一种快速的判别公共向量分类方法

韩姗姗　黄　凯　王万良　郑建炜　蒋一波

（浙江工业大学计算机科学与技术学院　杭州 310023）

摘　要　在传统DCV的基础上，提出了一种改进的快速DCV分类方法。该方法与传统的DCV分类方法相比，在保证识别率相同的情况下具有较快的分类速率。传统的DCV分类方法通过计算特征向量之间的距离来进行分类，而所提快速DCV分类方法则通过标量计算完成分类。理论分析及复杂度计算表明，快速DCV分类方法的分类速率是传统DCV分类方法的2倍左右，在Yale、ORL和PIE 3种人脸数据库得到的对比仿真实验结果验证了该算法的有效性。

关键词　判别公共向量，快速分类算法，人脸识别

中图法分类号　TP391.4　　**文献标识码**　A

Faster Discriminative Common Vectors Classification Approach

HAN Shan-shan　HUANG Kai　WANG Wan-liang　ZHENG Jian-wei　JIANG Yi-bo

(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract　This paper proposed an improved Fast Discriminative Common Vectors (FDCV) classification algorithm based on the traditional Discriminative Common Vectors (DCV). Compared with the traditional DCV, the FDCV not only has a faster classification rate, but also guarantees the same recognition performance. The FDCV does the classification by calculating the distance between scalars but not vectors which are used in the traditional DCV. Theoretical analysis and complexity calculation show that Faster DCV has twice the classifying speed of the traditional DCV. The simulation experiment on the three face databases of Yale Face Database B, ORL Database and PIE Database further verifies the effectiveness of the algorithm.

Keywords　Discriminative common vectors, Fast classification algorithm, Face recognition

1　引言

在基于摄像头的智能安全系统需求中，人脸识别的重要性日益增强。自动的人脸实时检测和识别的重点在于速度和精确度，到目前为止，人们已经提出很多提高自动人脸识别效率的方法[1-4]。在人脸识别的实时应用中，计算时间和识别率至关重要[5]。在基于表观的方法中，整个人脸图片被表示为一个 $w\times h$ 大小的特征向量，高分辨率的图像就意味着高维度的特征向量，使得系统的计算效率降低[6,7]。

判别公共向量（DCV）方法[8]是一种应用于模式识别的子空间方法[9]，如语音识别、人脸识别[10-12]以及特征选择[13]。在训练和测试阶段，高维特征向量对DCV算法的性能有着不利影响。

本文提出了一种改进的DCV分类方法（以下简称为快速DCV分类方法），该方法与传统的DCV分类方法相比，在保证识别率相同的情况下具有较快的分类速率。传统的DCV分类方法对相应维度的特征向量进行分类，而本文提出的快速的DCV分类方法对标量进行分类。本文第2节是对判别公共向量方法（DCV）的概述，解释了传统DCV方法的实现；第3节描述了快速的判别公共向量分类方法，并说明了其理论依据；第4节通过实验验证了快速的DCV分类方法与传统DCV分类方法在识别率一致的前提下提高了实际计算速度；最后对全文进行总结。

2　判别公共向量(Discriminative Common Vectors)方法

判别公共向量（DCV）方法是一种成功的线性方法，主要用于处理人脸识别任务中的小样本问题[14]。假定每一类中的样本数为 m，样本中的向量大小为 n，在提取判别公共向量（DCV）时，存在两种情况：1）如果 $n<m$，样本数大于特征向量，即是所谓的充分情况；2）如果 $n\geq m$，就是所谓的不充分情况。DCV方法是为了处理不充分情况而提出的，因此，本文在不充分情况下进行论证。

目前存在两种可以得到判别公共向量（DCV）[8]的常用算法。一种方法是进行Gram-Schmidt正交处理，另一种是采用类内散布矩阵，即找到一个投影方向，使得类内散布矩阵最

到稿日期：2013-03-02　返修日期：2013-06-16　本文受国家自然科学基金(61070043)，浙江省自然科学基金(LY12F02033，LQ12F03011)资助。
韩姗姗(1980—)，女，博士生，讲师，主要研究方向为控制理论与控制方法，E-mail：hanss@zjut.edu.cn；**黄　凯**(1987—)，男，硕士生，主要研究方向为模式识别、计算机视觉等；**王万良**(1957—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为计算机控制与智能自动化等；**郑建炜**(1982—)，男，博士，讲师，主要研究方向为计算机视觉、模式识别；**蒋一波**(1982—)，男，博士，副教授，主要研究方向为数字媒体。

小且类间散布矩阵最大。

2.1 通过类内散布矩阵的计算得到 DCV

设定训练样本集由 C 个类组成，每一类包含 m 个样本数，x_k^i 是一个 n 维列向量，表示第 i 个类中的第 k 个样本。总的训练样本数为 $N=mC$，假定 $n>N-C$，因此，训练样本的类内散布矩阵 S_W、类间散布矩阵 S_B 和总体散布矩阵 S_T 的定义如下[15]：

$$S_W=\sum_{i=1}^{C}\sum_{k=1}^{m}(x_k^i-\mu_i)(x_k^i-\mu_i)^{\mathrm{T}}=AA^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$S_B=\sum_{i=1}^{C}m(\mu_i-\mu)(\mu_i-\mu)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{C}\sum_{k=1}^{m}(x_k^i-\mu)(x_k^i-\mu)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中，μ 表示所有样本的平均数，μ_i 表示第 i 类中样本的平均数。A 是一个 $n\times N$ 的矩阵，表示如下：

$$A=[x_1^1-\mu_1\cdots x_m^1-\mu_1\ x_1^2-\mu_2\cdots x_m^C-\mu_C] \tag{4}$$

为了在 S_W 的零空间找到样本空间的最佳投影向量，我们需要找到用来扩展 S_W 零空间的正交向量集。由于 S_W 零空间的维度太大，上述工作的计算过于困难。然而，通过使用 $N\times N$ 的矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$，容易得到用于扩展 S_W 零空间补集的正交向量集。可以通过该正交向量集找到样本空间在 S_W 零空间的投影。

设定 R^n 为原始样本空间，V 为 S_W 的秩空间，$V^{\perp}$ 为 S_W 的零空间，相当于，

$$V=span\{\alpha_k\,|\,S_W\alpha_k\neq 0,k=1,\cdots,r,\alpha_k\in R^n\} \tag{5}$$

$$V^{\perp}=span\{\alpha_k\,|\,S_W\alpha_k=0,k=r+1,\cdots,n,\alpha_k\in R^n\} \tag{6}$$

$r<n$ 是 S_W 的秩，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是一个正交集，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是用于扩展 S_W 秩空间的一个正交向量集。

考虑到矩阵 $Q=[\alpha_1\cdots\alpha_r]$ 和 $\overline{Q}=[\alpha_{r+1}\cdots\alpha_n]$，设定 $P=QQ^{\mathrm{T}}$ 和 $\overline{P}=\overline{Q}\ \overline{Q}^{\mathrm{T}}$。因为 $R^n=V\oplus V^{\perp}$，

$$x_{com}^i=x_k^i-Px_k^i=\overline{P}x_k^i,k=1,\cdots,m,i=1,\cdots,C \tag{7}$$

通过这种方式，我们得到了同一类所有样本中相同的唯一向量，即式(7)等式左侧的向量。该向量与样本索引 k 无关，也就是我们所说的公共向量(CV)。

公共向量(CV)的最大总体散布就是最佳投影向量，即：

$$J(W_{opt})=\underset{|W^{\mathrm{T}}S_WW|=0}{\arg\max}|W^{\mathrm{T}}S_BW|=\arg\max|W^{\mathrm{T}}S_{com}W| \tag{8}$$

矩阵 W 的列是正交的最佳投影向量 w_j，S_{com} 是公共向量(CV)的散布矩阵。S_{com} 可以表示为以下等式：

$$S_{com}=\sum_{i=1}^{C}(x_{com}^i-\mu_{com})(x_{com}^i-\mu_{com})^{\mathrm{T}}=A_{com}A_{com}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

μ_{com} 是所有公共向量 x_{com}^i 的均值。在这种情况下，最佳投影向量 w_j 可以通过 S_{com} 的特征分析得到。特别是对应于 S_{com} 非零特征值的所有特征向量都是最佳投影向量，可以轻易地通过 $C\times C$ 矩阵得到 $A_{com}^{\mathrm{T}}A_{com}$。

因为最佳投影向量 w_j 来自于 S_W 的零空间，于是当第 i 类的图像样本 x_k^i 被投影于 w_j 的线性扩展空间，投影的特征向量的 $\Omega_i=[\langle x_k^i,w_1\rangle\cdots\langle x_k^i,w_r\rangle]^{\mathrm{T}}$ 的系数 $\langle x_k^i,w_j\rangle$ 与样本系数 k 无关。

2.2 通过子空间和 Gram-Schmidt 正交处理得到 DCV

本小节使用第 2.1 小节中的符号，x_k^i 是一个 n 维列向量，表示第 i 个类中的第 k 个样本。在 $n>N-C$ 的情况下，可以利用子空间方法得到每个类的公共量 x_{com}^i。首先，需要在第 i 类中选择任一向量作为减数，以此得到第 i 类中的判别子空间的判别向量 b_k^i。因此，假设我们选择每一类中的第一个样本作为减数向量，判别向量 $b_k^i=x_{k+1}^i-x_1^i,k=1,\cdots,m-1$。第 i 类的判别子空间 B_i 可以定义为 $B_i=span\{b_1^i,\cdots,b_{m-1}^i\}$，所有类的子空间相加可以得到完整的判别子空间：

$$B=B_1+\cdots+B_C=span\{b_1^1,\cdots,b_{m-1}^1,b_1^2,\cdots,b_{m-1}^C\} \tag{10}$$

通过 Gram-Schmidt 正交处理对判别向量 b_k^i 正交化，可以得到正交基底向量 $\beta_1,\cdots,\beta_{N-C}$。判别子空间 B 的补是非判别子空间 $B^{\perp}$，于是有：

$$U=[\beta_1\cdots\beta_{N-C}],P=UU^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\overline{U}=[\beta_{N-C+1}\cdots\beta_n],\overline{P}=\overline{U}\,\overline{U}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

P 和 $\overline{P}$ 分别是在 B 和 $\overline{B}$ 上的正交投影，因此，矩阵 P 和 $\overline{P}$ 是对称且幂等的，而且满足 $P+\overline{P}=I$。现在，任一类中的任一样本可以投影到非判别子空间 $B^{\perp}$，得到对应类的公共向量：

$$x_{com}^i=\overline{P}x_k^i=x_k^i-Px_k^i=\overline{U}\,\overline{U}^{\mathrm{T}}x_k^i=x_k^i-UU^{\mathrm{T}}x_k^i$$
$$k=1,\cdots,m,i=1,\cdots,C \tag{13}$$

该公共向量与减数向量的选择无关，且与通过 S_W 零空间得到的公共向量一致。我们选择第一类的公共向量 x_{com}^1 作为减数向量，得到公共向量的判别向量：

$$b_{com}^k=x_{com}^{k+1}-x_{com}^1,k=1,\cdots,C-1 \tag{14}$$

由此可得公共向量的判别子空间：

$$B_{com}=span\{x_{com}^2-x_{com}^1,\cdots,x_{com}^C-x_{com}^1\} \tag{15}$$

通过 Gram-Schmidt 正交处理对判别向量 b_{com}^k 正交化，得到 B_{com} 的正交基底向量 $\widetilde{W}=[\widetilde{w}_1\cdots\widetilde{w}_{C-1}]$。

2.3 分类

回归到 DCV 的本质，本小节前两小节计算投影矩阵的过程等同于解决一个 QR 分解问题，两步的工作可以直接一步完成，文献[14]中给出了定理，内容如下：

矩阵 H_b 定义为

$$H_b=[b_1,b_2,\cdots,b_{C-1}] \tag{16}$$

$$b_i=x_1^i-x_1^C,i=1,2,\cdots,C-1 \tag{17}$$

对 $[B\ H_b]$ 进行 QR 分解，即

$$[B\ H_b]=[Z\ Q]\begin{bmatrix}R_1 & L\\ O & R_2\end{bmatrix} \tag{18}$$

式中，Z 和 Q 为标准正交矩阵，R_1 和 R_2 为上三角矩阵，O 是零矩阵，L 也是一个矩阵。证明过程见文献[14]。

每一类的判别公共向量为：

$$\Omega_i=x_1^i-Z(Z^{\mathrm{T}}x_1^i) \tag{19}$$

现有一待测图片 x_{test}，它的判别公共向量为 Ω_{test}，计算 Ω_{test} 与每一类的判别公共向量 Ω_i 之间的欧氏距离，距离最小的就是最接近的分类，即：

$$\Omega_{test}=x_{test}-Z(Z^{\mathrm{T}}x_{test}) \tag{20}$$

分类的最小化求解如下：

$$C^*=\arg\min_i\{\|\Omega_{test}-\Omega_i\|\},i=1,\cdots,C \tag{21}$$

3 改进的 DCV 分类方法

本文是对 DCV 方法的分类过程提出改进方法，因此在训练阶段与传统的 DCV 方法是一致的。由于训练阶段通常只进行一次，因此测试样本分类阶段的效率其实也就决定了实际的计算效率。

在第 2.2 小节的基础上，本节引入新的符号定义，使得：

$$U_1=U=\{u_1^1,u_2^1,\cdots,u_{m-1}^1,u_1^2,\cdots,u_{m-1}^C\} \tag{22}$$

$$\bar{U}_1=\bar{U}=\{v_m^1,\cdots,v_n^1,v_m^2,\cdots,v_n^C\} \tag{23}$$

令 x_{test} 为待分类的测试样本，$x_1^j,j=1,\cdots,C$ 为第 j 类的减数向量。对应于每一类，可以得到判别向量 $x_{test}-x_1^j,j=1,\cdots,C$。本文提出的快速 DCV 分类方法把该判别向量插入到判别子空间 B 的正交向量集中，或者是矩阵 A 的秩空间，得到对应于某一分类的判别子空间 B_2^j：

$$B_2^j=span\{u_1^1,\cdots,u_{m-1}^1,u_1^2,\cdots,u_{m-1}^C,x_{test}-x_1^j\},\quad j=1,\cdots,C \tag{24}$$

对 B_2^j 进行 Gram-Schmidt 正交化处理，可以得到正交向量集：

$$U_2^j=\{u_1^1,u_2^1,\cdots,u_{m-1}^1,u_1^2,\cdots,u_{m-1}^C,u_m^j\},\quad j=1,\cdots,C \tag{25}$$

u_m^j 是通过 $x_{test}-x_1^j$ 得到的，且 $B_2^j=span\{U_2^j\}$。

如果选择 $W^j=\{w_{m+1}^1,\cdots,w_n^1,w_{m+1}^2,\cdots,w_n^C\}$ 作为正交单位向量集，那么可以得到 $(w_k^i)^T\cdot u_l^i=0,i=1,\cdots,C,k=m+1,\cdots,n,l=1,\cdots,m$，通过扩展 W^j 可以得到新的非判别子空间 $(B_2^j)^\perp=span\{W^j\}$，且满足

$$B_2^j\cup(B_2^j)^\perp=R^n \tag{26}$$

因为 $u_m^j\perp B$，u_m^j 位于之前定义的非判别子空间 $B^\perp$ 中，所以所有的特征向量在向量 u_m^j 上的标量投影是相等的：

$$(x_1^1)^T u_m^j=\cdots=(x_m^1)^T u_m^j=(x_1^2)^T u_m^j=\cdots=(x_m^C)^T u_m^j \tag{27}$$

待测向量 x_{test} 在 u_m^j 上的投影是 $(x_{test}^T\cdot u_m^j)u_m^j$，$u_m^j$ 位于 B_2^j 中，可见该标量投影系数在数值上不同于式(28)中的系数，由此，$(x_k^i)^T u_m^j\neq x_{test}^T u_m^j,i=1,\cdots,C,k=1,\cdots,m$。如果该不等式不成立，由于线性依赖性，向量 u_m^j 就无法通过对 $x_{test}-x_1^j$ 进行 Gram-Schmidt 正交处理获得。

由此可见，待测向量 x_{test} 该归于哪一类取决于哪一类使得 $(x_1^j)^T u_m^j-x_{test}^T u_m^j$ 的绝对值最小。本文提出的快速 DCV 分类方法的分类标准如下：

$$C^*=\arg\min_k\{|(x_{test}-x_1^k)^T\cdot u_m^k|\} \tag{28}$$

相对于式(21)描述的传统的分类标准，这个新标准明显简化了处理器的计算负担，其主要的计算成本来自于单位向量 u_m^j。

在比较快速 DCV 分类方法和传统 DCV 分类方法在测试阶段的时间效率之前，首先要验证两者的分类标准等式(21)和式(28)是等价的，下面给出证明。

定理 1 令 $V^\perp$ 为 S_w 的零空间，$B^\perp$ 为判别子空间 B 的正交余子空间，那么一定有 $V^\perp=B^\perp$ 和 $V=B$。

证明：该定理的证明见文献[10]。

定理 2 等式(21)和式(28)描述的标准是等价的，即：

$\|\Omega_{test}-\Omega_j\|=|(x_{test}-x_1^j)^T\cdot u_m^j|,j=1,\cdots,C$

证明：由式(11)、式(12)和式(26)可知，向量集 S_1 和 S_2^j 跨越了整个 n 维空间 R^n。

$$\begin{aligned}S_1&=\{\underbrace{u_1^1,\cdots,u_{m-1}^1,u_1^2,\cdots,u_{m-1}^C}_{spanB},\underbrace{v_m^1,\cdots,v_n^1,v_m^2,\cdots,v_n^C}_{spanB^\perp}\}\\&=\{\underbrace{z_1^1,\cdots,z_{m-1}^1,z_1^2,\cdots,z_{m-1}^C}_{spanB},\underbrace{q_m^1,\cdots,q_n^1,q_m^2,\cdots,q_n^C}_{spanB^\perp}\}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}S_2^j=\{&\underbrace{u_1^1,\cdots,u_{m-1}^1,u_1^2,\cdots,u_{m-1}^C,u_m^j}_{spanB_2^j},\\&\underbrace{w_{m+1}^1,\cdots,w_n^1,w_{m+1}^2,\cdots,w_n^C}_{span(B_2^j)^\perp}\}\end{aligned} \tag{30}$$

定义距离 D_1 和 D_2 为：

$$D_1=\|[z_1^1\vdots z_2^1\vdots\cdots\vdots z_{m-1}^1\vdots z_1^2\vdots\cdots\vdots z_{m-1}^C\vdots q_m^1\vdots\cdots\vdots q_n^1\vdots q_m^2\vdots\cdots\vdots q_n^C]^T(x_{test}-x_1^j)\|^2 \tag{31}$$

$$D_2=\|[u_1^1\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^1\vdots u_1^2\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^C\vdots u_m^j\vdots w_{m+1}^1\vdots\cdots\vdots w_n^1\vdots w_{m+1}^2\vdots\cdots\vdots w_n^C]^T(x_{test}-x_1^j)\|^2 \tag{32}$$

两个向量的距离是独立于 R^n 的，且距离是相等的，即 $D_1=D_2$，

$$\begin{aligned}&\|[z_1^1\vdots z_2^1\vdots\cdots\vdots z_{m-1}^1\vdots z_1^2\vdots\cdots\vdots z_{m-1}^C\vdots q_m^1\vdots\cdots\vdots q_n^1\vdots q_m^2\vdots\cdots\vdots q_n^C]^T(x_{test}-x_1^j)\|^2\\&=\|[u_1^1\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^1\vdots u_1^2\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^C\vdots u_m^j\vdots w_{m+1}^1\vdots\cdots\vdots w_n^1\vdots w_{m+1}^2\vdots\cdots\vdots w_n^C]^T(x_{test}-x_1^j)\|^2\end{aligned} \tag{33}$$

即：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}((z_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2+\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=m}^{n}((q_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2\\&=\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}((u_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2+((u_m^j)^T(x_{test}-x_1^j))^2+\\&\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=m+1}^{n}((w_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2\end{aligned} \tag{34}$$

从定理 1 可知，等式两边的第一个求和是相等的，因此可以同时消去。所有特征向量以及待测向量 x_{test} 在非判别子空间 $(B_2^j)^\perp$ 上的标量投影是相等的。

$$(x_1^j)^T w_i^k=\cdots=(x_m^j)^T w_i^k=(x_{test})^T w_i^k,i=m+1,\cdots,n,k=1,\cdots,C \tag{35}$$

由式(35)可知，式(34)中的最后一个求和 $\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=m+1}^{n}((w_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2$ 的值为 0，由此可得：

$$\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=m}^{n}((q_i^k)^T(x_{test}-x_1^j))^2=((u_m^j)^T(x_{test}-x_1^j))^2$$

即：

$$\begin{aligned}&\|[q_m^1\vdots\cdots\vdots q_n^1\vdots\cdots\vdots q_m^2\vdots\cdots\vdots q_n^C]^T(x_{test}-x_1^j)^2\\&=\|\bar{P}((x_{test}-x_1^j))\|^2=((u_m^j)^T(x_{test}-x_1^j))\|^2\end{aligned} \tag{36}$$

由式(36)最终可得 $\|\Omega_{test}-\Omega_j\|=|(x_{test}-x_1^j)^T\cdot u_m^j|$。

快速 DCV 分类方法使用的判别过程采用投影 $x_{test}-x_1^j$ 到 u_m^j 的计算方式代替投影 $x_{test}-x_1^j$ 到扩展非判别子空间 $B^\perp$ 得到整个正交基准向量集。但是，如前所述，我们必须注意到计算 u_m^j 带来了额外的计算成本。然而，相对于传统的分类方法，这项计算成本并不影响本文提出的快速 DCV 分类方法的效率。单位向量 u_m^j 的计算如下：

$$u_m^j=\frac{(x_{test}-x_1^j)-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}((x_{test}-x_1^j)^T\cdot u_i^k)u_i^k}{\|(x_{test}-x_1^j)-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}((x_{test}-x_1^j)^T\cdot u_i^k)u_i^k\|} \tag{37}$$

为了简化上述计算，引入矩阵 $H=[u_1^1\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^1\vdots u_1^2\vdots\cdots\vdots u_{m-1}^C]$，$H$ 的列向量是判别子空间 B 的特征向量。因此，u_m^j 可以写成：

$$\begin{aligned}u_m^j&=\frac{(x_{test}-x_1^j)-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}u_i^k(u_i^k)^T\cdot(x_{test}-x_1^j)}{\|(x_{test}-x_1^j)-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}u_i^k(u_i^k)^T\cdot(x_{test}-x_1^j)\|}\\&=\frac{(I-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}u_i^k(u_i^k)^T)\cdot(x_{test}-x_1^j)}{\|(I-\sum_{k=1}^{C}\sum_{i=1}^{m-1}u_i^k(u_i^k)^T)\cdot(x_{test}-x_1^j)\|}\\&=\frac{(I-HH^T)\cdot(x_{test}-x_1^j)}{\|(I-HH^T)\cdot(x_{test}-x_1^j)\|}\end{aligned} \tag{38}$$

在 u_m^j 的计算过程中，用矩阵乘积运算代替求和降低了计算成本。根据式(28)，对式(37)分母的归一化处理不会影响 x_{test} 的分类，其原理见定理 3。

定理 3 式(38)的分母与式(21)的判别公式相等，即：

$$\| (I-HH^T)\cdot(x_{test}-x_1^i) \| = \| \Omega_{test}-\Omega_j \| \tag{39}$$

式(39)的分子乘以 $x_{test}-x_1^i$ 的转置矩阵，其结果与判别公式的平方一致，即：

$$|(x_{test}-x_1^i)^T\cdot\bar{P}\cdot(x_{test}-x_1^i)| = \| \Omega_{test}-\Omega_j \|^2 \tag{40}$$

证明：因为 H 的列向量跨越了判别子空间，$HH^T=P$，P 是判别子空间 B 的投影矩阵；同样有 $(I-HH^T)=\bar{P}$，$\bar{P}$ 是非判别子空间 $B^{\perp}$ 的投影矩阵。因此，

$$\| (I-HH^T)\cdot(x_{test}-x_1^i) \| = \| \bar{P}\cdot(x_{test}-x_1^i) \| = \| \Omega_{test}-\Omega_j \| \tag{41}$$

由此可得，式(38)的分母归一化后等同于式(21)的判别公式。式(38)的分子乘以 $x_{test}-x_1^i$ 的转置矩阵，可以写成：

$$\begin{aligned} &|(x_{test}-x_1^i)^T\cdot\bar{P}\cdot(x_{test}-x_1^i)| \\ &=|(x_{test}-x_1^i)^T\cdot\bar{P}\cdot\bar{P}\cdot(x_{test}-x_1^i)| \\ &=\| (x_{test}-x_1^i)^T\cdot\bar{P} \| \cdot \| \bar{P}\cdot(x_{test}-x_1^i) \| \\ &=\| (x_{test}-x_1^i)^T\cdot\bar{P} \|^2 = \| \Omega_{test}-\Omega_j \|^2 \end{aligned} \tag{42}$$

其结果与判别公式的平方一致。

令 x_{test} 为待分类向量，传统的 DCV 分类算法可以简单地通过伪码表示如下：

算法 1

```
for i⇐1 to C
  Ωtest⇐xtest－Z(ZT xtest)
  A(i)⇐norm(Ωi－Ωtest)
end
for j⇐1 to C
class⇐min{A(j)}
end
```

类似地，本文提出的快速的 DCV 分类算法可以简单地通过伪码表示如下：

算法 2

```
for i⇐1 to C
  u⇐xtest－xi 1
  Y⇐uTH
  un⇐uTu－YYT
  A(i)⇐abs(un)
end
for j⇐1 to C
  class⇐min{A(j)}
end
```

n 是特征向量的维度，N 是训练中特征向量的总数，C 是分类数目，Z 和 H 是 $n\times(N-C)$ 维的矩阵，x_1^i 是第 i 类的第一个特征向量。在算法 1 中，共执行了 $[2n(N-C)+n]C$ 的乘法和 $[2n(N-C+1)]C$ 的加法；在算法 2 中，共执行了 $[(n+1)(N-C)+n]$ 的乘法和 $[n(N-C)]C$ 的加法。在两个算法中，它们的第二个 *for* 循环只用了几乎可忽略的执行时间，因此，我们省略了这部分的执行时间。由此可见，乘法操作的比值为 $G_{Mult}=\frac{[2n(N-C)+n]C}{[(n+1)(N-C)+n]C}$，加法操作的比值为 $G_{Sum}=\frac{[2n(N-C+1)]C}{[n(N-C)]C}$。因为 n 比 N 和 C 大很多，上述两个比值可以简化为：

$$G_{Mult}\approx\frac{2(N-C)+1}{N-C+1} \tag{43}$$

$$G_{Sum}\approx\frac{2(N-C+1)}{N-C} \tag{44}$$

例如，令 $n=30000$，$N=350$ 且 $C=50$，精确计算结果为 $G_{Mult}=1.9966$ 和 $G_{Sum}=2.0067$，近似值为 $G_{Mult}\approx1.997$ 和 $G_{Sum}\approx2.007$。由式(44)和式(45)可以推断，随着 N 不断增大，比值向 2 收敛。必须注意的是，在上述计算中，本文仅仅考虑了算术运算，而并没有考虑计算机系统内存访问等造成的额外负担。在下一节中，作者通过实验对上述结果进行实际验证。

4 实验验证

传统 DCV 分类方法和本文新提出的快速 DCV 分类方法在识别率相同的情况下，后者在分类过程中提高了速率，具有更高的效率。上一节在理论上给出了详细的论证，本节将通过实验给出进一步的说明。为了保证实验的可信度和有效性，采用 Yale、ORL 和 PIE 3 种人脸数据库分别进行两类实验，对本文提出的快速 DCV 分类方法进行验证。实验环境如下：AMD Phenom II 4 CPU、2.0GHz 速度、4G 内存、Windows XP 32bit SP3 系统、Matlab 7.6.0 软件。

4.1 在 Yale 人脸数据库的实验

Yale 人脸数据库[16]由耶鲁大学计算视觉与控制中心创建，包括 15 人共 165 幅脸部图像，每人 11 幅。所有图像取自于不同光照条件，且包含正常、愉悦、悲伤、困倦、惊讶和眨眼等不同表情。图 1 是 Yale 数据库中的部分样例图。

图 1 Yale 数据库中的部分样例图

Yale 数据库中的实验数据经过预处理后分为 15 个类，每类包含 11 个样本，共 165 个样本，每个样本大小为 1×1024。第一类实验观察在训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下传统 DCV 和快速 DCV 在识别率和识别速率上的差别。本实验分为 7 种情况，每一类的 11 个样本中，用于训练的样本数分别为 2、3、4、5、6、7、8 个，即待分类样本数分别为 9、8、7、6、5、4、3 个，每种情况下的识别重复 10 次，最后标记的数值为 10 次计算的平均值。实验结果如表 1 所列。

表 1 Yale 数据库下实验一(样本数变化)识别率和识别速率比较

每一类中用于分类的样本数(个)		9	8	7	6	5	4	3
识别率	传统 DCV	0.5652	0.6557	0.7600	0.7789	0.8200	0.8383	0.8556
	快速 DCV	0.5652	0.6557	0.7600	0.7789	0.8200	0.8383	0.8556
识别时间(s)	传统 DCV	0.6243	0.8360	1.1143	1.2496	1.3587	1.2792	1.2604
	快速 DCV	0.3109	0.4156	0.5578	0.6234	0.6750	0.6344	0.6234

表 1 中的实验结果验证了本文提出的快速 DCV 分类方法与传统 DCV 分类方法在 Yale 数据库具有相同的识别率，如图 2 所示，两种方法的识别率曲线完全重合；与此同时，还可以验证在本实验中，快速 DCV 分类所用时间比传统 DCV

少，且前者的分类速率为后者的2倍左右，如图3所示。

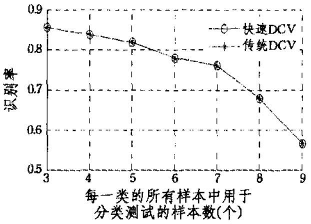

图2　训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法的识别率曲线图（Yale数据库）

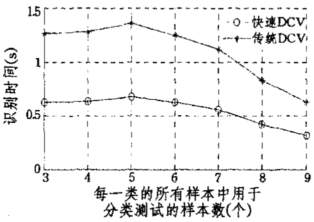

图3　训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法的识别时间曲线图（Yale数据库）

上述实验验证了在样本数变化的情况下，本文上一节的推断结论是正确的，第二类实验将要验证在样本类别数发生变化时，传统DCV和快速DCV在识别率和识别速率上的关系。在实验中，样本类别数分为3、6、9、12、15这5种情况，每一类的11个样本中，3个样本用于训练，其余的用于分类测试；每种情况下进行10次重复实验，最后标记的数值为10次计算的平均值。实验结果如表2所列。

表2　Yale数据库下实验二（样本类别数变化）识别率和识别速率比较

样本类别数		3	6	9	12	15
识别率	传统DCV	0.8083	0.7875	0.7319	0.7208	0.6775
	快速DCV	0.8083	0.7875	0.7319	0.7208	0.6775
识别时间(s)	传统DCV	0.0352	0.0886	0.2015	0.5484	0.8318
	快速DCV	0.0172	0.0438	0.0984	0.2703	0.4141

该实验结果说明了在样本类别数不断增大的过程中，快速DCV分类方法和传统DCV分类方法识别率不断降低但却始终一致，且前者的识别速率约为后者的2倍，曲线图如图4、图5所示。

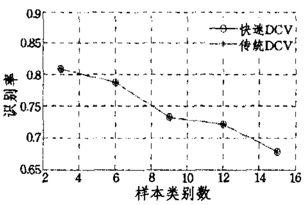

图4　样本类别数发生变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法识别率曲线图（Yale数据库）

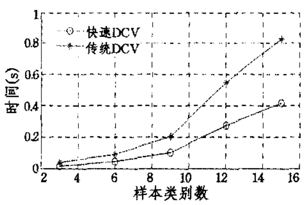

图5　样本类别数变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法识别速率曲线图（Yale数据库）

4.2　在ORL人脸数据库的实验

ORL人脸数据库[17]由剑桥大学AT&T实验室创建，包含40人共400张灰度人脸图像，根据眼睛的位置进行图像配准，使所有图像的左眼中心和右眼中心重合。部分志愿者的图像包括了姿态、表情和面部饰物的变化。图6是ORL数据库中的部分样例图。

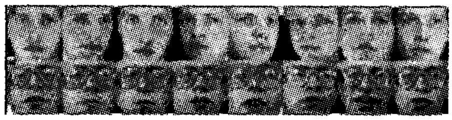

图6　ORL数据库中的部分样例图

ORL数据库中的实验数据经过预处理后分为40个类，每类包含10个样本，共400个样本，每个样本大小为1×1024。跟Yale数据库一样，在ORL数据库同样进行两类实验。样本数变化的实验分为7种情况，每一类的10个样本中，用于训练的样本数分别为2、3、4、5、6、7、8个，每种情况下的识别重复10次，最后标记的数值为10次计算的平均值。实验结果如表3所列，快速DCV和传统DCV分类方法具有相同的识别率，识别过程花费的时间后者是前者的2倍左右，且曲线图具有相同的走势（见图7、图8）。

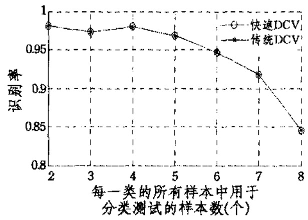

图7　训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法的识别率曲线图（ORL数据库）

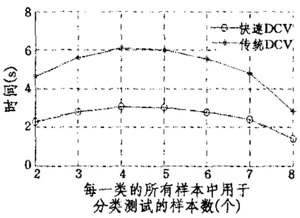

图8　训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法的识别时间曲线图（ORL数据库）

接下来我们进行样本类别数变化的实验。在ORL数据库中，样本类别数分为5、10、15、20、25、30、35、40这8种情况，每一类的10个样本中，3个样本用于训练，其余的用于分类测试；每种情况下进行10次重复实验，最后标记的数值为10次计算的平均值。实验结果如表4所列。

从上述数据可以看出，在样本类别数不断增大的过程中，快速DCV分类方法和传统DCV分类方法的识别率始终一致，且前者的识别速率约为后者的2倍，曲线图如图9、图10所示。

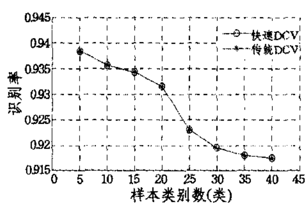

图9　样本类别数变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法识别率曲线图（ORL数据库）

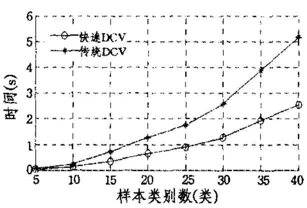

图10　样本类别数变化的情况下，传统DCV和快速DCV分类方法识别速率曲线图（ORL数据库）

表3　ORL数据库下实验一（样本数变化）识别率和识别速率比较

每一类中用于分类的样本数(个)		8	7	6	5	4	3	2
识别率	传统DCV	0.8450	0.9175	0.9471	0.9685	0.9800	0.9725	0.9813
	快速DCV	0.8450	0.9175	0.9471	0.9685	0.9800	0.9725	0.9813
识别时间(s)	传统DCV	2.8055	4.8071	5.5353	5.9866	6.1002	5.6008	4.6083
	快速DCV	1.3984	2.3984	2.7609	3.0000	3.0469	2.7922	2.2938

表 4 ORL 数据库下实验二(样本类别数变化)识别率和识别速率比较

样本类别数		5	10	15	20	25	30	35	40
识别率	传统 DCV	0.9385	0.9357	0.9343	0.9315	0.9230	0.9195	0.9180	0.9175
	快速 DCV	0.9385	0.9357	0.9343	0.9315	0.9230	0.9195	0.9180	0.9175
识别时间(s)	传统 DCV	0.0514	0.2329	0.6942	1.2567	1.7417	2.5674	3.8839	5.1583
	快速 DCV	0.0250	0.1172	0.3438	0.6266	0.8641	1.2719	1.9297	2.5469

4.3 在 PIE 人脸数据库的实验

PIE 人脸数据库[18]由美国卡耐基梅隆大学创建,包含 68 人的 41368 张人脸图像,其中包括 13 个姿态变化和 43 个光照变化。其中的姿态和光照变化图像也是在严格控制的条件下采集的,目前已经逐渐成为人脸识别领域的一个重要的测试集合。图 11 是 PIE 数据库中的部分样例图。

本实验中采用的 PIE 实验数据分为 68 个类,每类包含 170 个样本,共 11560 个样本,每个样本大小为 1×1024。样本数变化的实验分为 7 种情况,每一类的 170 个样本中,用于训练的样本数分别为 5、10、20、30、40、50、60 个,每种情况下的识别重复 10 次,最后标记的数值为 10 次计算的平均值。实验结果如表 5 所列。

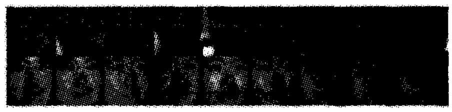

图 11 PIE 数据库中的部分样例图

快速 DCV 和传统 DCV 分类方法同样具有相同的识别率,识别过程花费的时间后者是前者的 2 倍左右,曲线图如图 12、图 13 所示。

表 5 PIE 数据库下实验一(样本数变化)识别率和识别速率比较

每一类中用于训练的样本数(个)		5	10	20	30	40	50	60
识别率	传统 DCV	0.6200	0.7044	0.7184	0.7320	0.7500	0.8215	0.8480
	快速 DCV	0.6200	0.7044	0.7184	0.7320	0.7500	0.8215	0.8480
识别时间(s)	传统 DCV	993.79	1917.6	2794.1	2622.3	2712.7	2711.4	2356.9
	快速 DCV	486.14	933.41	1357.9	1278.6	1321.4	1319.7	1159.5

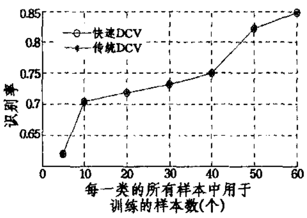

图 12 训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下,传统 DCV 和快速 DCV 分类方法的识别率曲线图(PIE 数据库)

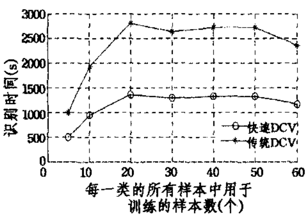

图 13 训练样本数和待分类样本数同时发生变化的情况下,传统 DCV 和快速 DCV 分类方法的识别时间曲线图(PIE 数据库)

样本类别数变化的实验中,类别数设置为 8、16、24、32、40、48、56、64 等 8 种情况,每一类的 170 个样本中,5 个样本用于训练,其余的用于分类测试;每种情况下进行 10 次重复实验,最后标记的数值为 10 次计算的平均值。实验结果如表 6 所列。

从上述数据可以看出,在样本类别数不断增大的过程中,快速 DCV 分类方法和传统 DCV 分类方法的识别率始终一致,且前者的识别速率约为后者的 2 倍,曲线图如图 14、图 15 所示。

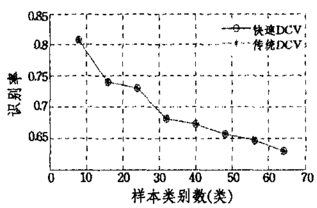

图 14 样本类别数变化的情况下,传统 DCV 和快速 DCV 分类方法识别率曲线图(PIE 数据库)

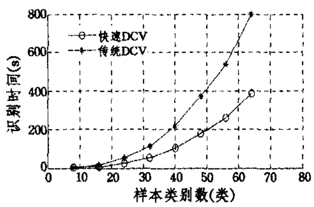

图 15 样本类别数变化的情况下,传统 DCV 和快速 DCV 分类方法识别速率曲线图(PIE 数据库)

表 6 PIE 数据库下实验二(样本类别数变化)识别率和识别速率比较

样本类别数		8	16	24	32	40	48	56	64
识别率	传统 DCV	0.8081	0.7404	0.7299	0.6815	0.6720	0.6566	0.6468	0.6301
	快速 DCV	0.8081	0.7404	0.7299	0.6815	0.6720	0.6566	0.6468	0.6301
识别时间(s)	传统 DCV	2.7078	16.638	51.955	111.44	219.93	368.26	536.54	796.39
	快速 DCV	1.2719	7.9188	24.713	53.133	104.58	176.64	257.48	384.41

结束语 本文介绍了一种快速的 DCV 分类方法,该方法与传统的 DCV 分类方法相比,在保证识别率相同的情况下具有较快的分类速率。通过对两种分类标准的理论分析,证实本文提出的改进方法并非改变传统 DCV 的识别率,与此同时,通过精确的计算复杂度分析说明了快速 DCV 的分类速率是传统 DCV 的 2 倍左右。在 Yale、ORL 和 PIE 3 类人脸数据库中的实验数据为上述结论提供了可靠的实际依据。本文提出的改进算法不仅适用于人脸识别,也可以推广到其他图像识别问题。

参考文献

[1] Teja G P, Ravi S. Face Recognition Using Subspaces Techniques [C]//International Conference on Recent Trends in Information Technology(ICRTIT). 2012:103-107

[2] 汪洋,严云洋,王洪元. 基于差空间的双向 2DPCA 和 SVM 人脸识别算法[J]. 计算机科学,2012,39(12):268-271

[3] 齐鸣鸣,向阳. 基于 MB-LBP 和改进的 LFDA 的人脸识别[J]. 计算机科学,2012,39(6):266-269

[4] Wang Cheng-liang, Lan Li-bin, Zhang Yu-wei, et al. Face Recog-

nition Based on Principle Component Analysis and Support Vector Machine[C]// 3th International Workshop on Intelligent System and Applications. Chongqing,China,2011:1-4

[5] 杜海顺,李玉玲,汪凤泉,等.一种核最大散度差判别分析人脸识别方法[J].计算机科学,2010,37(6):286-288

[6] 俞璐,谢钧,朱磊.一种基于目标空间的局部判别投影方法[J].电子与信息学报,2011,33(10):2390-2395

[7] 郑建炜,王万良,姚晓敏,等.张量局部 Fisher 判别分析的人脸识别[J].自动化学报,2012,38(9):1485-1495

[8] Cevikalp H,Neamtu M,Wilkes M,et al. Discriminative common vectors for face recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,2005,27(1):4-13

[9] Gunal S,Edizkan R. Subspace based feature selection for pattern recognition[J]. Information Sciences,2008,178(19):3716-3726

[10] Edizkan R,Gulmezoglu M B,Ergin S,et al. Improvements on common vector approach for multi class problems[C]// 13th European Signal Processing Conference. Antalya, Turkiye, 2005: 257-261

[11] Tamura A,Zhao Q. Rough common vector: a new approach to face recognition[C]// IEEE International Conference on Systems,Man,and Cybernetics. 2007:2366-2371

[12] Gulmezoglu M B,Dzhafarov V,Barkana A. The common vector approach and its relation to principal component analysis[J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2001, 9 (6):655-662

[13] Lu Gui-fu, Wang Yong. Feature extraction using a fast null space based linear discriminant analysis algorithm[J]. Information Sciences,2012,193(3):72-80

[14] Liu Jun, Chen Song-can. Discriminant common vectors versus neighbourhood components analysis and Laplacian faces: A comparative study in small sample size problem[J]. Image and Vision Computing,2006,24(3):249-262

[15] Cevikalp H, Wilkes M. Face Recognition by Using Discriminative Common Vectors[C]// Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition. 2004:326-329

[16] http://cvc.yale.edu/projects/yalefaces/yalefaces.html

[17] http://blog.sina.com.cn/s/blog_02b6f23d0100eq88.html

[18] http://www.zjucadcg.cn/dengcai/Data

(上接第 302 页)

表 9 Dragon 模型攻击后提取水印的 Sim 及 PSNR

攻击方式	α=0.001		α=0.005		α=0.01	
	Sim	PSNR	Sim	PSNR	Sim	PSNR
平移 1	0.9961	32.092	0.9983	34.7745	0.9994	34.9714
平移 2	0.9894	27.7386	0.9980	34.0819	0.9983	34.7745
平移 4	0.9649	24.4850	0.9969	33.1224	0.9920	34.0818

由上述实验结果可以看出,本文算法对平移攻击、噪声攻击都有很好的鲁棒性,对于 30%以下的剪切还能保持良好的峰值信噪比和相似度,并且和文献[9]相比在噪声攻击方面具有更强的鲁棒性,在三维模型视觉方面,嵌入系数 α 在 0.005～0.01 之间时,表现出良好的观测值和鲁棒性。

结束语 本文提出了一种基于遗传算法的小波域上的三维网格模型水印算法,它利用遗传算法寻找最佳嵌入位置,利用此最佳嵌入位置的半径值进行离散小波变换,得到嵌入系数,并嵌入水印,使在此最佳位置上嵌入水印后的模型的形变量最小。实验结果表明本文提出的算法既对多类攻击方式具有鲁棒性,又可保持三维模型形变量较小。

参考文献

[1] Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking three-dimensional polygonal models[C]// Proc. of the ACM International Multimedia Conference and Exhibition. 1997:261-272

[2] Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking three-dimensional polygonal models through geometric and topological modifications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications,1998,16(4):551-560

[3] Zafeirius S,Tefas A,Pitas I. Blind robust watermarking schemes for copyright protection of 3D mesh object[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics,2005,11(5):596-607

[4] Nyeem H,Boles W,Boyd C. On the robustness and security of digital image watermarking[C]// Informatics,Electronics & Vision (ICIEV). Dhaka,2012:1136-1141

[5] Motwani R,Motwani M,Harris F Jr. Future networks[C]// ICFN'10. second International Conference. 2010:447-451

[6] 魏至成,戴居丰,李昊.基于遗传算法的图像数字水印技术[J].计算机工程,2007,33(17):146-148

[7] Modaghegh,Khosravi R,Akbarzadeh H. A new adjustable blind watermarking based on GA and SVD[C]// Innovations in Information Technology. 2009:6-10

[8] Luo Ming,Bors A G. Surface-Preserving Robust Watermarking of 3-D Shapes[M]// Image Processing,2011:2813-2826

[9] Liu Quan, Liu Yang. Watermarking of 3D polygonal meshes based on feature points[C]// 2nd IEEE Conference on Industrial Electronics and Application. Harbin, China, 2007: 1837-1841

[10] 岳悦,李象霖.遗传算法在三维网格模型数字水印中的应用[J].计算机仿真,2010,27(1):172-175

[11] Jagadeesh, Kumar, Srinivas, et al. A Genetic Algorithm Based Oblivious Image Watermarking Scheme Using Singular Value Decomposition (SVD)[C]// Networks and Communications, NETCOM. 2009:224-229