

# 基于 MC 法改进的实验模型在圆周率估算中的应用

张 兵<sup>1,2</sup> 赵跃龙<sup>3</sup>

(成都东软学院数字艺术系 成都 611844)<sup>1</sup> (中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)<sup>2</sup>

(华南理工大学信息与科学工程学院 广州 510640)<sup>3</sup>

**摘要** 蒙特卡罗法采用统计抽样理论近似求解工程问题,但其存在着模型精确度和时间复杂度相互矛盾的问题。通过估算圆周率,构建 Monte-Carlo 法实验模型,对模型的精确度和时间复杂度进行了理论分析,提出了两种基于实验模型的改进方案,并采用移位和预处理的思想,将大数除法转化为乘法来降低计算复杂度,从而提高梅森算法效率。仿真结果表明,在保持相同精确度的情况下,改进型的实验模型和算法能够大幅度降低仿真时间,提高仿真速度,具有一定的工程应用价值。

**关键词** Monte-Carlo 法,梅森旋转算法,算法复杂度

**中图分类号** TP391 **文献标识码** A

## Application of Improved Experimental Model Based on MC Method in Estimation of pi

ZHANG Bing<sup>1,2</sup> ZHAO Yue-long<sup>3</sup>

(Department of Digital Art, Chengdu Neusoyt University, Chengdu 611844, China)<sup>1</sup>

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)<sup>2</sup>

(School of Information and Science Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)<sup>3</sup>

**Abstract** Monte Carlo method uses statistical sampling theory approximation for solving engineering problems. There are the conflicting issues of model accuracy and time complexity, so experimental model of the Monte-Carlo method was established to estimate pi and theoretically analyze the model accuracy and time complexity. This paper put forward the idea of two improvement program based on the experimental model, and through shift and pretreatment, converted the Tarsus division to reduce the computational complexity of multiplication Mason algorithm to improve efficiency. The simulation results show that in the case of maintaining the same accuracy, the improved experimental model and algorithms can significantly reduce the simulation time, improve the simulation speed, and thus possess a certain value in engineering.

**Keywords** Monte Carlo-method (MC), Mason rotation algorithm, Algorithm complexity

## 1 引言

Monte-Carlo 方法是一种以概率和统计理论方法为基础的计算方法,将所求解的问题同一定的概率模型相联系,用电子计算机实现统计模拟或抽样,以获得问题的近似解<sup>[1]</sup>。随着计算机技术的发展, Monte-Carlo 方法在近 10 年得到快速的普及与发展。现代的 Monte-Carlo 方法借助计算机的高速运转能力,使得原本费时费力的实验过程变得快速和轻而易举,不但用于解决许多复杂的科学方面的问题<sup>[2,3]</sup>,而且经常被项目管理人员使用<sup>[4]</sup>。由于 Monte-Carlo 仿真方法是基于统计的实验方法<sup>[5-7]</sup>,其理论缺陷导致精确度和时间复杂度相互矛盾。

本文以估算圆周率为手段,采用 Monte-Carlo 法构建实验模型,并对模型进行了误差分析和算法复杂度分析。在实

验模型时间复杂度分析的基础上,提出了两种改进实验模型和一种梅森旋转法的改进方案,它们都有效地降低了实验的时间复杂度,具有一定的工程应用价值。

## 2 Monte-Carlo 法关键问题分析

### 2.1 误差分析

Monte-Carlo 法作为一种统计分析方法,其样本空间是极大的<sup>[8]</sup>。由于其理论的缺陷,误差的存在是必然的。Monte-Carlo 法是以随机变量  $X$  的简单子样  $X_1, X_2, \dots, X_N$  的算术平均值(见式(1))作为所求解的近似值。

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (1)$$

由大数定律可知,设  $X_1, X_2, \dots, X_N$  独立同分布且具有有限期望值,即  $E(X) < \infty$ , 当其算术平均值  $\bar{X}_N$  在  $N$  充分大

到稿日期:2013-03-09 返修日期:2013-05-29 本文受教育部人文社会科学研究青年基金项目(11YJC6302620),中国博士后基金项目(2012M511845),国家固态酿造工程技术研究中心项目(GCKF2011102)资助。

张 兵(1977—),男,硕士,副教授,主要研究方向为新媒体技术、数据库技术、高等教育管理等,E-mail:hhpcanmy@qq.com;赵跃龙(1958—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机系统结构、计算机外存储系统、嵌入式系统、智能 I/O 系统及计算机产品开发与应用等。

时,以概率 1 收敛于它的期望值  $E(X)$ 。针对 Monte-Carlo 方法的近似值与真值的误差问题,根据中心极限定理可知,如果随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_N$  独立同分布,且具有有限非零的方差  $\sigma^2$  (见式(2),式中  $f(x)$  为  $X$  的分布密度函数),

$$\sigma^2 = \int (x - E(X))^2 f(x) dx < \infty \quad (2)$$

则有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma} |\bar{X}_N - E(X)| < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt \quad (3)$$

当  $N$  充分大时,有如下近似式:

$$P(|\bar{X}_N - E(X)| < \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{N}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{\alpha/2}}^{z_{\alpha/2}} e^{-t^2/2} dt = 1 - \alpha \quad (4)$$

式中,  $\alpha$  称为置信度,  $1 - \alpha$  称为置信水平。这表明,不等式(6)近似地以概率  $1 - \alpha$  成立,且误差收敛速度的阶为  $O(N^{-1/2})$ 。

$$|\bar{X}_N - E(X)| < \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{N}} \quad (5)$$

通常情况下, Monte-Carlo 方法的误差  $\epsilon$  定义为:

$$\epsilon = \frac{z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{N}} \quad (6)$$

式(6)中  $Z_{\alpha/2}$  与置信度  $\alpha$  是一一对应的,根据问题的要求确定出置信水平后,查标准正态分布表就可以确定出  $Z_{\alpha/2}$ 。误差  $\epsilon$  中的均方差  $\sigma$  是未知的,必须使用其估计值  $\hat{\sigma}$  来代替,如式(7)所示。在计算所求量的同时,可计算出  $\hat{\sigma}$ 。

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right)^2} \quad (7)$$

## 2.2 算法复杂度分析

实验模型的算法复杂度包括时间复杂度和空间复杂度,时间复杂度是指算法执行过程中每条语句的执行时间与执行次数的乘积,空间复杂度是指算法运行所需要的内存空间以及产生的数据存储所需要的空间总和。本文研究 Monte-Carlo 法估算圆周率是在计算机具有足够的内存空间的条件下进行的,即对算法进行时间复杂度分析。通过分析 Monte-Carlo 法建模仿真的整个过程以及算法中所涉及的所有运算,其计算过程最为复杂、耗时最多的是随机点坐标的生成函数 rand,大约占用一次循环时间的 80%~90%。Matlab 软件中 rand 函数有 3 种工作状态<sup>[4]</sup>,分别为 seed、state 和 twister。

由不同工作模式下的随机数生成周期可知, twister 工作模式下的 rand 函数具有最好的工作性能,在此工作模式下随机数的生成算法为梅森旋转算法<sup>[9]</sup>,该算法为目前已知生成周期最长、随机数质量最好的算法。梅森旋转算法由 Makoto 和 Takuji 于 1998 年提出,其递推公式如下:

$$X_{k+n} = X_{k+m} \oplus (X_k^r | X_{k+1}^r) A, (k=0, 1, \dots) \quad (8)$$

该递推公式是模 2 类发生器的一种,即产生二进制的随机数位,从而构成随机数。梅森旋转算法产生随机数序列  $\{X_i\}$ ,其中  $X_i = (X_{i,w-1}, X_{i,w-2}, \dots, X_{i,0})$  是二进制上的  $w$  位的字向量。将  $\{X_i\}$  除以  $2^w - 1$ ,即得到区间  $(0, 1)$  上的均匀随机序列  $\{r_i\}$ 。

对于式(8)要做的解释是:整数  $n$  为递推式的阶数;整数  $r$  取值范围为  $0 \leq r \leq w-1$ ,隐藏在  $O(n^{\log_2 3})$  的定义中;整数  $m$

取值范围为  $1 \leq m \leq n$ ;  $A$  为  $F_2$  域上  $w \times w$  阶常数矩阵。 $X_k^r$  代表取  $X_k^r$  的前  $w-r$  位,  $X_{k+1}^r$  表示取  $X_{k+1}^r$  的后  $r$  位。 $(X_k^r | X_{k+1}^r)$  代表将  $X_k^r$  的前  $w-r$  位与  $X_{k+1}^r$  的后  $r$  位连接,从而组成一个新的  $w$  位的字向量。

$n, m, w, A$  都是该序列的周期参数。为了得到更长的周期,也为了提高计算速度,一般取  $A$  为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{w-1} & a_{w-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

因此  $XA$  相当于一个位移运算,即:

$$XA = \begin{cases} \text{shift, right}(X), & \text{if } X_0 = 0 \\ \text{shift, right}(X) \oplus a, & \text{if } X_0 = 1 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $X = (X_{w-1}, X_{w-2}, \dots, X_0)$ ,  $a = (a_{w-1}, a_{w-2}, \dots, a_0)$ 。梅森旋转算法的特征多项式展开式约有 100 多项,且其本原性易被证明,因此拥有很好的随机性。

通过分析可知,算法中使用的主要运算为二进制整数的移位、模 2 加、大数除法,因此算法整个复杂度即为大数除法复杂度  $T(w) = O(w^2)$ ,  $w$  为整数的二进制长度。

## 3 仿真结果分析及改进

采用一个单位面积的正方形包围一个扇形区域,即单位圆的第一象限。采用 Matlab 中 'twister' 状态下的 rand 函数,均匀地在  $(0, 1)$  区间内产生  $N$  组随机数  $[x, y]$ 。如果有  $N_1$  组随机数落入扇形区域,则落入扇形区域的比例为  $P = N_1/N$ ;如果  $N$  趋于无穷,那么  $P$  趋于  $\pi/4$ 。

### 3.1 仿真结果

$\pi$  值仿真估算结果如图 3 所示,随着  $N$  的阶数增加,实验模型下的  $\pi$  值越来越接近真值,其误差处于置信度  $\alpha = 0.05$  的误差区间之内。

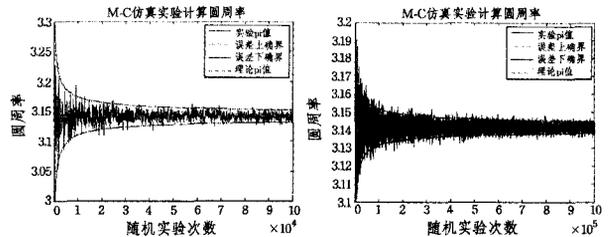


图 1 仿真结果图

对于  $\pi$  值仿真估算,最为关心的就是仿真结果的有效小数位。分析实验结果可知,随着仿真实验次数的阶数增加,仿真的  $\pi$  值小数位与理论推导一致。具体如图 2 所示。

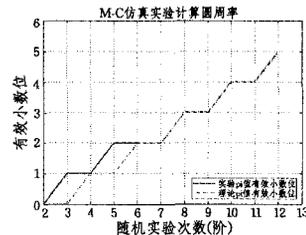


图 2 有效小数位

仿真时间的统计是衡量算法复杂度的重要标志之一。如表 1 所列,随着实验次数  $N$  的阶数增加,仿真时间基本呈现

10 倍递增的趋势,有效小数位随着仿真时间的增加而基本按照理论推导的方式增加,即  $O(N^{-1/2})$ 。

表 1 仿真时间统计

N(阶)	2	3	4	5	6	7
有效小数位	0	1	1	2	2	2
仿真时间(s)	0.00006	0.00030	0.00310	0.03254	0.22207	1.44971
N(阶)	8	9	10	11	12	—
有效小数位	3	3	4	4	5	—
仿真时间(s)	15.7117	157.258	2104.34	16203.2	150812	—

### 3.2 实验模型改进

从理论分析可以看出, Monte-Carlo 法估算  $\pi$  值仿真模型,关键在于每次循环中随机数的计算。而‘twister’状态下的 rand 函数,序列周期为  $2^{19937}-1$ ,此函数的调用在每次循环中大约耗费了 80%~90%的时间。因此,如果要使仿真时间尽可能地低,而得到尽可能高的有效小数位,降低 rand 函数的调用次数是最为直接的方法之一。以下提出两种实验模型的改进方案,用以降低仿真时间。

#### (1) 零驱动模式估计圆周率

与前文提出的在一次循环中调用两次 rand 函数的算法不同,此处提出的零驱动模式是指  $x, y$  坐标全都由均匀分布产生,使实验数组完全均匀分布在单位正方形中,具体实验模型如图 3 所示。

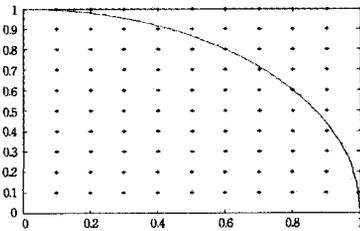


图 3 零驱动模式估计圆周率

#### (2) 单驱动模式估计圆周率

与之前两种实验模型相对应,单驱动模式是将  $y$  坐标由 rand() 函数产生,  $x$  坐标则为均匀分布产生,具体实验模型如图 4 所示。

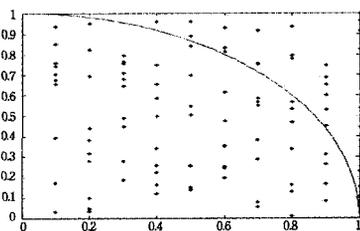


图 4 单驱动模式估计圆周率

3 种实验模型仿真结果对比如下,仿真时间如表 2 所列,圆周率实验值的有效小数位如表 3 所列。

表 2 3 种实验模型仿真时间(s)对比

N(阶)	2	3	4	5	6	7
零驱动模式	0.00005	0.00012	0.00049	0.00264	0.03738	0.09723
单驱动模式	0.00006	0.00022	0.00192	0.02031	0.17326	0.84479
双驱动模式	0.00006	0.00030	0.00310	0.03254	0.22207	1.44971
N(阶)	8	9	10	11	12	—
零驱动模式	1.71441	18.449	164.44	1945.48	16784.7	—
单驱动模式	10.7782	90.347	1346.22	10170.8	91482.9	—
双驱动模式	15.7117	157.258	2104.34	16203.2	150812	—

表 3 3 种实验模型仿真结果有效小数位对比

N(阶)	2	3	4	5	6	7
零驱动模式	0	0	1	1	1	2
单驱动模式	0	0	1	1	1	2
双驱动模式	0	1	1	2	2	2
N(阶)	8	9	10	11	12	—
零驱动模式	2	3	4	4	5	—
单驱动模式	3	3	4	4	5	—
双驱动模式	3	3	4	4	5	—

从表 3 数据可知,零驱动模式、单驱动模式和双驱动模式在相同实验次数下,仿真时间比大致为 0.2 : 0.6 : 1,与理论推导一致。对于圆周率实验值的有效小数位,在实验次数较低的情况下,双驱动模式优于零驱动模式和单驱动模式,而单驱动模式优于零驱动模式,但是在高阶 N 的情况下,有效小数位基本相同。因此,两种改进实验模型能够较好地降低仿真时间。

### 3.3 梅森算法改进

由梅森算法的复杂度分析可知,影响算法速度的主要因素为每次随机点坐标生成时算法中的大数除法运算,因此提高大整数的除法运算效率将会提高整个算法的运算速度。本文提出采用移位和预处理的思想,将大数除法转化为乘法以降低计算复杂度,从而提高算法效率。

由梅森旋转算法中的除法运算  $\frac{X_i}{2^w-1}$  可知,每次计算仅有分子  $X_i$  是随机的可变的,因此可将该除法运算转化为:

$$\frac{X_i}{2^w-1} = \frac{X_i}{2^w} \cdot \frac{2^w}{2^w-1} \quad (11)$$

其中,等式右边分为两部分  $\frac{X_i}{2^w}$  和  $\frac{2^w}{2^w-1}$ ,  $\frac{X_i}{2^w}$  仅需移位即可实现,因式  $\frac{2^w}{2^w-1}$  在每次不同的除法运算中是不变的,可以在算法开始前作为一个常量提前参与计算,整个大数除法运算转化为移位运算和两数的乘法运算。对于改进后的乘法运算,设  $x = \lfloor \frac{X_i}{2^w} \rfloor, y = \lfloor \frac{2^w}{2^w-1} \rfloor$ , 定义运算  $| \cdot |$  将小数点忽略,即为去小数点运算,  $x, y$  作为二进制长度为  $w$  的 2 个整数参与乘法运算。设  $x = A \times 2^{\frac{w}{2}} + B, y = C \cdot 2^{\frac{w}{2}} + D$ , 其中  $A, B, C, D$  均为长度为  $\frac{w}{2}$  的整数。则:

$$xy = AC \cdot 2^w + [(A-B)(D-C) + AC + BD] \cdot 2^{\frac{w}{2}} + BD \quad (12)$$

将计算后得到的结果进行小数化,得到最终正确结果。改进后算法仅需做 3 次  $\frac{w}{2}$  位整数的乘法 ( $AC, BD$ ) 和  $(A-C)(B-D)$ , 6 次加、减法和 2 次移位,其复杂度为  $O(w^{\log_2 3})$ , 如图 5 所示。

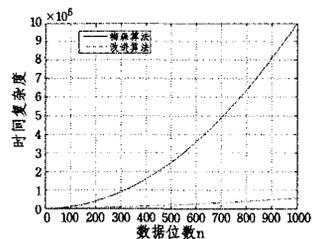


图 5 两种算法时间复杂度对比

实验模型中使用的‘twister’状态下的 rand() 函数,其数

据位为 19937 位,那么改进后的梅森算法将使时间复杂度下降 61 倍。因此,本文所提出的改进型梅森算法能大幅度减少同等实验次数下的仿真时间。

**结束语** Monte-Carlo 方法是用随机试验的方法计算数值积分,这为解决实际问题提供了一种新的思路。在圆周率仿真计算中, Monte-Carlo 法的误差收敛速度为  $O(N^{-1/2})$ ,一般不容易得到精确度较高的近似结果,但其实验设计简单,且对计算机的资源要求不高,在较低实验次数下就能得到较高的运算精度。使用单驱动法估算圆周率,在不失精度的前提下缩短了运算时间,更好地解决了问题。文中提出的改进型梅森算法能够大幅度减少仿真时间,具有一定的应用价值。

### 参考文献

[1] 宁波,陈刚,陈卫东. 基于蒙特卡洛法的水下火箭攻击弹道数学仿真研究[J]. 系统仿真学报,2006,18(2):8-12

[2] 潘冬. 基于 Monte-Carlo 法的矿岩结构面的计算机模拟[J]. 矿业研究与开发,2010,30(1):22-24  
 [3] Harlin W J, Cicci D A. Ballistic missile trajectory prediction using a state transition matrix[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188: 1832-1847  
 [4] 裴鹿成. 计算机随机模拟[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1989  
 [5] 郑小兵,董景新,张志国,等. 基于蒙特卡罗法的弹道导弹落点密集度验前估计[J]. 中国惯性技术学报,2011,19(1):116-121  
 [6] 崔明路,王治强,刘薇. 基于蒙特卡罗的星一地单光子通信仿真方法[J]. 计算机工程,2011,37(7):68-71  
 [7] 胡亮,裴莹,初剑峰,等. 基于鼠标移动轨迹的真随机数产生方法[J]. 吉林大学学报:理学版,2011,49(5):890-894  
 [8] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,2001  
 [9] 王萍,许海洋. 一种新的随机数组合发生器的研究[J]. 计算机技术与发展,2006,16(4):79-81

(上接第 273 页)

$= (1 - A(x) \vee A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \wedge y) \vee \lambda) \geq t$ , 即  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ , 同理可证  $A(x \vee y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ .

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall x, y \in L$ , 有  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ , 则  $R_{KD}(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \vee A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \wedge y) \vee \lambda) \geq t$ , 同理可证  $R_{KD}(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \vee y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \vee A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \vee y) \vee \lambda) \geq t$ , 故  $A$  为  $L$  上的  $R_{KD}$ -广义模糊子格的理想。

(7) “ $\Rightarrow$ ”  $\forall x, y \in L$ , 当  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq A(x) \vee A(y) \wedge \mu$  时,  $R_O(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = 1 \geq t$ , 当  $A(x \wedge y) \vee \lambda < A(x) \vee A(y) \wedge \mu$  时,  $R_O(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \vee A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \wedge y) \vee \lambda) \geq t$ , 有  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ , 故有  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq A(x) \vee A(y) \wedge \mu$  或  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ , 同理可证  $A(x \vee y) \vee \lambda \geq A(x) \wedge A(y) \wedge \mu$  或  $A(x \vee y) \vee \lambda \geq t$  或  $A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ .

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall x, y \in L$ , 当  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq A(x) \vee A(y) \wedge \mu$  时,  $R_O(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = 1 \geq t$ , 当  $A(x \wedge y) \vee \lambda < A(x) \vee A(y) \wedge \mu$  时,  $R_O(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \wedge y) \vee \lambda) \geq t$ , 同理可证  $R_O(A(x) \wedge A(y) \wedge \mu, A(x \vee y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \wedge A(y) \wedge \mu) \vee (A(x \vee y) \vee \lambda) \geq t$ , 故  $A$  为  $L$  上的  $R_O$ -广义模糊子格的理想。

(8) “ $\Rightarrow$ ”  $\forall x, y \in L$ , 当  $1 - A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \geq t$  时, 有  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$ , 当  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \wedge A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$  时, 可得  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \geq t$  或  $A(x \wedge y) \vee \lambda \geq t$ . 同理可证  $1 - A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \geq t$  或  $A(x) \wedge A(y) \wedge \mu \geq t$  或  $A(x \vee y) \vee \lambda \geq t$ .

“ $\Leftarrow$ ”  $\forall x, y \in L$ , 当  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \leq 1 - t$  或  $A(x) \vee A(y) \wedge \mu \geq t$  或  $A(x \vee y) \vee \lambda \geq t$  时, 则有  $R_c(A(x) \vee A(y) \wedge \mu, A(x \wedge y) \vee \lambda) = (1 - A(x) \vee A(y) \wedge \mu) \wedge (A(x) \vee A(y) \wedge \mu \wedge A(x \wedge y) \vee \lambda) \geq t$ , 同理可证  $R_c(A(x) \wedge A(y) \wedge \mu, A(x \vee y) \vee \lambda) \geq t$ .

**结束语** 本文将一般的  $R$ -广义模糊子格与  $(\lambda, \mu)$ -fuzzy 理想相结合, 给出了  $R$ -广义模糊子格的理想的定义, 并讨论了它的一系列代数性质。最后给出了 8 个常见蕴涵算子下

$R$ -广义模糊子格的理想的等价条件。这加深了对  $R$ -蕴涵算子与模糊代数相结合的代数结构的认识, 为多值逻辑在控制领域的应用提供了新的理论基础。

### 参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353  
 [2] Rosenfeld A. Fuzzy groups [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 35: 512-517  
 [3] Boms D W, Mack J M. An algebraic introduction on mathematical logic [M]. Berlin: Springer, 1975  
 [4] Bolc L, Borowik P. Many-valued logics [M]. Springer-Verlag, 1992  
 [5] Ben E R, Dechter R. Default reasoning using classical logic [J]. Artificial Intelligence, 1996, 84: 113-150  
 [6] 王国俊. 计算智能(第二册)——词语计算与 Fuzzy 集 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005  
 [7] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets in approximate Reasoning, part 1: Inference with possibility Distributions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40: 143-202  
 [8] Dubois D, Lang J, Prade H. Fuzzy sets in approximated Reasoning, Part 2: Logical approaches [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40: 203-244  
 [9] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2008  
 [10] 吴望名. 模糊推理的原理和方法 [M]. 贵阳: 贵州科技出版社, 1994  
 [11] 尤飞. 模糊蕴涵算子及其模糊系统的响应能力 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2007  
 [12] 赵艳英, 袁学海. 基于蕴涵算子上的模糊子群 [J]. 北华大学学报: 自然科学版, 2002, 3(5): 378-380  
 [13] 王德江, 廖祖华, 等. 基于蕴涵算子上的模糊子格 [J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2010, 9(6): 719-722  
 [14] 王德江, 廖祖华.  $R$ -广义模糊子格 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(1): 93-97  
 [15] 胡长流, 宋振明. 格论基础 [M]. 开封: 河南大学出版社, 1990  
 [16] 花秀娟, 朱熙.  $L$ -fuzzy 格及  $(\lambda, \mu)$ -fuzzy 凸子格 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(4): 529-531