计算机科学
COMPUTER SCIENCE

基于概念复合的对偶三支概念格及其概念约简

刘津, 米据生, 李仲玲, 李美争

引用本文

刘津, 米据生, 李仲玲, 李美争.基于概念复合的对偶三支概念格及其概念约简[J]. 计算机科学, 2023, 50(6): 122-130.

LIU Jin, MI Jusheng, LI Zhongling, LI Meizheng. Dual Three-way Concept Lattice Based on Composition of Concepts and Its Concept Reduction [J]. Computer Science, 2023, 50(6): 122-130.

计算机科学 COMPUTER SCIENCE
http://www.jsjkx.com
DOI:10.11896/jsjkx.220800109

基于概念复合的对偶三支概念格及其概念约简

刘　津[1]　米据生[1,2]　李仲玲[1,2,3]　李美争[4]
1 河北师范大学数学科学学院　石家庄 050024
2 河北省计算数学与应用重点实验室(河北师范大学)　石家庄 050024
3 河北师范大学汇华学院　石家庄 050024
4 河北师范大学计算机与网络空间安全学院　石家庄 050024
(2878133706@qq.com)

摘　要　三支概念格通过正负算子相结合,既表示出了共同拥有的信息,又表示出了共同不拥有的信息,是对经典概念格的扩展。但在处理一些实际问题时,人们也会从反向出发,考虑集合的补集可能不拥有的信息和可能拥有的信息,对偶三支概念格应运而生。文中提出了一种基于形式背景的对偶概念及其补背景中对偶概念的复合来构造对偶三支概念格的方法,经验证,通过概念复合方法得到的对偶三支概念与通过对偶三支算子得到的概念相同。进一步讨论了基于可辨识矩阵求解对偶三支概念格的属性约简方法,并借助此思想,给出了基于概念可辨识矩阵的对偶三支概念约简方法。

关键词:概念格;对偶三支概念;属性约简;概念约简;辨识矩阵
中图法分类号　TP18

Dual Three-way Concept Lattice Based on Composition of Concepts and Its Concept Reduction

LIU Jin[1], MI Jusheng[1,2], LI Zhongling[1,2,3] and LI Meizheng[4]
1 College of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China
2 Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang 050024, China
3 HuiHua College of Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China
4 College of Computer and Cyberspace Security, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China

Abstract　Three-way concept lattice not only represents the information jointly owned, but also represents the information that is not owned by each other by combining positive operators and negative operators. It is an extension of the classical concept lattice. However, when dealing with some practical problems, we sometimes start from the reverse, considering the information that the complementary sets may not have and the information that they may have, so the dual three-way concept lattice came into being. In this paper, a novel method to construct dual three-way concept lattices based on the composition of dual concepts in formal context and its complementary context is proposed. It is proved that the dual three-way concepts obtained by concepts composition are the same as those obtained by dual three-way operators. Then, we discuss the attribute reduction method of dual three-way concept lattices based on discernibility matrices. With the help of this idea, this paper proposes an approach to reducing the dual three-way concepts based on concept discernibility matrices.

Keywords　Concept lattice, Dual three-way concept, Attribute reduction, Concept reduction, Discernibility matrix

形式概念分析[1-2],是德国数学家 Wille 于 1982 年提出的一种依托于形式背景构建出的概念格来进行知识发现、知识处理和规则提取的强有力的数据分析工具。该理论至今已得到了充分的发展,被广泛应用于软件工程、机器学习、信息检索、模式识别、计算机网络、社会网络分析、决策分析、数据挖掘等领域[3-6]。由对象集、属性集和它们之间的相互关系(二元关系)构成的形式背景,以及由外延和内涵构成的形式概念,是形式概念分析的两个基本概念。概念格是形式概念之间一种有序的层次结构,它表明了概念之间的泛化和特化关系。Hasse 图实现了这种概念偏序关系的可视化。

加拿大学者 Yao[7] 提出了三支决策的概念,并用一个统一的框架来描述它。将形式概念分析与三支决策相结合形成

到稿日期:2022-08-11　返修日期:2022-11-27
基金项目:国家自然科学基金(62076088,12101182,61502144);河北省高等学校科学技术研究项目(BJ2019014);河北省研究生创新资助项目(CXZZBS2022068)
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(62076088,12101182, 61502144), Science and Technology Project of Hebei Education Department(BJ2019014) and Postgraduate Innovation Funding Project of Hebei Province(CXZZBS2022068).
通信作者:米据生(mijsh@263.net)

的三支概念理论[8-11]，实现了对经典概念模型的扩展。Qi等[12]讨论了三支概念格与经典概念格之间的关系，Mao等[13]给出了三支概念与经典概念之间的关系，Zhao 等[14]从映射的角度讨论了不同的三支概念格之间的关系。有学者将三支概念分析与模糊形式背景相结合定义了模糊三支概念格[15]，并探究了模糊三支概念格与模糊概念格之间的关系[16]。

去除冗余的数据是从形式背景中获取信息首要考虑的问题，约简则是能保证属性所携带的信息保持不变的极小属性子集。众多学者对此进行了大量研究，其中基于可辨识属性矩阵的约简方法被广泛应用[17-18]。Wang 等[19]提出了一种基于概念可辨识矩阵的概念约简[20]方法。Ren 等[21]讨论了三支概念格的 4 种属性约简方法，并将这几种方法进行了分析比较。

通常，人们都是从正向研究特定目标集的性质，然而在实际应用过程中会发现，从负向角度去研究目标集补集的性质也是同等重要的，即考虑目标集的补集所具有的性质。Ma等[22]首先给出了对偶概念格的公理化描述；Jiang 等[23]由此讨论了对偶概念格的属性约简；Guo 等[24]将区间集思想与对偶概念格相结合，探究了对偶区间集概念格上区间集协调集的判定方法；Zhi 等[25]给出了对偶三支概念格的公理化描述，并讨论了其与经典对偶概念格的关系。

本文对对偶三支概念格进行了系统的分析。第 1 节介绍了形式背景下的正、负对偶算子及由此生成的关于对偶三支算子的基本内容；第 2 节将形式背景及其补背景下的对偶概念加以复合，进而构造对偶三支概念格；第 3 节以对偶 OE 概念格为例，提出了基于可辨识矩阵进行属性约简的方法；第 4 节提出了基于概念可辨识矩阵进行概念约简的方法；最后总结全文。

1　相关理论基础

首先对形式背景的正、负对偶算子及其相关知识进行简单回顾，接着介绍对偶三支算子的相关知识。

定义 1[2,25]　三元组 $K=(G,M,I)$ 为一个形式背景，其中 G 为非空有限对象集，M 为非空有限属性集，I 为 G 和 M 之间的二元关系，$I\subseteq G\times M$。$\forall g\in G, m\in M$，若 $(g,m)\in I$，则表示对象 g 具有属性 m；若 $(g,m)\notin I$，则表示对象 g 不具有属性 m。

二元关系 I 的补定义为：$I^c=(G\times M)-I$。基于此，将三元组 $K^c=(G,M,I^c)$ 称为形式背景 K 的补背景。

定义 2[22]　设 (G,M,I) 为形式背景，在对象幂集 $P(G)$ 和属性幂集 $P(M)$ 上分别定义算子：$\forall X\in P(G), B\in P(M)$：

$$X^{\#}=\{a\in M \mid \exists x\in G, x\in X^c \wedge (x,a)\notin I\}$$

$$B^{\#}=\{x\in G \mid \exists a\in M, a\in B^c \wedge (x,a)\notin I\}$$

其中，X^c 和 B^c 分别为集合 X 和集合 B 的补集。

定义 3[22-23]　如果二元组 (X,B) 满足 $X=B^{\#}$ 且 $B=X^{\#}$，则称 (X,B) 为对偶形式概念，简称对偶概念。其中，X 为对偶概念的外延，B 为对偶概念的内涵。显然，$(X^{\#\#}, X^{\#})$ 和 $(B^{\#}, B^{\#\#})$ 都是对偶概念。

设 (X_1,B_1) 和 (X_2,B_2) 是形式背景 (G,M,I) 的两个对偶概念，概念间的泛化－特化关系 $\leqslant_d$ 定义为：

$$(X_1,B_1)\leqslant_d (X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow B_2\subseteq B_1$$

若不存在对偶概念 (Y,C) 使得

$$(X_1,B_1)<_d (Y,C)<_d (X_2,B_2)$$

则称 (X_1,B_1) 为 (X_2,B_2) 的子概念，称 (X_2,B_2) 为 (X_1,B_1) 的父概念，记作 $(X_1,B_1)\prec_d (X_2,B_2)$。

形式背景 (G,M,I) 的全体对偶概念连同"$\leqslant_d$"构成一个完备格，称为对偶概念格，记作 $DL(G,M,I)$；且有：

$$(X_1,B_1)\wedge_d (X_2,B_2)=((X_1\cap X_2)^{\#\#}, B_1\cup B_2)$$

$$(X_1,B_1)\vee_d (X_2,B_2)=(X_1\cup X_2, (B_1\cap B_2)^{\#\#})$$

例 1　形式背景 $K=(G,M,I)$ 如表 1 所列，其中 $G=\{1,2,3,4\}$，$M=\{a,b,c,d,e\}$。其对应的对偶概念格如图 1 所示。

表 1　形式背景 $K=(G,M,I)$

Table 1　Formal context $K=(G,M,I)$

	a	b	c	d	e
1	×	×	×	×	
2	×	×	×		
3	×	×	×		×
4				×	

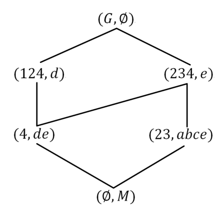

图 1　形式背景 $K=(G,M,I)$ 生成的对偶概念格 $DL(G,M,I)$

Fig. 1　Dual concept lattices $DL(G,M,I)$ generated by formal context $K=(G,M,I)$

性质 1[26]　设 (G,M,I) 为形式背景，$\forall X_1, X_2\in P(G)$，$B_1, B_2\in P(M)$，有以下结论成立：

(1) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow X_2^{\#}\subseteq X_1^{\#}$，$B_1\subseteq B_2\Rightarrow B_2^{\#}\subseteq B_1^{\#}$；

(2) $X\supseteq X^{\#\#}$，$B\supseteq B^{\#\#}$；

(3) $X^{\#}=X^{\#\#\#}$，$B^{\#}=B^{\#\#\#}$；

(4) $X\supseteq B^{\#}\Leftrightarrow B\supseteq X^{\#}$；

(5) $(X_1\cap X_2)^{\#}=X_1^{\#}\cup X_2^{\#}$，$(B_1\cap B_2)^{\#}=B_1^{\#}\cup B_2^{\#}$；

(6) $(X_1\cup X_2)^{\#}\subseteq X_1^{\#}\cap X_2^{\#}$，$(B_1\cup B_2)^{\#}\subseteq B_1^{\#}\cap B_2^{\#}$。

定义 4[26]　设 (G,M,I) 为形式背景，一对对偶负算子定义如下：$\forall X\in P(G), B\in P(M)$：

$$X^{\bar{\#}}=\{a\in M \mid \exists x\in G, x\in X^c \wedge (x,a)\in I\}$$

$$B^{\bar{\#}}=\{x\in G \mid \exists a\in M, a\in B^c \wedge (x,a)\in I\}$$

将正、负对偶算子相结合，可得到两对对偶三支算子。

定义 5[25]　设 (G,M,I) 为形式背景，在 $P(G)$ 和 $P(M)\times P(M)$ 上定义一对对偶 OE 算子：$\forall X\in P(G), A, B\in P(M)$：

$$X^{\triangleright}=(X^{\#}, X^{\bar{\#}})$$

$$(A,B)^{\triangleleft}=\{x\in G \mid x\in A^{\#} \text{ 或 } x\in B^{\bar{\#}}\}=A^{\#}\cup B^{\bar{\#}}$$

若 $X^{\triangleright}=(A,B)$ 且 $(A,B)^{\triangleleft}=X$，则称 $(X,(A,B))$ 为对偶 OE 概念，其中 X 称为对偶 OE 概念 $(X,(A,B))$ 的外延，(A,B) 称为对偶 OE 概念 $(X,(A,B))$ 的内涵。

定义 6[25]　设 (G,M,I) 为形式背景，在 $P(M)$ 和 $P(G)\times$

$P(G)$上定义一对对偶 AE 算子：$\forall A\in P(M), X,Y\in P(G)$：

$$A^{\triangleright}=(A^{\#},A^{\bar{\#}})$$

$$(X,Y)^{\triangleleft}=\{a\in M \mid a\in X^{\#} \text{ 或 } a\in Y^{\bar{\#}}\}=X^{\#}\cup Y^{\bar{\#}}$$

若$(X,Y)^{\triangleleft}=A$ 且$A^{\triangleright}=(X,Y)$，则称$((X,Y),A)$为对偶 AE 概念，其中 A 称为对偶 AE 概念$((X,Y),A)$的内涵，(X,Y)称为对偶 AE 概念$((X,Y),A)$的外延。

2 基于对偶概念的复合构造对偶三支概念格

由构建三支概念格的新方法[9]可知，在对偶三支概念分析中可以利用两种信息：1)由形式背景提供的集合的补可能不拥有的信息；2)由形式背景的补背景提供的集合的补可能拥有的信息。因此，可以利用形式背景及其补背景来构造对偶三支概念格。

本节介绍对象诱导的对偶三支概念格的生成方法，类似地可得到属性诱导的对偶三支概念格。

定义 7 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。定义面向对象的组合算子$+^d_{OE}$：$\forall(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，

$$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$$

将通过这种组合方式得到的三元组称为候选对偶 OE 概念，形式背景的所有候选对偶 OE 概念构成的集合记为 $CDOE(K)$。

下面给出某些候选对偶 OE 概念是对偶 OE 概念的一些情况。

定理 1 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。$\forall(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，若$X_1=X_2$，则$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1,(B_1,B_2))$是一个对偶 OE 概念。

证明：根据对偶 OE 概念的定义，需要证明的是：1)$B_1=X_1^{\#},B_2=X_1^{\bar{\#}}$；2)$X_1=B_1^{\#}\cup B_2^{\bar{\#}}$。

一方面，因为$(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，则有$B_1=X_1^{\#},B_2=X_2^{\bar{\#}}$。又由于$X_1=X_2$，因此$B_2=X_1^{\bar{\#}}$成立，1)得证。

另一方面，由$(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$可得$X_1=B_1^{\#},X_2=B_2^{\bar{\#}}$，因为$X_1=X_2$，所以$X_1=B_2^{\bar{\#}}$成立，因此$X_1=B_1^{\#}\cup B_2^{\bar{\#}}$，2)得证。

通过上述定理，显然有以下推论成立。

推论 1 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。若$(G,\emptyset)\in DL(K),(G,\emptyset)\in DL(K^c)$，则$(G,(\emptyset,\emptyset))$为一个对偶 OE 概念。

推论 2 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。若$(\emptyset,M)\in DL(K),(\emptyset,M)\in DL(K^c)$，则$(\emptyset,(M,M))$为一个对偶 OE 概念。

下述定理给出候选对偶 OE 概念的一些性质。

定理 2 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格，$\forall(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$。对于候选对偶 OE 概念$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$，有如下结论成立：

(1)$(X_1\cup X_2)^{\#}\subseteq B_1,(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subseteq B_2$；

(2)$X_1\cup X_2=B_1^{\#}\cup B_2^{\bar{\#}}$。

证明：因为

$$(X_1\cup X_2)^{\#}\subseteq(X_1^{\#}\cap X_2^{\#})\subseteq X_1^{\#}=B_1$$

$$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subseteq(X_1^{\bar{\#}}\cap X_2^{\bar{\#}})\subseteq X_2^{\bar{\#}}=B_2$$

所以(1)成立。

由于$(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，

因此$X_1=B_1^{\#},X_2=B_2^{\bar{\#}}$，故$X_1\cup X_2=B_1^{\#}\cup B_2^{\bar{\#}}$，(2)得证。

定理 3 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。$\forall(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，若$(X_1\cup X_2)^{\#}=B_1$且$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$，则$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$是一个对偶 OE 概念。将对偶 OE 概念的全体记为 $DOEL(K)$。

证明：已知$(X_1\cup X_2)^{\#}=B_1$且$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$。

对于$(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，有$X_1=B_1^{\#},X_2=B_2^{\bar{\#}}$，即$X_1\cup X_2=B_1^{\#}\cup B_2^{\bar{\#}}$。根据对偶 OE 概念的定义，$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$为一个对偶 OE 概念。

经验证可知，通过对偶概念复合得到的对偶 OE 概念与通过对偶 OE 算子得到的对偶 OE 概念相同。

由于存在一些候选对偶 OE 概念不是对偶 OE 概念，我们给出如下定义。

定义 8 设 $DL(K)$和 $DL(K^c)$是形式背景 $K=(G,M,I)$及其补背景$K^c=(G,M,I^c)$的对偶概念格。若有$(X_1\cup X_2)^{\#}\subset B_1$或$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subset B_2$，则$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$是冗余对偶 OE 概念。冗余对偶 OE 概念的全体记为 $RDOE(K)$。

定理 4 $(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$是冗余对偶 OE 概念$\Leftrightarrow(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$不是对偶 OE 概念。

证明：(必要性)任取一个冗余对偶 OE 概念：

$$(X_1,B_1)+^d_{OE}(X_2,B_2)=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$$

则$(X_1\cup X_2)^{\#}\subset B_1$或$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subset B_2$成立。这显然不能同时满足$(X_1\cup X_2)^{\#}=B_1$和$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$，因此冗余对偶 OE 概念一定不是对偶 OE 概念。

(充分性)对于候选对偶 OE 概念$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$，有$(X_1\cup X_2)^{\#}\subseteq B_1,(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subseteq B_2$。若$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$不是对偶 OE 概念，则$(X_1\cup X_2)^{\#}=B_1$且$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$不成立，即$(X_1\cup X_2)^{\#}\subset B_1$或$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subset B_2$成立，此时$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))$为冗余对偶 OE 概念。

由上述定义和定理可知，对偶 OE 概念集和冗余对偶 OE 概念集相对于候选对偶 OE 概念集是互补的，因此有下述定理成立。

定理 5 $DOEL(K)=CDOE(K)-RDOE(K)$。

证明：一方面，任取$(X,(B_1,B_2))\in DOEL(K)$，则存在$(X_1,B_1)\in DL(K),(X_2,B_2)\in DL(K^c)$，满足$X_1\cup X_2=X$，从而可以得出$(X,(B_1,B_2))=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\in CDOE(K)$。又由于$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\in DOEL(K)$，因此$(X_1\cup$

$X_2)^{\#}=B_1$且$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$成立，故$(X,(B_1,B_2))=(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\notin RDOE(K)$。从而有$(X,(B_1,B_2))\in CDOE(K)-RDOE(K)$，即$DOEL(K)\subseteq CDOE(K)-RDOE(K)$。

另一方面，任取$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\in CDOE(K)-RDOE(K)$。因为$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\in CDOE(K)$，则有$(X_1\cup X_2)^{\#}\subseteq B_1$，$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subseteq B_2$。又由$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\notin RDOE(K)$，可得$(X_1\cup X_2)^{\#}\subset B_1$和$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}\subset B_2$均不成立，即$(X_1\cup X_2)^{\#}=B_1$和$(X_1\cup X_2)^{\bar{\#}}=B_2$同时成立。因此$(X_1\cup X_2,(B_1,B_2))\in DOEL(K)$，即$DOEL(K)\supseteq CDOE(K)-RDOE(K)$。

综上，$DOEL(K)=CDOE(K)-RDOE(K)$得证。

对偶三支概念分析是经典形式概念分析的一种推广。对于对象诱导对偶三支概念$(X,(A,B))$，其中A表示X^c中至少一个对象不拥有的属性集，B表示X^c中至少一个对象拥有的属性集，X表示不具有A^c中至少一个属性或至少具有B^c中一个属性的对象的集合。对偶三支概念模型的提出，对挖掘形式背景所蕴含的潜在信息起到了至关重要的作用。

三支概念格的构造是三支概念分析的基础，上述构造对偶三支概念格的方法是对现有对偶三支概念格构造方法的有益补充。

例2(接例1)　对于形式背景$K=(G,M,I)$，其补背景$K^c=(G,M,I^c)$如表2所列，其补背景所对应的概念格如图2所示。形式背景$K=(G,M,I)$的对偶OE概念格如图3所示。

表2　形式背景$K=(G,M,I)$的补背景K^c

Table 2　Complementary context K^c of formal context $K=(G,M,I)$

	a	b	c	d	e
1					×
2				×	×
3				×	
4	×	×	×		×

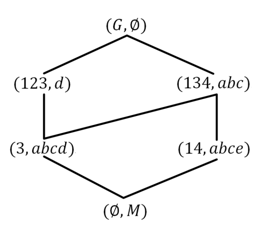

图2　补背景的概念格$DL(K^c)$

Fig. 2　Conceptl attice $DL(K^c)$ of complementary context

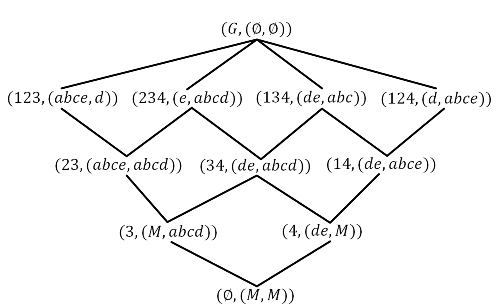

图3　形式背景K的对偶OE概念格$DOEL(K)$

Fig. 3　Dual OE concept lattice $DOEL(K)$ of formal context K

3　对偶*OE*概念格的属性约简

首先给出形式背景$K=(G,M,I)$中对象集是对偶OE概念外延的充要条件。记K中所有对偶OE概念的外延集为：$Ext_{DOEL}(G,M,I)=\{X\mid(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)\}$。

定理6　设$K=(G,M,I)$为形式背景，则$Ext_{DOEL}(G,M,I)=\{X\subseteq G\mid X^{\#\#}\cup X^{\bar{\#}\bar{\#}}=X\}$。

证明：设$(X,(A,B))$是$K=(G,M,I)$的一个对偶OE概念，则有$X^{\triangleright}=(A,B)$，即$(X^{\#},X^{\bar{\#}})=(A,B)$。且$(A,B)^{\triangleleft}=X$，即有$A^{\#}\cup B^{\bar{\#}}=X$成立。因此有$X^{\#\#}\cup X^{\bar{\#}\bar{\#}}=X$。反之，若$X^{\#\#}\cup X^{\bar{\#}\bar{\#}}=X$，显然$(X,(X^{\#},X^{\bar{\#}}))$是一个对偶$OE$概念。

定义9　设$K=(G,M,I)$为形式背景，若对于属性子集$D\subseteq M$，有：

$$Ext_{DOEL}(G,M,I)=Ext_{DOEL}(G,D,I_D)$$

则称D为对偶OE概念格的协调集。若$\forall d\in D$，都有：

$$Ext_{DOEL}(G,D-\{d\},I_{D-\{d\}})\neq Ext_{DOEL}(G,M,I)$$

则称D为对偶OE概念格的约简。

受文献[22]的启发，我们给出用辨识矩阵和辨识函数求对偶OE概念格属性约简的方法。

定义10　设$K=(G,M,I)$为形式背景，对任意$(X,(A,B)),(Y,(C,D))\in DOEL(G,M,I)$，将

$$DIS_{DOEL}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))=\begin{cases}(A-C,B-D), & (X,(A,B))\prec_d(Y,(C,D))\\ \emptyset, & 其他\end{cases}$$

称为$(X,(A,B))$和$(Y,(C,D))$的对偶OE概念可辨识属性集。其中，“$\prec_d$”为对偶OE概念之间的父-子关系。

进一步，$K=(G,M,I)$的对偶OE概念可辨识属性矩阵定义为：

$$\Lambda_{DOEL}=(DIS_{DOEL}((X,(A,B)),(Y,(C,D))))$$

下面给出属性子集保持对偶OE概念外延不变的充要条件。

定理7　设$K=(G,M,I)$为形式背景，$B\subseteq M$且$X\in Ext_{DOEL}(G,M,I)$，则$X^{\triangleright_B\triangleleft_B}=X$的充要条件是$B\cap DIS_{DOEL}((X,X^{\triangleright_M}),(Y,(C,D)))\neq\emptyset$。其中，$(Y,(C,D))$为$(X,X^{\triangleright_M})$的所有父对偶$OE$概念集$PC(X,X^{\triangleright_M})$中的任一概念。

证明：对于$A,B,C,D\subseteq M$，有如下规定：$(A,B)\subset(C,D)$表示$A\subset C$且$B\subseteq D$或$A\subseteq C$且$B\subset D$，以及$B\cap(C,D)=(B\cap C,B\cap D)$。

(必要性)设$X^{\triangleright_B\triangleleft_B}=X$且$(Y,(C,D))\in PC(X,X^{\triangleright_M})$。一方面，若$(Y,(C\cap B,D\cap B))\in DOEL(G,M,I)$，则由$X\subset Y$可得$(C\cap B,D\cap B)\subset X^{\triangleright_B}=(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)$，这等价于$B\cap((X^{\#_M}-C)\cup(X^{\bar{\#}_M}-D))\neq\emptyset$。显然，$B\cap DIS_{DOEL}((X,X^{\triangleright_M}),(Y,(C,D)))\neq\emptyset$。

另一方面，若$(Y,(C\cap B,D\cap B))\notin DOEL(G,M,I)$，则$X\subset Y\subset(C\cap B,D\cap B)^{\triangleleft_B}$，因此$(C\cap B,D\cap B)\subseteq X^{\triangleright_B}$。另外，若$X^{\triangleright_B}=(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)=(C\cap B,D\cap B)$，则有：

$$\begin{aligned}X&=X^{\triangleright_B\triangleleft_B}\\&=((X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B))^{\triangleleft_B}\\&=(C\cap B,D\cap B)^{\triangleleft_B}\end{aligned}$$

与 $X\subset(C\cap B,D\cap B)^{\lhd_B}$ 矛盾。因此必定有 $(C\cap B,D\cap B)\subset X^{\lhd_B}$，即 $(C\cap B,D\cap B)\subset(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)$。显然，$B\cap DIS_{DOEL}((X,X^{\rhd_M}),(Y,(C,D)))\neq\emptyset$。

（充分性）假设 $\forall(Y,(C,D))\in PC(X,X^{\rhd_M})$，有 $B\cap DIS_{DOEL}((X,X^{\rhd_M}),(Y,(C,D)))\neq\emptyset$ 且 $X^{\rhd_B\lhd_B}\neq X$，此时有 $X^{\rhd_B\lhd_B}=X^{\rhd_B\lhd_M}\subset X$。因为 $(X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M})\in DOEL(G,M,I)$，可得 $(X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M})<_d(X,X^{\rhd_M})$。另外，显然 $(X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M})\prec_d(X,X^{\rhd_M})$。否则，若存在 $(Z,(E,F))\in DOEL(G,M,I)$，使得 $(X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M})\prec_d(Z,(E,F))<_d(X,X^{\rhd_M})$，$X^{\rhd_M}\subset(E,F)\subset X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M}$，故有 $(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)\subseteq(E\cap B,F\cap B)\subseteq(X^{\rhd_B\lhd_M\#_M}\cap B,X^{\rhd_B\lhd_M\bar{\#}_M}\cap B)$。

由假设可知，必有 $(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)\subset(E\cap B,F\cap B)$，且由于 $X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M}\subseteq X^{\rhd_B}$，则有 $X^{\rhd_B}=(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)\subset(E\cap B,F\cap B)\subseteq X^{\rhd_B}$。这显然不成立。因此，必有 $(X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M})\prec_d(X,X^{\rhd_M})$。

由假设条件可得 $B\cap DIS_{DOEL}((X^{\rhd_B\lhd_M},X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M}),(X,X^{\rhd_M}))\neq\emptyset$，即 $(X^{\#_M}\cap B,X^{\bar{\#}_M}\cap B)\subset(X^{\rhd_B\lhd_M\#_M}\cap B,X^{\rhd_B\lhd_M\bar{\#}_M}\cap B)$，由此可得 $X^{\rhd_B}\subset X^{\rhd_B\lhd_M\rhd_M}\cap(B,B)\subseteq X^{\rhd_B}\cap(B,B)=X^{\rhd_B}$，显然不成立。故假设不成立。因此有 $X^{\rhd_B\lhd_B}=X$。

为了表述简洁，若 $DIS_{DOEL}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))=(E,F)$，则也用 $E\cup F$ 代表 $DIS_{DOEL}((X,(A,B)),(Y,(C,D)))$。

基于上述定义和定理，下面给出形式背景基于对偶 OE 概念格的对偶 OE 辨识函数。

定义 11 设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，则对偶 OE 辨识函数定义为：

$$f(\Lambda_{DOEL})=\bigwedge_{H\in\Lambda_{DOEL}}(\bigvee_{h\in H}h)$$

利用吸收律和分配律，可将对偶 OE 辨识函数转化为极小析取范式，利用其各析取项可以得到形式背景 K 的所有对偶 OE 属性约简。

例 3（接例 2） 对于上述形式背景 $K=(G,M,I)$，已知其对偶 OE 概念共 11 个（$(G,(\emptyset,\emptyset))$，$(123,(abce,d))$，$(234,(e,abcd))$，$(134,(de,abc))$，$(124,(d,abce))$，$(23,(abce,abcd))$，$(34,(de,abcd))$，$(14,(de,abce))$，$(3,(M,abcd))$，$(4,(de,M))$，$(\emptyset,(M,M))$），并将这 11 个概念分别标记为 C_1，C_2，…，C_{11}，则对偶 OE 概念的对偶 OE 辨识矩阵如表 3 所列。

表 3 对偶 OE 概念格的辨识矩阵

Table 3 Discernibility matrix of dual OE concept lattice

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
C_1											
C_2	$(abce,d)$										
C_3	$(e,abcd)$										
C_4	(de,abc)										
C_5	$(d,abce)$										
C_6		$(\emptyset,abc)$	$(abc,\emptyset)$								
C_7			$(d,\emptyset)$	$(\emptyset,d)$							
C_8				$(\emptyset,e)$	$(e,\emptyset)$						
C_9						$(d,\emptyset)$	$(abc,\emptyset)$				
C_{10}							$(\emptyset,e)$	$(\emptyset,d)$			
C_{11}									$(\emptyset,e)$	$(abc,\emptyset)$	

对于表 3，若 C_i 是 C_j 的子概念，则 C_i 和 C_j 之间的对偶 OE 可辨识属性集（即 $DIS_{DOEL}(C_i,C_j)$）为表 3 中第 i 行第 j 列上的元素。由此可以得出此概念格的辨识函数为：

$$\begin{aligned}f(\Lambda_{DOEL})&=\bigwedge_{H\in\Lambda_{DOEL}}(\bigvee_{h\in H}h)\\&=(a\vee b\vee c\vee d\vee e)\wedge(a\vee b\vee c)\wedge d\wedge e\\&=(a\wedge d\wedge e)\vee(b\wedge d\wedge e)\vee(c\wedge d\wedge e)\end{aligned}$$

这样，形式背景 K 的所有对偶 OE 概念属性约简为：$\{a,d,e\}$，$\{b,d,e\}$，$\{c,d,e\}$。

4 基于概念可辨识矩阵的对偶 OE 概念约简

从概念角度出发，在保留原有三元关系的前提下删除部分概念，可以得到一个新的概念偏序集。概念约简是在保证约简后对象和属性之间的三元关系与原形式背景下的三元关系相同的一个极小概念子集。

首先给出保持三元关系不变的对偶 OE 概念协调集的定义。

定义 12 设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$。若 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}}X_i\times(A_i\times B_i)=\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，则称 $\mathscr{F}$ 为保持三元关系不变的概念协调集（简称概念协调集）。

若 $\forall C\in\mathscr{F}$，则有 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}X_i\times(A_i\times B_i)\neq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，则称 $\mathscr{F}$ 为保持三元关系不变的概念约简（简称概念约简）。

由上述可知，对任意 $\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$，都有 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}}X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$。

我们有如下结论：

推论 3 设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格。对于任意 $\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$，若 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}}X_i\times(A_i\times B_i)$，则 $\mathscr{F}$ 为概念协调集。

定义 13 设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$\mathscr{J}=\{\mathscr{F}_i\mid i\in\tau,\tau$ 为指标集$\}$ 为对偶 OE 概念格 $DOEL(G,M,I)$ 概念约简全体构成的集合，则 $DOEL(G,M,I)$ 中的概念可以分为 3 类：

(1) 核心概念集 $\mathscr{C}=\bigcap_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$；

(2) 相对必要概念集 $\mathscr{K}=\bigcup_{i\in\tau}\mathscr{F}_i-\bigcap_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$；

(3) 不必要概念集 $\mathscr{U}=DOEL(G,M,I)-\bigcup_{i\in\tau}\mathscr{F}_i$。

定理 8 对于任何形式背景而言，对偶 OE 概念格的概念

约简一定存在。

证明：一方面，若 $\forall C\in DOEL(G,M,I)$，都有 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)\setminus\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)\neq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，则 $DOEL(G,M,I)$ 本身就是一个概念约简。

另一方面，若存在 $C_1\in DOEL(G,M,I)$，满足 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)\setminus\{C_1\}} X_i\times(A_i\times B_i)=\bigcup_{(X_i,(A_i,B_j))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，则研究 $\mathscr{F}_1=DOEL(G,M,I)\setminus\{C_1\}$。若对任意 $C_2\in\mathscr{F}_1$，都有 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}_1\setminus\{C_2\}} X_i\times(A_i\times B_i)\neq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，则 F_1 是概念约简。否则继续研究 $\mathscr{F}_2=\mathscr{F}_1\setminus\{C_2\}$。重复上述步骤，由于概念格 $DOEL(G,M,I)$ 是有限集合，因此总可以找到符合条件的概念约简集 $\mathscr{T}$。

综上，概念约简一定存在。

但一般来说，基于对偶 OE 概念格的概念约简不一定是唯一的，并且概念约简所得到的概念偏序集既不一定是原概念格的子格，也不一定是格。

推论 4

(1)核心概念集是概念约简$\Leftrightarrow$概念约简唯一；

(2)C 是不必要概念$\Leftrightarrow DOEL(G,M,I)\setminus\{C\}$ 是概念协调集；

(3)C 是核心概念$\Leftrightarrow DOEL(G,M,I)\setminus\{C\}$ 不是概念协调集。

定义 14　设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格。对于任意两个对偶 OE 概念 $C_i=(X_i,(A_i,B_i))$，$C_j=(X_j,(A_j,B_j))$，定义 $D(C_i,C_j)=\{(g,(m,n))\mid(g,(m,n))\in X_i\times(A_i\times B_i)\setminus X_j\times(A_j\times B_j)\}$，称 $D(C_i,C_j)$ 为 C_i 和 C_j 的对偶 OE 概念辨识集。称 $\mathscr{D}=(D(C_i,C_j)\mid C_i,C_j\in DOEL(G,M,I))$ 为形式背景 K 的对偶 OE 概念可辨识矩阵。

引理 1　设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格。$\forall\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$，$\forall C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$，有 $\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} D(C,C_i)=\emptyset$ 的充要条件为 $X\times(A\times B)\subseteq\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)$。

证明：由于

$$\begin{aligned}&\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} D(C,C_i)\\&=\bigcap_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}(X\times(A\times B)\setminus X_i\times(A_i\times B_i))\\&=\bigcap_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}(X\times(A\times B)\cap\overline{X_i\times(A_i\times B_i)})\\&=X\times(A\times B)\cap(\bigcap_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}\overline{X_i\times(A_i\times B_i)})\\&=X\times(A\times B)\cap\overline{\bigcup_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}(X_i\times(A_i\times B_i))}\end{aligned}$$

其中，$\overline{X_i\times(A_i\times B_i)}=G\times(M\times M)\setminus X_i\times(A_i\times B_i)$。所以 $\bigcap_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} D(C,C_i)=\emptyset\Leftrightarrow\forall(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$，$(g,(m,n))\notin\overline{\bigcup_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}}(X_i\times(A_i\times B_i))}\Leftrightarrow\forall(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$，$(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)\Leftrightarrow X\times(A\times B)\subseteq\bigcup_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)$。

推论 5　设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格。$\forall\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$，$\forall C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$，$\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} D(C,C_i)\neq\emptyset$ 的充要条件为 $\exists(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$，使得 $(g,(m,n))\notin\bigcup_{C_i\in\mathscr{F}\setminus\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)$。

定理 9　设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$。则 F 为概念协调集当且仅当 $\forall C_i,C_j\in DOEL(G,M,I)$，有 $D(C_i,C_j)\subseteq\bigcup_{C_k=(X_k,(A_k,B_k))\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$。

证明：(充分性)有两种情况，首先如果 $\forall(g,(m,n))\in\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，$\forall(X,(A,B))\in\mathscr{F}$，都有 $(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$，则显然有 $(g,(m,n))\in\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$。因此 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$。

其次，若 $\forall(g,(m,n))\in\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，$\exists C_i,C_j\in DOEL(G,M,I)$，使得 $(g,(m,n))\in D(C_i,C_j)$，又因为 $\forall C_i,C_j\in DOEL(G,M,I)$，有 $D(C_i,C_j)\subseteq\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$ 成立，所以得出 $(g,(m,n))\in\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$，因此 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$。

综上可知，$\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)=\bigcup_{C_k=(X_k,(A_k,B_k))\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$ 成立，因此 F 为概念协调集。

必要性显然成立。

定理 10　设 $K=(G,M,I)$ 为形式背景，$DOEL(G,M,I)$ 为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集，$\mathscr{F}\subseteq DOEL(G,M,I)$。则 $\mathscr{F}\cup\mathscr{C}$ 为概念协调集$\Leftrightarrow\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)\setminus\mathscr{C}}\bigcap_{C_j\in\mathscr{C}} D(C_i,C_j)\subseteq\bigcup_{C_k=(X_k,(A_k,B_k))\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$。

证明：(充分性)$\forall(g,(m,n))\in\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，一定 $\exists C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$，使得 $(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$。

一方面，若 $(g,(m,n))\in X\times(A\times B)\subseteq\bigcup_{C_j=(X_j,(A_j,B_j))\in\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$，则显然有 $(g,(m,n))\in\bigcup_{C_j\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$，因此 $\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{C_j\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$。

另一方面，若 $(g,(m,n))\notin\bigcup_{C_j=(X_j,(A_j,B_j))\in\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$，显然 $C\notin\mathscr{C}$，因此 $(g,(m,n))\in\bigcap_{C_j\in\mathscr{C}} D(C,C_j)$；又由于 $\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)\setminus\mathscr{C}}\bigcap_{C_j\in\mathscr{C}} D(C_i,C_j)\subseteq\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)$，则 $(g,(m,n))\in\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}} X_k\times(A_k\times B_k)\subseteq\bigcup_{C_k\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}} X_k\times(A_k\times B_k)$。由此可得，$\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{C_j\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$。

综上，$\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)=\bigcup_{C_j\in\mathscr{F}\cup\mathscr{C}} X_j\times(A_j\times B_j)$ 成立，$\mathscr{F}\cup\mathscr{C}$ 为概念协调集。

必要性显然成立。

例 4(接例 3)　已知形式背景 $K=(G,M,I)$，$G=\{1,2,3,4\}$，$M=\{a,b,c,d,e\}$。其对偶 OE 概念分别为：$(G,(\emptyset,\emptyset))$，$(123,(abce,d))$，$(234,(e,abcd))$，$(134,(de,abc))$，$(124,(d,abce))$，$(23,(abce,abcd))$，$(34,(de,abcd))$，$(14,(de,abce))$，$(3,(M,abcd))$，$(4,(de,M))$，$(\emptyset,(M,M))$，将这 11 个概念分别标记为 $C_1,C_2,\cdots,C_{11}$。

对偶 OE 概念的概念可辨识矩阵如表 4 所列。由于 $D(C_1,C_i)=\emptyset$，$D(C_i,C_1)=X_i\times(A_i\times B_i)$，$D(C_{11},C_j)=\emptyset$，$D(C_j,C_{11})=X_i\times(A_i\times B_i)$(其中 $i=2,3,\cdots,11$，$j=1,2,\cdots,10$)，因此表 4 中去掉了与C_1和C_{11}相关的行和列。

表 4 形式背景 $K=(G,M,I)$的对偶 OE 概念可辨识矩阵

Table 4 Dual OE concept discernibility matrix of formal ccontext $K=(G,M,I)$

	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
C_2	$\emptyset$	$(23,(abc,d))$, $(1,(abce,d))$	$(123,(abce,d))$	$(123,(abce,d))$	$(1,(abce,d))$	$(12,(abce,d))$, $(3,(abc,d))$	$(123,(abce,d))$	$(12,(abce,d))$	$(123,(abce,d))$
C_3	$(23,(e,abc))$, $(4,(e,abcd))$	$\emptyset$	$(34,(e,d))$, $(2,(e,abcd))$	$(234,(e,abcd))$	$(4,(e,abcd))$	$(2,(e,abcd))$	$(4,(e,d))$, $(23,(e,abcd))$	$(24,(e,abcd))$	$(23,(e,abcd))$
C_4	$(134,(de,abc))$	$(34,(d,abc))$, $(1,(de,abc))$	$\emptyset$	$(3,(de,abc))$, $(14,(e,abc))$	$(3,(d,abc))$, $(14,(de,abc))$	$(1,(de,abc))$	$(3,(de,abc))$	$(14,(de,abc))$	$(13,(de,abc))$
C_5	$(124,(d,abce))$	$(124,(d,abce))$	$(14,(d,e))$, $(2,(d,abce))$	$\emptyset$	$(124,(d,abce))$	$(4,(d,e))$, $(12,(d,abce))$	$(2,(d,abce))$	$(124,(d,abce))$	$(12,(d,abce))$
C_6	$(23,(abce,abc))$	$(23,(abc,abcd))$	$(2,(abce,abcd))$, $(3,(e,d))$, $(3,(abc,abcd))$	$(23,(abce,abcd))$	$\emptyset$	$(2,(abce,abcd)$, $(3,(abc,abcd))$	$(23,(abce,abcd)))$	$(2,(abce,abcd))$	$(23,(abce,abcd))$
C_7	$(4,(de,abcd))$, $(3,(d,abcd))$, $(3,(e,abc))$	$(34,(d,abcd))$	$(34,(de,d))$	$(3,(de,abcd))$, $(4,(d,d))$, $(4,(e,abcd))$	$(3,(d,abcd))$, $(4,(de,abcd))$	$\emptyset$	$(4,(de,d))$, $(3,(de,abcd))$	$(4,(de,abcd))$	$(3,(de,abcd))$
C_8	$(14,(de,abce))$	$(4,(d,abce))$, $(4,(e,e))$, $(1,(de,abce))$	$(14,(de,e))$	$(14,(e,abce))$	$(14,(de,abce))$	$(1,(de,abce))$, $(4,(de,e))$	$\emptyset$	$(14,(de,abce))$	$(1,(de,abce))$
C_9	$(3,(abce,abc))$, $(3,(d,abcd))$	$(3,(abcd,abcd))$	$(3,(de,d))$, $(3,(abc,abcd))$	$(3,(M,abcd))$	$(3,(d,abcd))$	$(3,(abc,abcd))$	$(3,(M,abcd))$	$\emptyset$	$(3,(M,abcd))$
C_{10}	$(4,(de,M))$	$(4,(d,M))$, $(4,(e,e))$	$(4,(de,de))$	$(4,(e,M))$, $(4,(d,d))$	$(4,(de,M))$	$(4,(de,e))$	$(4,(de,d))$	$(4,(de,M))$	$\emptyset$

4.1 核心概念的判定方法

定理 11 设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$。$C$ 为核心概念$\Leftrightarrow \bigcap_{C_i\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C\}} D(C,C_i)\neq\emptyset$。

证明：若 C 为核心概念，则对于任意对偶 OE 概念约简 $\mathscr{F}$，必定有 $C\in\mathscr{F}$。因此，C 为核心概念$\Leftrightarrow \bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)\neq\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，$\Leftrightarrow\exists(g,(m,n))\in\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，但$(g,(m,n))\notin\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C\}} X_i\times(A_i\times B_i)$。

由推论 5 可知，C 为核心概念$\Leftrightarrow\bigcap_{C_i\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C\}} D(C,C_i)\neq\emptyset$。

由上述定理可知，核心概念集可表示为：

$\mathscr{C}=\{C\in DOEL(G,M,I)\mid\bigcap_{C_i\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C\}} D(C,C_i)\neq\emptyset\}$。

例 5(接例 4) 由表 4 的对偶 OE 概念可辨识矩阵可得：

$\bigcap_{i=2}^{11} D(C_1,C_i)=\emptyset$；

$D(C_2,C_1)\cap(\bigcap_{i=3}^{11} D(C_1,C_i))=(1,(abce,d))\neq\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{2} D(C_3,C_i))\cap(\bigcap_{i=4}^{11} D(C_3,C_i))=\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{3} D(C_4,C_i))\cap(\bigcap_{i=5}^{11} D(C_4,C_i))=\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{4} D(C_5,C_i))\cap(\bigcap_{i=6}^{11} D(C_5,C_i))=(2,(d,abce))\neq\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{5} D(C_6,C_i))\cap(\bigcap_{i=7}^{11} D(C_6,C_i))=(2,(abc,abcd))\neq\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{6} D(C_7,C_i))\cap(\bigcap_{i=8}^{11} D(C_7,C_i))=\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{7} D(C_8,C_i))\cap(\bigcap_{i=9}^{11} D(C_8,C_i))=(1,(de,e))\neq\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{8} D(C_9,C_i))\cap(\bigcap_{i=10}^{11} D(C_9,C_i))=\emptyset$；

$(\bigcap_{i=1}^{9} D(C_{10},C_i))\cap D(C_{10},C_{11})=\emptyset$；

$\bigcap_{i=1}^{10} D(C_{11},C_i)=\emptyset$；

综上，核心概念集为：$C=\{C_2,C_5,C_6,C_8\}$。

推论 6 设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$。则 C 为核心概念$\Leftrightarrow\exists(g,(m,n))\in\bigcup_{(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$使得 C 为唯一满足$(g,(m,n))\in X\times(A\times B)$的对偶 OE 概念。

4.2 相对必要概念的求解方法

设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集。令$\eta_{(g,(m,n))}=\{C\in DOEL(G,M,I)\backslash\mathscr{C}\mid(g,(m,n))\in\bigcap_{C_i\in C} D(C,C_i)\}$，任取$(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，若$\eta_{(g,(m,n))}\neq\emptyset$，对任意概念约简 $\mathscr{F}$，显然有 $\mathscr{F}\cap\eta_{(g,(m,n))}\neq\emptyset$。

引理 2 设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集。若存在$(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$，使得$|\eta_{(g',(m',n'))}|=2$，则$\eta_{(g',(m',n'))}\subseteq\mathscr{K}$。

证明：若$|\eta_{(g',(m',n'))}|=2$，设$\eta_{(g',(m',n'))}=\{C_x,C_y\}$，其中$C_x=(X_x,(A_x,B_x))$，$C_y=(X_y,(A_y,B_y))$，则存在$(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)} X_i\times(A_i\times B_i)$使得$(g',(m',n'))\in(\bigcap_{C_i\in C} D(C_x,C_i))\cap(\bigcap_{C_i\in C} D(C_y,C_i))$。显然$(g',(m',n'))\in X_x\times(A_x\times B_x)\cap X_y\times(A_y\times B_y)$，且$\forall C_l=(X_l,(A_l,B_l))\in DOEL(G,M,I)\backslash\{C_x,C_y\}$，都有$(g',(m',n'))\notin X_l\times(A_l\times B_l)$。

因此，对任意概念约简 $\mathscr{F}$，C_x和C_y至少有一个属于 $\mathscr{F}$。

又因为$C_x,C_y\in DOEL(G,(M,I))\backslash\mathscr{C}$，所以存在约简集 $\mathscr{F}'$，使得$C_x\in\mathscr{F}'$和$C_y\in\mathscr{F}'$有且仅有一个成立。

因此C_x，$C_y\in\mathscr{K}$，即$\eta_{(g',(m',n'))}\subseteq\mathscr{K}$。

引理 3　设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集。如果$\exists(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$使得$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 3$，且$\forall\eta\subset\eta_{(g',(m',n'))}$，任取$(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，有 $\eta\neq\eta_{(g,(m,n))}$，则$\eta_{(g',(m',n'))}\subseteq\mathscr{K}$。

证明：若$\exists(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，使得$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 3$，由$\eta_{(g,(m,n))}=\{C\in DOEL(G,M,I)\backslash\mathscr{C}|(g,(m,n))\in\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C,C_i)\}$可知，$\eta_{(g',(m',n'))}\cap\mathscr{C}=\emptyset$，即对于$\eta_{(g',(m',n'))}$中的任一概念 $\mathscr{C}$，必定存在不包含 $\mathscr{C}$ 的概念约简，且对于任意概念约简 $\mathscr{F}$，都有 $\mathscr{F}\cap\eta_{(g',(m',n'))}\neq\emptyset$，即$\eta_{(g',(m',n'))}\cap\mathscr{K}\neq\emptyset$。

又因为$\forall\eta\subset\eta_{(g',(m',n'))}$，对任意$(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，都有 $\eta\neq\eta_{(g,(m,n))}$，因此$\forall C\in\eta_{(g',(m',n'))}$，必定存在包含 C 的概念约简。

综上所述，对于任意 $C\in\eta_{(g',(m',n'))}$ 都有 $C\in\mathscr{K}$，即$\eta_{(g',(m',n'))}\subseteq\mathscr{K}$。

定理 12　设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集，任取 $C\in DOEL(G,M,I)$。则 $C\in\mathscr{K}\Leftrightarrow$存在$(g',(m',n'))\in\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C,C_i)$使得 $C\in\eta_{(g',(m',n'))}$满足：$|\eta_{(g',(m',n'))}|=2$，或$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 3$ 且对于任意$\eta\subset\eta_{(g',(m',n'))}\backslash\{C\}$，任取$(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，有 $\eta\neq\eta_{(g,(m,n))}$。

证明：(必要性)(1)若 $C\in\mathscr{K}$，则必定存在概念约简$\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$，满足 $C\in\mathscr{F}_1$，但 $C\notin\mathscr{F}_2$，因此$\exists(g',(m',n'))\in\bigcap_{C_i\in C}D(C,C_i)$，满足$(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_j\in\mathscr{F}_2}\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C_j,C_i)$，即$\exists C'\in\mathscr{F}_2$，使得$(g',(m',n'))\in\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C',C_i)$。由此可知 $C,C'\in\eta_{(g',(m',n'))}$，则$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 2$，即有$|\eta_{(g',(m',n'))}|=2$ 或$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 3$。

(2)若$\forall(g_j,(m_j,n_j))\in\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C,C_i)$，当$|\eta_{(g_j,(m_j,n_j))}|\geqslant 3$时，$\exists\eta_0\subset\eta_{(g_j,(m_j,n_j))}\{C\}$，使得$\eta_0=\eta_{(g_0,(m_0,n_0))}$，其中$(g_0,(m_0,n_0))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，则$\mathscr{F}_1\cap\eta_0\neq\emptyset$。因此$(g',(m',n'))\in\bigcup_{C_j\in F_1\backslash\{C\}}\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C_j,C_i)$，即$\mathscr{F}_1\backslash\{C\}$也为概念协调集，矛盾。

综上，若$\exists(g',(m',n'))\in\bigcap_{C_i\in C}D(C,C_i)$使得$|\eta_{(g',(m',n'))}|\geqslant 3$且$\forall\eta\subset\eta_{(g',(m',n'))}\{C\}$，$\forall(g,(m,n))\in\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in DOEL(G,M,I)}X_i\times(A_i\times B_i)$，有 $\eta\neq\eta_{(g,(m,n))}$。

(充分性)见引理 2 和引理 3 的证明。

例 6(接例 5)　由表 4 可知：

$D(C_1,C_2)\cap D(C_1,C_5)\cap D(C_1,C_6)\cap D(C_1,C_8)=\emptyset$；

$D(C_3,C_2)\cap D(C_3,C_5)\cap D(C_3,C_6)\cap D(C_3,C_8)=(4,(e,d))\neq\emptyset$；

$D(C_4,C_2)\cap D(C_4,C_5)\cap D(C_4,C_6)\cap D(C_4,C_8)=(3,(d,abc))\neq\emptyset$；

$D(C_7,C_2)\cap D(C_7,C_5)\cap D(C_7,C_6)\cap D(C_7,C_8)=(3,(d,abcd))\cup(4,(de,d))\neq\emptyset$；

$D(C_9,C_2)\cap D(C_9,C_5)\cap D(C_9,C_6)\cap D(C_9,C_8)=(3,(d,abcd))\neq\emptyset$；

$D(C_{10},C_2)\cap D(C_{10},C_5)\cap D(C_{10},C_6)\cap D(C_{10},C_8)=(4,(de,d))\neq\emptyset$；

$D(C_{11},C_2)\cap D(C_{11},C_5)\cap D(C_{11},C_6)\cap D(C_{11},C_8)=\emptyset$；

显然，$\eta_{(4,(d,d))}=\{C_7,C_{10}\}$，$\eta_{(3,(d,d))}=\{C_7,C_9\}$，由定理 12 可知，$C_7$，$C_9$，$C_{10}$ 为相对必要概念。由于$\eta_{(4,(e,d))}=\{C_3,C_7,C_{10}\}$，且$\eta_{(4,(d,d))}\subset\eta_{(4,(e,d))}$，因此$C_3$不是相对必要概念。又由于$\eta_{(3,(d,a))}=\eta_{(3,(d,b))}=\eta_{(3,(d,c))}=\{C_4,C_7,C_9\}$，且$\eta_{(3,(d,d))}\subset\eta_{(3,(d,a))}=\eta_{(3,(d,b))}=\eta_{(3,(d,c))}$，因此$C_4$不是相对必要概念。综上，相对必要概念 $\mathscr{K}=\{C_7,C_9,C_{10}\}$。

4.3　不必要概念的求解方法

引理 4　设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集，$\forall C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)\backslash\mathscr{C}$。若$\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{C}}D(C,C_i)=\emptyset$，则 C 为不必要概念。

证明：若$\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{C}}D(C,C_i)=\emptyset$，则 $X\times(A\times B)\subseteq\bigcup_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{C}}X_i\times(A_i\times B_i)$。对任意概念协调集 $\mathscr{F}$，有 $X\times(A\times B)\subseteq\bigcup_{C_i\in\mathscr{C}}X_i\times(A_i\times B_i)\subseteq\bigcup_{C_j=(X_j,(A_j,B_j))\in\mathscr{F}\backslash\{C\}}X_j\times(A_j\times B_j)$。由 C 的任意性，$\bigcup_{C_j=(X_j,(A_j,B_j))\in\mathscr{F}\backslash\{C\}}X_j\times(A_j\times B_j)=\bigcup_{C_j=(X_j,(A_j,B_j))\in\mathscr{F}}X_j\times(A_j\times B_j)$，因此 $\mathscr{F}\backslash\{C\}$也是概念协调集。

综上，C 为不必要概念。

由上述引理可知：

$\mathscr{U}'=\{C\in DOEL(G,M,I)|\bigcap_{C_i\in\mathscr{C}}D(C,C_i)=\emptyset\}$，则$\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$。

例 7(接例 6)　由表 4 的对偶 OE 概念可辨识矩阵以及例 6 的计算可知：

$D(C_1,C_2)\cap D(C_1,C_5)\cap D(C_1,C_6)\cap D(C_1,C_8)=\emptyset$；

$D(C_{11},C_2)\cap D(C_{11},C_5)\cap D(C_{11},C_6)\cap D(C_{11},C_8)=\emptyset$；

即$\mathscr{U}'=\{C_1,C_{11}\}$。

推论 7　设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格。$\forall C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)$，若 $X=\emptyset$，$A=\emptyset$，$B=\emptyset$ 三者中至少有一个成立，则对偶 OE 概念 C 为不必要概念。

定理 13　设 $K=(G,M,I)$为形式背景，$DOEL(G,M,I)$为其对偶 OE 概念格，$\mathscr{C}$ 为核心概念集，$\forall C=(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)\backslash\mathscr{C}$，则 $C\in\mathscr{U}\Leftrightarrow\bigcap_{C_i=(X_i,(A_i,B_i))\in\mathscr{C}}D(C,C_i)=\emptyset$，或者$\forall(g,(m,n))\in D(C,C_i)$有$|\eta_{(g,(m,n))}|\geqslant 3$ 且$\exists\eta_0\subset\eta_{(g,(m,n))}$，使得$\exists(g',(m',n'))\in\bigcup_{(X,(A,B))\in DOEL(G,M,I)}X\times(A\times B)$，满足$\eta_0=\eta_{(g',(m',n'))}$。

例 8　根据上述定理以及例 6 计算可得，C_3和C_4均为不必要概念。

结合例 7 可得：$\mathscr{U}=\{C_1,C_3,C_4,C_{11}\}$。

综上，该形式背景的概念约简分别为：

$\mathscr{F}_1=\{C_2,C_5,C_6,C_7,C_8\}$

$\mathscr{F}_2=\{C_2,C_5,C_6,C_8,C_9,C_{10}\}$

结束语　通过对偶三支算子可以定义对偶三支概念格。本文将对偶概念复合，同样也可以得到所有的对偶三支概念。进一步研究了对偶 OE 概念格基于可辨识属性矩阵的属性约简方法和基于概念可辨识矩阵的概念约简方法，这些内容的解决都为接下来基于对偶 OE 算子进行有效的蕴涵提取以及

决策蕴含规范基的求解奠定了基础。另外,在不完备的形式背景下进行对偶三支概念分析,也将是我们进一步要考虑的问题。

参 考 文 献

[1] WILLE R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts [M]. Ordered Sets, 1982: 445-470.

[2] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations [M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999.

[3] MI J S, CHEN J K. Graph-based approaches for attribute reduction in Rough sets [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2019, 49(4): 508-516.

[4] ZHI H L, QI J J. Common-possible concept analysis: A granule description viewpoint [J]. Applied Intelligence, 2021, 52(3): 2975-2986.

[5] ZHI H L, QI J J, QIAN T, et al. Conflict analysis under one-vote veto based on approximate three-way concept lattice [J]. Information Sciences, 2020, 516: 316-330.

[6] LIAW T M, LIN S C. A general theory of concept lattice with tractable implication exploration [J]. Theoretical Computer Science, 2020, 837: 84-114.

[7] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2009, 180(3): 341-353.

[8] HAO F, YANG Y X, MIN G Y, et al. Incremental construction of three-way concept lattice for knowledge discovery in social networks [J]. Information Science, 2021, 578: 257-280.

[9] YANG S C, LU Y N, JIA X Y, et al. Constructing three-way concept lattice based on the composite of classical lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 121: 174-186.

[10] YAO Y Y. Interval sets and three-way concept analysis in incomplete contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8(1): 3-20.

[11] WANG Z, WEI L, QI J J, et al. Attribute reduction of SE-ISI concept lattices for incomplete contexts [J]. Soft Computing, 2020, 24(20): 15143-15158.

[12] QI J J, QIAN T, WEI L. The connections between three-way and classical concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151.

[13] MAO H, ZHAO S F, YANG L Z. Relationships between three-way concepts and classical concepts [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 35(1): 1063-1075.

[14] ZHAO X R, MIAO D Q, HU B Q. On relationship between three-way concept lattices [J]. Information Sciences, 2020, 538: 396-414.

[15] LONG B H, XUW H. Fuzzy three-way concept analysis and fuzzy three-way concept lattice [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2019, 55(4): 537-545.

[16] MAO H, CHENG Y L, LIU X Q. The relations between Fuzzy Three-way Concept Lattices and Fuzzy Concept Lattices [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2020, 34(6): 167-174.

[17] SKOWRON A, RAUSZER C. The Discernibility Matrices and Functions in Information Systems [M]// Intelligent Decision Support. 1992.

[18] KONECNY J. On attribute reduction in concept lattices: Methods based on discernibility matrix are outperformed by basic clarification and reduction [J]. Information Sciences, 2017, 415: 199-212.

[19] WANG X, PENG Z H, LI J Y, et al. Method of Concept Reduction Based on Concept Discernibility Matrix [J]. Computer Science, 2021, 48(1): 125-130.

[20] WEI L, CAO L, QI J J, et al. Concept reduction and concept characteristics in formal concept analysis [J]. SCIENTIA SINICA Informationis, 2020, 50(12): 1817-1833.

[21] REN R S, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices [J]. Knowledge- Based Systems, 2016, 99: 92-102.

[22] MA J M, ZHANG W X. Axiomatic characterizations of dual concept lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5): 690-697.

[23] JIANG S R, YANG H Q, MI J S. Attribute Reduction in Dual Concept Lattices [J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(4): 501-506.

[24] GUO Q C, MA J M. Judgment Methods of Interval-set Consistent Sets of Dual Interval-set Concept Lattices [J]. Computer Science, 2020, 47(3): 98-102.

[25] ZHI H L, QI J J, QIAN T, et al. Three-way dual concept analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 114: 151-165.

[26] YAO Y Y. A Comparative Study of Formal Concept Analysis and Rough Set Theory in Data Analysis[C]// Rough Sets and Current Trends in Computing. 2004: 59-68.

LIU Jin, born in 1997, master. Her main research interests include concept lattice, granular computing and so on.

MI Jusheng, born in 1966, Ph.D, second grade professor, Ph. D supervisor. His main research interests include rough set, concept lattice, granular computing, approximate reasoning and so on.

(责任编辑:柯颖)