{F}_2 \leq 2 \quad (36)$$

$$x_1 = \mathbf{F}_1 \quad (37)$$

$$x_2 = \mathbf{F}_1 \quad (38)$$

$$x_3 = \mathbf{F}_2 \quad (39)$$

显然,为了求解候选 $(3,8)$ -MCV,在理论上总共需要对4个流向量(由条件(35)和(36)决定)进行验证。候选 $(3,8)$ -MCV作为典型的NP难问题,随着流向量的增加,该问题的复杂程度将呈指数增长。经过对比发现根据定理1求解候选 $(3,8)$ -MCV需要较少的计算量。下面我们进一步通过理论分析来阐明定理1的求解复杂度小于或等于引理1。

前面提到,快速枚举法可以用来求解候选 (d,b) -MCV,最近 Lamalelem 等^[18]提出将约束条件(7)嵌入快速枚举法的循环结构中能够显著提升枚举效率。基于该思想,本文利用改进的快速枚举法来求解定理 1 中的模型。由快速枚举法的求解程序^[17]可知,利用定理 1 和引理 1 求解可行流向量 $\mathbf{F}$ 的时间复杂度分别为 $O(\prod_{i=1}^{\lambda} q_k)$ 和 $O(\prod_{i=1}^{\lambda} q_k^*)$,其中 λ 是快速枚举法中对应每一层级循环的分组数量, q_k 和 q_k^* 是每组中执行枚举的次数,且 q_k 与条件(10)中的容量范围大小成正比例关系, q_k^* 与条件(5)中的容量范围大小成正比例关系。显然,条件(10)的容量范围小于或等于条件(5)中的容量范围,从而 $q_k \leq q_k^*$ 成立(实际上,多数情况下满足 $q_k < q_k^*$),由此可得 $O(\prod_{i=1}^{\lambda} q_k) \leq O(\prod_{i=1}^{\lambda} q_k^*)$ 成立,即定理 1 的求解复杂度小于或等于引理 1。

5 去重方法

类似引理 1,利用定理 1 求得的结果中也会出现重复的 (d,b) -MCV。如前所述,现有算法在去重时采用 (d,b) -MCV 两两比较的方法,该方法虽然简单但效率不高。后来,Forghani-elahabad 等^[12]提出了 (d,b) -MCV 关联数的概念,并通过 (d,b) -MCV 关联数来去重,但对于较大规模的网络,该方法在表示 (d,b) -MCV 关联数时很不方便。基于此,本文提出了一种高效的去重方法。首先引入超越数的概念,超越数是指不能作为整系数非零多项式方程的根的实数^[19],即如果 α 是超越数,则一定有 $\sum_{i=1}^m k_i \alpha^{i-1} \neq 0$,其中 $k_i (1 \leq i \leq m)$ 是整数。给定一个 (d,b) -MCV $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,称 $\Psi(X) = \sum_{i=1}^m x_i \alpha^{i-1}$ 为 X 的多项式值,则可以得到下面的重要结论。

定理 2 对于给定的 (d,b) -MCV $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 和 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 来说, $X=Y$ 当且仅当 $\Psi(X) = \Psi(Y)$ 。

证明:若 $X=Y$,显然 $\Psi(X) = \Psi(Y)$ 。若 $\Psi(X) = \Psi(Y)$,则 $\sum_{i=1}^m x_i \alpha^{i-1} = \sum_{i=1}^m y_i \alpha^{i-1}$,即 $\sum_{i=1}^m (x_i - y_i) \alpha^{i-1} = 0$ 。因为 α 是超越数,整系数多项式方程 $\sum_{i=1}^m (x_i - y_i) \alpha^{i-1} = 0$ 时必须满足方程的所有系数都等于 0,即 $x_i - y_i = 0 (1 \leq i \leq m)$ 成立,则有 $x_i = y_i (1 \leq i \leq m)$,即得 $X=Y$ 。

根据定理 2,每个 (d,b) -MCV X 与 $\Psi(X)$ 构成一一映射关系。基于此关系,首先计算 (d,b) -MCV 对应的多项式值 $\Psi(X)$,然后利用快速排序算法对所有的多项式值排序,即可找到对应的重复 (d,b) -MCV。假定总共有 σ 个 (d,b) -MCV,则需要 $O(m\sigma)$ 时间来计算 $\Psi(X)$,利用快速排序算法找到重复的 $\Psi(X)$ 需要 $O(\sigma \log \sigma)$ 时间,因此,该方法去重的时间复杂度为 $O(m\sigma) + O(\sigma \log \sigma) = O(\sigma \log \sigma)$ 。我们注意到,两两比较去重的时间复杂度为 $O(m\sigma^2)$,鉴于 $O(\sigma \log \sigma) < O(m\sigma^2)$,说明提出的方法在 (d,b) -MCV 去重方面具有明显的效率优势。

另外需要指出的是,数学家们目前已经发现了大量的超越数,譬如自然常数 e 、圆周率 π 、 $\log(\mu)$ (其中 μ 是正有理数且 $\mu \neq 1$) 和 $\sin(\theta)$ (其中 θ 是非零有理数)。从理论上来说,这些超越数都可以用来计算 $\Psi(X)$,但考虑到当网络规模较大时,如果超越数 α 的值太大,则 $\Psi(X)$ 的值会非常大,在

数值计算时会出现内存溢出;如果超越数 α 的值太小,则在计算 $\Psi(X)$ 时会由于有效数字的截断而产生较大的误差。从经验的角度来说, α 的值接近 1 比较好。特别地,在后面的数值实验中,对于较大的网络,取 $\alpha = \log(3) \approx 1.098612 (\mu=3)$ 来计算 $\Psi(X)$,所有重复 (d,b) -MCV 都被成功找到。

6 提出的 (d,b) -MCV 算法

数学中类似的现有文献[8-12]假定已知网络所有的极小路,事实上,目前已经有许多高效的极小路搜索算法,譬如 Bai 等^[20]提出的算法。对于给定的性能水平 d 和费用约束 b ,根据前面得到的理论结果,下面给出求解所有 (d,b) -MCV 的算法,算法的具体步骤如算法 1 所示。

算法 1

输入:多状态网络模型 $G(V, E, U, C)$ 、性能水平 d 、费用约束 b

输出:费用约束下的极小容量向量 (d,b) -MCV

Step1 计算 $M_j = \min\{U_i | e_i \in P_j\}$, $W_j = \sum_{e_i \in P_j} C_i (1 \leq j \leq p)$ 和 $LC_i = \max\{0, d - F(W(0_i))\} (1 \leq i \leq m)$;

Step2 利用改进的快速枚举法求解满足条件(7)-(10)的可行流向量,然后根据关系式(11)把可行流向量转换为候选 (d,b) -MCV,假设 $X^1, X^2, \dots, X^\sigma$ 是所有的候选 (d,b) -MCV;

Step3 利用有向圈验证法验证每个 $X^j (1 \leq j \leq \sigma)$ 是否是 (d,b) -MCV;

Step4 计算每个 (d,b) -MCV 的多项式值,利用快速排序算法识别并删去重复 (d,b) -MCV。

下面分析算法的时间复杂度,计算 M_j 和 W_j 需要 $O(mp)$ 时间,计算 LC_i 需要 $O(m^2 n \log n)$ 时间,因为 $p = O(2^m)$,所以步骤 1 的时间复杂度为 $O(mp) + O(m^2 n \log n) = O(mp)$ 。求解满足条件(7)-(10)的所有可行流向量需要花费 $O(\prod_{i=1}^{\lambda} q_k)$ 时间,把每个可行流向量转换为候选 (d,b) -MCV 需要 $O(mp\delta)$ 时间,其中 δ 代表可行流向量的数量,则步骤 2 得到的时间复杂度为 $O(mp\delta)$ 。验证有向圈需要 $O(n)$ 时间,因此步骤 3 的时间复杂度为 $O(n\delta)$ 。如前分析,步骤 4 需要 $O(\sigma \log \sigma)$ 时间删去重复 (d,b) -MCV,其中 σ 是所有 (d,b) -MCV 的数量。对于一般的连通网络,关系式 $O(n) \leq O(m) < O(p)$,且 $\sigma \leq \delta$ 成立。所以,算法总的时间复杂度为 $O(np) + O(mp) + O(mp\delta) + O(n\eta) + O(\sigma \log \sigma) = O(mp\delta)$,其中 δ 是满足条件(7)-(10)的所有可行流向量的数量。

7 算例与数值实验

7.1 算例

本节首先通过一个简单的算例来展示算法的求解过程,然后通过数值实验检验算法的效率。图 2 是多数文献^[8-12]都采用的算例网络,该网络有 4 个点,5 条边,4 条极小路: $P_1 = \{e_1, e_2\}$, $P_2 = \{e_1, e_3, e_5\}$, $P_3 = \{e_4, e_5\}$, $P_4 = \{e_4, e_3, e_2\}$,网络中各条边的容量信息如表 1 所列。

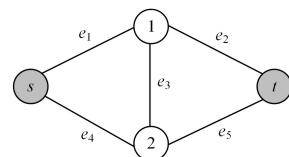


图 2 算例网络

Fig. 2 Example network

表 1 图 2 中各条边的容量数据

Table 1 Capacity data for each edge in Fig. 2

Edges	Capacityprobability distribution				Unit cost
	0	1	2	3	
e_1	0.012	0.033	0.125	0.830	3
e_2	0.015	0.056	0.929	—	1
e_3	0.110	0.890	—	—	1
e_4	0.013	0.049	0.938	—	1
e_5	0.016	0.035	0.949	—	3

下面计算网络能够把 3 单位的流量从源点 s 输送到汇点 t ,且总的传输费用成本不超过 14 的概率,即网络可靠性为 $Rel_{(3,14)}(d=3,b=14)$ 。首先用提出的算法求解所有的 $(3,14)$ -MCV,然后利用式(1)计算 $Rel_{(3,14)}$ 。 $(3,14)$ -MCV 的求解过程如下:

Step1 根据表 1 中的容量数据易得 $M_1=2,M_2=1,M_3=2,M_4=1,W_1=4,W_2=7,W_3=4,W_4=3,LC_1=\max\{0, d-F(W(0_1))\}=\max\{0,1\}=1$,类似地,可得 $LC_2=1,LC_3=0,LC_4=0,LC_5=1$ 。

Step2 利用改进快速枚举法求解满足如下条件的可行流向量 $F=(F_1,F_2,F_3,F_4)$:

$F_1+F_2+F_3+F_4=3$ (40)

$4F_1+7F_2+4F_3+3F_4\leq 14$ (41)

$0\leq F_1\leq 2$ (42)

$0\leq F_2\leq 1$ (43)

$0\leq F_3\leq 2$ (44)

$0\leq F_4\leq 1$ (45)

$1\leq F_1+F_2\leq 3$ (46)

$1\leq F_1+F_4\leq 2$ (47)

$0\leq F_2+F_4\leq 1$ (48)

$0\leq F_3+F_4\leq 2$ (49)

$1\leq F_2+F_3\leq 2$ (50)

则得到 3 个可行流向量 $F^1=(1,0,2,0),F^2=(1,0,1,1),F^3=(2,0,1,0)$ 。将每个可行流向量转换为候选 $(3,14)$ -MCV: $F^1\rightarrow X^1=(1,1,0,2,2),F^2\rightarrow X^2=(1,2,1,2,1),F^3\rightarrow X^3=(2,2,0,1,1)$;

Step3 利用有向圈验证法验证可得 X^1 是 $(3,14)$ -MCV,

类似可得, X^2 和 X^3 也是 $(3,14)$ -MCV;

Step4 $\Psi(X^1)=153.086,\Psi(X^2)=108.595,\Psi(X^3)=82.120$ (这里的网络很小,直接令 α 为自然常数 e);用快速排序算法容易得到没有重复值,因此 $X^1=(1,1,0,2,2),X^2=(1,2,1,2,1),X^3=(2,2,0,1,1)$ 是不重复的 $(3,14)$ -MCV。

即 $X^1=(1,1,0,2,2),X^2=(1,2,1,2,1),X^3=(2,2,0,1,1)$ 是网络所有的 $(3,14)$ -MCV,根据式(1)可得到 $Rel_{(3,14)}=0.939087$,即网络能够把 3 单位的需求流量从源点 s 输送到汇点 t ,且总的传输费用不超过 14 的概率为 0.939087。

7.2 数值实验

下面通过数值实验进一步检验算法的计算效率。如前所述,目前,Forghani-elahabad 等^[12]提出的算法被认为是最高效的算法,因此,下面的数值实验将把本文提出的算法与文献[12]中的算法进行比较,以此检验算法的计算效率。我们注意到求解 (d,b) -MCV 本身是 NP 难问题,这意味着求解 (d,b) -MCV 所花的时间会随着网络规模的增大呈指数增加。基于此,和现有文献一样,本文采用中等规模的网络开展数值实验,该网络如图 3 所示。

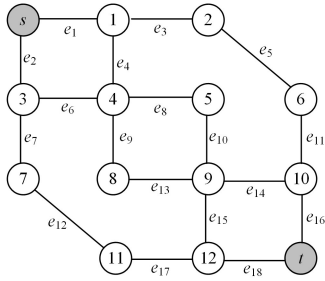


图 3 数值实验网络

Fig. 3 Numerical experimental network

在数值实验中,假定网络每条边的最大容量为 7,即 $U_i=7(1\leq i\leq 18)$,通过每条边的单位流费用为 3,即 $C_i=3(1\leq i\leq 18)$ 。两种算法都采用 MATLAB2009 编程实现,且运行的硬件环境为 Intel(R) Core(TM) i7-9700 3.0 GHz CPU, 16GB RAM。为了更清楚地展示两种算法的求解效率,我们针对多种不同容量性能水平 d 和费用约束 b 的组合进行了计算,结果如表 2 所列。

表 2 两种算法的计算结果

Table 2 Calculation results of two algorithms

Max-capacity Unit cost	(d,b) -MCV	The number of duplicate (d,b) -MCVs	The number of non-duplicate (d,b) -MCVs	T_{FK}	T
$U_i=7$ $C_i=3$ $(1\leq i\leq 18)$	$(7,149)$ -MCV	10162	7536	15.345	13.541
	$(8,165)$ -MCV	20595	7875	41.376	36.572
	$(9,172)$ -MCV	33130	7040	69.059	60.946
	$(10,189)$ -MCV	44950	6084	146.484	112.160
	$(11,201)$ -MCV	49540	4508	260.295	149.791
	$(12,215)$ -MCV	39272	2802	518.042	172.355

在计算结果中,我们感兴趣的包括重复 (d,b) -MCV 的数量、非重复 (d,b) -MCV 的数量、文献[12]算法的运行时间 T_{FK} 以及本文提出的算法的运行时间 T (时间单位为 s)。根据表 2 的结果可以看出:

(1)本文提出的算法的求解效率高于文献[12]算法的求解效率,对于求解不同类型的 (d,b) -MCV 和两种算法的求解效率的差别也不同。譬如,在求解 $(7,149)$ -MCV 和 $(8,165)$ -MCV 时,两种算法的求解效率的差别较小,而在求解 $(11,201)$ -MCV

和 $(12,215)$ -MCV 时,两种算法的求解效率的差别比较明显;特别地,文献[12]的算法求出所有的 $(11,201)$ -MCV 和 $(12,215)$ -MCV 所花费的时间分别为 260.295s 和 518.042s,但本文算法所消耗的时间分别为 149.791s 和 172.355s,大约分别为文献[12]的算法所需运行时间的 1/2 和 1/3。

(2)无论求解哪种类型的 (d,b) -MCV,计算结果中都出现了大量的重复 (d,b) -MCV,并且其数量超过了非重复 (d,b) -MCV 的数量,这充分说明识别并删去重复 (d,b) -MCV 是

一项必不可少的工作。而本文提出的 (d,b) -MCV 去重方法既容易实现,同时又具有更高的效率,可以在很大程度上帮助解决重复 (d,b) -MCV 问题。特别的,(12,215)-MCV 搜索过程中重复 (d,b) -MCV 的数量为 39272 个。

数值结果表明,本文算法相比于 Forghani-elahabad 等^[12]提出的算法具有明显的效率优势。为了更进一步地比较 d 或 b 分别改变对计算结果的影响,我们固定 $d=11$,令 b 从 180 依次增加 10,直到 230,又固定 $b=196$,令 d 从 7 依次增加到 12,分别针对不同情形。计算出 (d,b) -MCV 的结果,以及两种算法的运行时间,输出的结果如表 3、表 4 所列。根据表 3

表 3 固定 d 、改变 b 的计算结果
Table 3 Calculation results by fixing d and changing b

Max-capacity Unit cost	(d,b) -MCV	The number of duplicate (d,b) -MCVs	The number of non-duplicate (d,b) -MCVs	T_{FK}	T
$U_i=7$ $C_i=3$ ($1\leq i\leq 18$)	(11,180)-MCV	2418	1314	184.886	86.908
	(11,190)-MCV	21432	3612	198.707	97.831
	(11,200)-MCV	49450	4454	255.082	143.298
	(11,210)-MCV	49690	4586	314.233	175.147
	(11,220)-MCV	49720	4608	396.107	212.961
	(11,230)-MCV	49720	4616	497.380	259.126

表 4 改变 d 、固定 b 的计算结果
Table 4 Calculation results by changing d and fixing b

Max-capacity Unit cost	(d,b) -MCV	The number of duplicate (d,b) -MCVs	The number of non-duplicate (d,b) -MCVs	T_{FK}	T
$U_i=7$ $C_i=3$ ($1\leq i\leq 18$)	(7,196)-MCV	10312	8732	30.340	26.307
	(8,196)-MCV	20905	8451	78.717	65.214
	(9,196)-MCV	33922	7594	136.035	109.144
	(10,196)-MCV	45166	6190	172.039	127.868
	(11,196)-MCV	43098	4314	231.988	128.429
	(12,196)-MCV	1562	795	466.169	136.629

综上,本文提出的算法在求解 (d,b) -MCV 方面具有更高的效率,为费用约束下的多状态网络可靠性评估提供了一种更有效的方法。

结束语 可靠性和费用是衡量网络服务质量的两个核心指标。针对费用约束下的多状态网络可靠性评估问题,本文提出了更高效的 (d,b) -MCV 求解方法。首先,利用容量下限的概念,本文建立了 (d,b) -MCV 的改进数学模型;其次,本文提出并建立了 (d,b) -MCV 与实数之间的一一映射关系,基于此关系,重复 (d,b) -MCV 可以通过常用的排序算法进行快速识别。为了检验提出的算法的性能,通过数值实验将其和现有算法进行了比较,结果表明,本文提出的 (d,b) -MCV 方法拥有更好的计算效率。

传输时间也是度量网络服务效率的核心指标,因此,下一步研究有必要引入时间约束指标,即同时考虑费用和时间约束构建网络可靠性指标,并提出评估方法,这将有助于从多维的角度对网络的服务质量进行评估,从而得出更全面的分析结果。

参 考 文 献

[1] AVEN T. The reliability science:its foundation and link to risk science and other sciences [J]. Reliability Engineering & System Safety,2021,107863.
[2] WANG H G,DONG R S,QIAN J Y. An MDD algorithm for computing the reliability of node unreliable networks [J]. Computer Science,2016,43(1):154-158.

和表 4,我们可得出如下结论:
(1)当性能水平 $d=11$ 固定,预算费用 b 不断增加时,重复 (d,b) -MCV 和非重复 (d,b) -MCV 的数量都相应地不断增加;当预算费用 $b=196$ 固定,性能水平 d 不断增加时,重复 (d,b) -MCV 的数量先增加后减少,而非重复 (d,b) -MCV 的数量则不断减少。
(2)当性能水平 d 固定或预算费用 b 固定,相应地,两种算法在求解 (d,b) -MCV 时的运行时间都随着 b 或 d 的增加而增加。但本文的算法的求解效率仍然高于文献[12]的算法的求解效率。

[3] NIU Y F,HE C,FU D Q. Reliability assessment of a multi-state distribution network under cost and spoilage considerations[J]. Annals of Operations Research,2021,309(1):189-208.
[4] JANE C C,LAIH Y W. Evaluating cost and reliability integrated performance of stochastic logistics systems [J]. Naval Research Logistics,2012,59:577-586.
[5] ZIO E. Some challenges and opportunities in reliability engineering [J]. IEEE Transactions on Reliability,2016,65(4):1769-1782.
[6] LIN Y K. System reliability evaluation for a multi-state supply chain network with failure nodes using minimal paths [J]. IEEE Transactions on Reliability,2009,58(1):34-40.
[7] NIU Y F,GAO Z Y,LAM W H K. Evaluating the reliability of a stochastic distribution network in terms of minimal cuts [J]. Transportation Research Part E,2017,100:75-97.
[8] NIU Y F,LAM W H K,GAO Z Y. An efficient algorithm for evaluating logistics network reliability subject to distribution cost [J]. Transportation Research Part E,2014,67:175-189.
[9] LIN J S. Reliability evaluation of capacitated-flow networks with budget constraints [J]. IIE Transactions,1998,30(12):1175-1180.
[10] LIN Y K. Reliability of a stochastic-flow network with unreliable branches & nodes under budget constraints [J]. IEEE Transactions on Reliability,2004,53(3):381-387.
[11] YEH W C. A new approach to evaluate reliability of multistate networks under the cost constraint [J]. Omega,2005,33(3):203-209.

[12] FORGHANI-ELAHABAD M,KAGAN N. Reliability evaluation of a stochastic-flow network in terms of minimal paths with budget constraint [J]. IISE Transactions,2019,51(5):547-558.

[13] XU X Z,NIU Y F,SONG Y F. Computing the reliability of a stochastic distribution network subject to budget constraint [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 216: 107947.

[14] BAI G H,ZUO M J,TIAN Z G. Ordering heuristics for reliability evaluation of multi-state networks [J]. IEEE Transactions on Reliability,2015,64(3):1015-1023.

[15] BAI G H, TIAN Z, ZUO M J. Reliability evaluation of multi-state networks;An improved algorithm using state-space decomposition and experimental comparison [J]. IISE Transactions, 2018,50(5):407-418.

[16] LIU T,BAI G H,TAO J Y,et al. An improved bounding algorithm for approximating multi-state network reliability based on state-space decomposition method [J]. Reliability Engineering & System Safety,2021,210;107500.

[17] CHEN S G,LIN Y K. Searching for d-MPs with fast enumeration [J]. Journal of Computational Science,2016,17;139-147.

[18] LAMALEM Y,HOUSNI K. An improved algorithm to search

all d-MPs for a multi-state systems [C] // IEEE 2nd International Conference on Electronics, Control, Optimization and Computer Science. IEEE,2020;1-6.

[19] SIEGEL C L. Transcendental Numbers [M]. Harbin; Harbin Institute of Technology Press,2011.

[20] BAI G, TIAN Z, ZUO M J. An improved algorithm for finding all minimal paths in a network [J]. Reliability Engineering & System Safety,2016,150;1-10.



XU Xiu-zhen, born in 1981, Ph.D, assistant professor. Her main research interests include network reliability and logistics management.



NIU Yi-feng, born in 1981, Ph.D, associate professor, master supervisor. His main research interests include network reliability and transportation network analysis.