R-广义模糊子格的理想

王德江 梁久祯 廖祖华
（江南大学物联网工程学院 无锡 214122）

摘 要 给出了R-广义模糊子格的理想的定义并对其进行了研究。证明了当$R(x,y)$对变量y递减时，有限个R-广义模糊子格的理想的交（并）仍是R-广义模糊子格的理想，R-广义模糊子格的理想的同态像（原像）仍是R-广义模糊子格的理想。讨论了具体8种蕴涵算子下R-广义模糊子格的理想的等价形式。

关键词 子格，R-广义模糊子格，蕴涵算子，理想
中图法分类号 TP703 **文献标识码** A

Ideal of R-Generalized Fuzzy Sublattice

WANG De-jiang LIANG Jiu-zhen LIAO Zu-hua
(School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract This paper introduced the definition of ideal of R-generalized fuzzy sublattice, and discussed some properties of it. Besides, it was proved that the finite intersection (union) of ideal of R-generalized fuzzy sublattice is still ideal of R-generalized fuzzy sublattice when function $R(x,y)$ is decreased correspond to y, and the homomorphic image (preimage) of ideal of R-generalized fuzzy sublattice is still ideal of R-fuzzy sublattice. Finally, eight kinds of equivalent form of ideal of R-generalized fuzzy sublattice based on eight kinds of implication operator were discussed.

Keywords Sublattice, R-generalized fuzzy sublattice, Implication operator, Ideal

1 引言

1965年，控制论专家Zadeh在文献[1]中创立了模糊集概念。1971年，Rosenfeld在文献[2]中引入了模糊子群的概念，由此开创了模糊代数的研究新领域，从此许多中外学者将模糊集理论运用到群和环等代数结构，研究的结果丰富了模糊代数。非经典逻辑为智能控制处理不确定信息和自动推理提供了有意义的形式工具。多值逻辑是经典逻辑的扩充[3]，并且为经典逻辑的推理和模型提供了一种变化形式[4,5]。R-蕴涵算子作为多值逻辑在计算机科学的近似推理及控制论中有着广泛的应用[6-11]。将R-蕴涵算子与模糊代数结构相结合进行研究有重要的理论意义及潜在应用价值。赵艳英与袁学海等给出了基于蕴涵算子的模糊子群的定义及一些性质[12]。本文作者在此基础上给出了基于蕴含算子的模糊子格[13]与R-广义模糊子格[14]的概念，并对其进行了研究。

本文是这些工作的继续，给出了R-模糊子格的理想的定义，并给出了它们的交、并、同态像以及同态原像等的基本性质，最后给出了具体的8类蕴涵算子下它的等价形式。

2 预备知识

定义1[15] 设X为格L的一个子集，若对$\forall a,b\in X$，总有$a\wedge b\in X, a\vee b\in X$，则称$X$为格$L$的子格。

定义2[15] 设L,M是任意格。映射$f:L\to M$叫做一个并同态，如果满足(1) $f(x\vee y)=f(x)\vee f(y), \forall x,y\in L$；对偶地，$f$叫做一个交同态，如果满足(2) $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y), \forall x,y\in L$。当$f$同时满足(1)，(2)时，则称$f$是格同态（或简称同态）。设$f:L\to M$是格同态，若$f$是单射，则称$f$是单同态，若$f$是满射，则称$f$是满同态，这时也说格$L$与格$M$同态，记作$L\sim M$。若$f$是双射，则称$f$为格同构（简称同构），也说格$L$同构于格$M$，记作$L\cong M$。若$L=M$，相应的同态（同构）叫做$L$的自同态（自同构）。

定义3[12] 在经典逻辑中，0和1为真值，基于$\{0,1\}$上的蕴涵算子为：

$$R(a,b)=\begin{cases}0, & a=1,b=0\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

定义4[11] 目前常用的$[0,1]$上的蕴涵算子主要有：

(1) Mamdam算子：$R_M(a,b)=a\wedge b$。

(2) Lukasiewicz算子：$R_{Lu}(a,b)=(1-a+b)\wedge 1$。

(3) Gaines Rescher算子：$R_{GR}(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ 0, & a\nleqslant b\end{cases}$。

(4) Godel算子：$R_G(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ b, & a\nleqslant b\end{cases}$。

(5) Goguen算子：$R_{Go}(a,b)=\begin{cases}1, & a=0\\ \frac{b}{a}\wedge 1, & a\neq 0\end{cases}$。

到稿日期：2013-03-15 返修日期：2013-07-05 本文受国家自然科学基金资助项目(61170121)，江苏省研究生培养创新工程项目(CXLX12_0725)资助。

王德江(1989—)，男，硕士生，主要研究方向为人工智能、模式识别，E-mail：wdjwuxi@163.com；**梁久祯**(1968—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为计算智能、机器视觉；**廖祖华**(1957—)，男，教授，硕士生导师，主要研究方向为模糊代数、粗糙集、矩阵理论及应用等。

(6)Kleene Dienes 算子：$R_{KD}(a,b)=(1-a)\vee b$。

(7)R_0算子：$R_O(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ (1-a)\vee b, & a\nleqslant b\end{cases}$。

(8)Zadeh 算子：$R_Z(a,b)=(1-a)\vee(a\wedge b)$。

定义 5[14] 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子，A 为格 L 的一个模糊子集，$t\in(0,1]$，$\lambda,\mu\in[0,1]$，若 A 满足：

i)$R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$；

ii)$R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$；

则称 A 为 L 的 R-广义模糊子格。

定义 6[16] 设 A 是格 L 的模糊子集，若$\forall x,y\in L$ 满足：

i)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$；

ii)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$；

则称 A 为格 L 的(λ,μ)-*fuzzy* 理想。

3 *R*-广义模糊子格的理想

在文中将一般的 R-广义模糊子格与(λ,μ)-*fuzzy* 理想相结合，得到了新的概念 R-广义模糊子格的理想，并对 R-蕴涵算子做若干限制后得到了它的一系列代数性质。具体地说：首先给出了交与并的性质，其次给出了同态像与同态原像的性质，最后给出了 8 个常见蕴涵算子下 R-广义模糊子格的理想的等价条件。

定义 7 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子，A 为格 L 的一个模糊子集，$t\in(0,1]$，$\lambda,\mu\in[0,1]$，若 A 满足：

1)$R(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$；

2)$R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$；

则称 A 为格 L 的 R-广义模糊子格的理想。

定理 1 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子且 R 满足条件：$b\leqslant b^*$ 时，$R(a,b)\geqslant R(a,b^*)$。若 A,B 为格 L 的两个 R-广义模糊理想，则 $A\cap B$ 也是格 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

证明：1)对$\forall x,y\in L$，不妨设 $A(x\wedge y)\geqslant B(x\wedge y)$，则 $R((A\cap B)(x)\vee(A\cap B)(y)\wedge\mu,(A\cap B)(x\wedge y)\vee\lambda)=R((A(x)\wedge B(x))\vee(A(y)\wedge B(y))\wedge\mu,B(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant R(B(x)\vee B(y)\wedge\mu,B(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$。

2)对$\forall x,y\in L$，不妨设 $A(x\vee y)\geqslant B(x\vee y)$，则 $R((A\cap B)(x)\wedge(A\cap B)(y)\wedge\mu,(A\cap B)(x\vee y)\vee\lambda)=R(A(x)\wedge A(y)\wedge B(x)\wedge B(y)\wedge\mu,B(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant R(B(x)\wedge B(y)\wedge\mu,B(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$，故 $A\cap B$ 也是格 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

推理 1 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子且 R 满足条件：$b\leqslant b^*$ 时，$R(a,b)\geqslant R(a,b^*)$，若 A_i 为格 L 的 R-广义模糊子格的理想，则$\bigcap\limits_{i=2}^{n}A_i$ 也是格 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

证明：1)对$\forall x,y\in L$，不妨设 $A_k(x\wedge y)=\max(A_i(x\wedge y))$，则 $R(\bigcap A_i(x)\vee\bigcap A_i(y)\wedge\mu,\bigcap A_i(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant R(A_k(x)\vee A_k(y)\wedge\mu,A_k(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$。

2)对$\forall x,y\in L$，不妨设 $A_k(x\vee y)=\max(A_i(x\vee y))$，则 $R(\bigcap A_i(x)\wedge\bigcap A_i(y)\wedge\mu,\bigcap A_i(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant R(A_k(x)\wedge A_k(y)\wedge\mu,A_k(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$，故$\bigcap\limits_{i=2}^{n}A_i$ 也是格 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

在通常的模糊代数中，模糊代数的并不一定是同型的模糊代数，但 R-广义模糊子格的理想却不同，定理 2 证明了在一定条件下两个 R-广义模糊子格的理想的并仍然是 R-广义模糊子格的理想。

定理 2 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子且 R 满足条件：$a\leqslant a^*$ 时，$R(a,b)\leqslant R(a^*,b)$，若 A,B 为 L 的 R-广义模糊子格的理想，则 $A\cup B$ 是 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

证明：因为 $R((A\cup B)(x)\wedge(A\cup B)(y)\wedge\mu,(A\cup B)(x\vee y)\vee\lambda)=R((A(x)\vee B(x))\wedge(A(y)\vee B(y))\wedge\mu,(A\cup B)(x\vee y))$，不妨设 $A(x\vee y)\geqslant B(x\vee y)$，则 $R((A\cup B)(x)\wedge(A\cup B)(y),(A\cup B)(x\vee y))=R((A(x)\vee B(x))\wedge(A(y)\vee B(y))\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$。

同理：不妨设 $A(x\wedge y)\geqslant B(x\wedge y)$，则 $R((A\cup B)(x)\vee(A\cup B)(y)\wedge\mu,(A\cup B)(x\wedge y)\vee\lambda)=R((A(x)\vee B(x))\vee(A(y)\vee B(y))\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，所以 $A\cup B$ 是格 L 的一个 R-模糊子格的理想。

接着把定理 2 推广到有限个 R-广义模糊子格的理想的并。

推论 1 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子且 R 满足条件：$a\leqslant a^*$ 时，$R(a,b)\leqslant R(a,b^*)$，若 A_i 为格 L 的 R-广义模糊子格的理想，则$\bigcup\limits_{i=2}^{n}A_i$ 也是格 L 的一个 R-广义模糊子格的理想。

定理 3 与定理 4 讨论了 R-广义模糊子格的理想的同态像与同态原像。

定理 3 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子，R 满足条件：

(1)$a\leqslant a^*$ 时，$R(a,b)\geqslant R(a,b^*)$；

(2)$b\leqslant b^*$ 时，$R(a,b)\leqslant R(a,b^*)$；

(3)$R(x,y)$关于 x 连续。

设 $f:L_1\to L$ 为格的满同态，若 A 为 L_1 的 R-广义模糊子格的理想，则 $f^{\to}(A)$为 L 的 R-广义模糊子格的理想。

证明：(1)$\forall z_1,z_2\in L$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$x_1,x_2\in L_1$，使得 $f(x_1)=z_1$，$f(x_2)=z_2$，且 $A(x_1)>f^{\to}(A)(z_1)-\delta$，$A(x_2)>f^{\to}(A)(z_2)-\delta$，则 $R(f^{\to}(A)(z_1)\vee f^{\to}(A)(z_2)\wedge\mu,f^{\to}(A)(z_1\wedge z_2)\vee\lambda)\geqslant R(A(x_1)\vee A(x_2),f^{\to}(A)(z_1\wedge z_2)\vee\lambda)-\varepsilon\geqslant R(A(x_1)\vee A(x_2)\wedge\mu,f^{\to}(A)(z_1\wedge z_2)\vee\lambda)-\varepsilon\geqslant t-\varepsilon$，再由 ε 的任意性知 $R(f^{\to}(A)(z_1)\vee f^{\to}(A)(z_2)\wedge\mu,f^{\to}(A)(z_1\wedge z_2)\vee\lambda)\geqslant t$。

(2)$\forall z_1,z_2\in L$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$x_1,x_2\in L_1$，使得 $f(x_1)=z_1$，$f(x_2)=z_2$，且 $A(x_1)>f^{\to}(A)(z_1)-\delta$，$A(x_2)>f^{\to}(A)(z_2)-\delta$，则 $R(f^{\to}(A)(z_1)\wedge f^{\to}(A)(z_2)\wedge\mu,f^{\to}(A)(z_1\vee z_2)\vee\lambda)\geqslant R(A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\mu,f^{\to}(A)(z_1\vee z_2)\vee\lambda)\geqslant R(A(x_1)\wedge A(x_2),f^{\to}(A)(z_1\vee z_2)\vee\mu)-\varepsilon\geqslant R(A(x_1)\wedge A(x_2)\wedge\mu,A(x_1\vee x_2)\vee\lambda)-\varepsilon\geqslant t-\varepsilon$，再由 ε 的任意性知 $R(f(A)(z_1)\wedge f(A)(z_2)\wedge\mu,f(A)(z_1\vee z_2)\vee\lambda)\geqslant t$。所以 $f(A)$为 L 的 R-广义模糊子格的理想。

定理 4 设 R 为$[0,1]$上的蕴涵算子，$f:L_1\to L$ 为格的同态，若 B 为 L 的 R-广义模糊子格的理想，则 $f^{\leftarrow}(B)$为 L_1 的 R-广义模糊子格的理想。

证明：(1)$\forall x_1,x_2\in L_1$，$R(f^{\leftarrow}(B)(x_1)\vee f^{\leftarrow}(B)(x_2)\wedge\mu,f^{\leftarrow}(B)(x_1\wedge x_2)\vee\lambda)=R(B(f(x_1))\vee B(f(x_2))\wedge\mu,B(f(x\wedge x_2))\vee\lambda)=R(B(f(x_1))\vee B(f(x_2))\wedge\mu,B(f(x_1)\wedge f(x_2))\vee\lambda)\geqslant t$。

(2)$\forall x_1,x_2\in L_1$，$R(f^{\leftarrow}(B)(x_1)\wedge f^{\leftarrow}(B)(x_2)\wedge\mu,f^{\leftarrow}(B)(x_1\vee x_2)\vee\lambda)=R(B(f(x_1))\wedge B(f(x_2))\wedge\mu,B(f(x\vee

$x_2))\vee\lambda)=R(B(f(x_1))\wedge B(f(x_2))\wedge\mu,B(f(x_1)\vee f(x_2))\vee\lambda)\geqslant t$。故 $f^{-}(B)$ 为 L_1 的 R-广义模糊子格的理想。

下面针对定义 4 列出的 8 个蕴涵算子进行讨论：

定理 5 (1)A 为 L 上的 R_{Go}-广义模糊子格的理想

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)$，$\forall x,y\in L$。

(2)A 为 L 上的 R_{LU}-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 或 $0<A(x)\vee A(y)\wedge\mu-A(x\wedge y)\vee\lambda\leqslant 1-t$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$ 或 $0<A(x)\wedge A(y)\wedge\mu-A(x\vee y)\vee\lambda\leqslant 1-t$。

(3)A 为 L 上的 R_M-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x)\wedge\mu\geqslant t$，$\forall x\in L$。

(4)A 为 L 上的 R_G-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\wedge t$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)\wedge t$。

(5)A 为 L 上的 R_{GR}-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$。

(6)A 为 L 上的 R_{KD}-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\vee\mu\leqslant 1-t$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\wedge A(y)\vee\mu\leqslant 1-t$。

(7)A 为 L 上的 R_{O}-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$ 或 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(x)\wedge\mu$，

ii)$A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(x)\wedge\mu$。

(8)A 为 L 上的 R_z-广义模糊子格

$\Leftrightarrow$i)$A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 或 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$，

ii)$A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$ 或 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 或 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$。

证明：(1)"$\Rightarrow$"当 $A(x)=A(y)=0$ 时，$R_{Go}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$；$R_{Go}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，显然成立。当 $A(x)=0$(或 $A(y)=0$)时，不妨设 $A(x)=0$，$R_{Go}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=R_{Go}(A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=\dfrac{A(x\wedge y)\vee\lambda}{A(y)\wedge\mu}\wedge 1\geqslant t$，得$\dfrac{A(x\wedge y)\vee\lambda}{A(y)\wedge\mu}\geqslant t$，即 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t(A(y)\wedge\mu)$。$R_{Go}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=1\geqslant t$。当 $A(x)\neq 0,A(y)\neq 0$ 时，则 $R_{Go}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=\dfrac{A(x\wedge y)\vee\lambda}{A(x)\vee A(y)\wedge\mu}\wedge 1\geqslant t$，即 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)$。

"$\Leftarrow$"$\forall x,y\in L$，因为 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu=0$ 时，$R_{Go}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\neq 0$ 时，有$\dfrac{A(x\wedge y)\vee\lambda}{A(x)\vee A(y)\wedge\mu}\geqslant t$，所以 $R_{Go}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=\dfrac{A(x\wedge y)\vee\lambda}{A(x)\wedge A(y)\wedge\mu}\wedge 1\geqslant t$。因为 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)$，当 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu=0$ 时，$R_{Go}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\neq 0$ 时，有$\dfrac{A(x\vee y)\vee\lambda}{A(x)\wedge A(y)\wedge\mu}\geqslant t$，所以 $R_{Go}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=\dfrac{A(x\vee y)\vee\lambda}{A(x)\wedge A(y)\wedge\mu}\wedge 1\geqslant t$。故 A 为 L 上的 R_{Go}-广义模糊子格的理想。

(2)"$\Rightarrow$"$\forall x,y\in L$，由 $R_{LU}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu+A(x\wedge y)\vee\lambda)\wedge 1\geqslant t$ 知，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 时，$R_{LU}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda<A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 时，$A(x)\vee R_{LU}(A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1-A(x\wedge y)\wedge\mu+A(x)\vee A(y)\vee\lambda\geqslant t$，即 $0<A(x)\vee A(y)-A(x\wedge y)\leqslant 1-t$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$ 或 $0<A(x)\wedge A(y)\wedge\mu-A(x\vee y)\vee\lambda\leqslant 1-t$。

"$\Leftarrow$"$\forall x,y\in L$，$A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 或 $0<A(x)\vee A(y)\wedge\mu-A(x\wedge y)\vee\mu\leqslant 1-t$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 时，$R_{LU}(A(x)\wedge(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1-A(x\wedge y)\wedge\mu+A(x)\vee(y)\vee\lambda=1\geqslant t$，当 $0<A(x)\vee A(y)\wedge\mu-A(x\wedge y)\vee\mu\leqslant 1-t$ 时，$1-A(x\wedge y)\wedge\mu+A(x)\vee(y)\vee\lambda\geqslant t$，即 $R_{LU}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1-A(x\wedge y)\wedge\mu+A(x)\vee A(y)\vee\lambda=1\geqslant t$，同理可证 $R_{LU}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$。故 A 为 L 上的 R_{LU}-广义模糊子格的理想。

(3)"$\Rightarrow$" $R_M(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=A(x)\vee A(y)\wedge\mu\wedge A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$，由 $\lambda,\mu\in(0,1)$ 的任意性得 $\forall x\in L$，$A(x)\wedge\mu\geqslant t$。同理 $R_M(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\wedge A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$，由 $\lambda,\mu\in(0,1)$ 的任意性得 $\forall x\in L$，$A(x)\wedge\mu\geqslant t$。

"$\Leftarrow$"对于 $\forall x\in L$，$A(x)\wedge\mu\geqslant t$，对于 $\forall x,y\in L$ 有 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\wedge A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$，则 $R_M(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$。对于 $\forall x,y\in L$ 有 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\wedge A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$，则 $R_M(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$。故 A 为 L 上的 R_M-广义模糊子格的理想。

(4)"$\Rightarrow$"当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant A(x\wedge y)\vee\lambda$，$R_G(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu>A(x\wedge y)\vee\lambda$ 时，$R(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$。即 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\wedge t$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)\wedge t$。

"$\Leftarrow$"对于 $\forall x,y\in L$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant A(x\wedge y)\vee\lambda$ 时，$R_G(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\leqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$ 时，又由于 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant(A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\wedge t$，因此 $t\leqslant A(x\wedge y)\vee\lambda\leqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$，故 $R_G(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$，同理可证 $R_G(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$，故 A 为 L 上的 R_G-广义模糊子格的理想。

(5)"$\Rightarrow$"当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant A(x\wedge y)\vee\lambda$ 时，$R_{GR}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu>A(x\wedge y)\vee\lambda$ 时，$R(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=0$，不满足条件，故 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(y)\wedge\mu$。

"$\Leftarrow$"对于 $\forall x,y\in L$，由于 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(y)\wedge\mu$，因此 $R_{GR}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，同理可证 $R_{GR}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\vee y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，故 A 为 L 上的 R_{GR}-广义模糊子格的理想。

(6)"$\Rightarrow$"$\forall x,y\in L$，$R_{KD}(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu,A(x\wedge y)\vee\lambda)$

(下转第 296 页)

据位为 19937 位，那么改进后的梅森算法将使时间复杂度下降 61 倍。因此，本文所提出的改进型梅森算法能大幅度减少同等实验次数下的仿真时间。

结束语 Monte-Carlo 方法是用随机试验的方法计算数值积分，这为解决实际问题提供了一种新的思路。在圆周率仿真计算中，Monte-Carlo 法的误差收敛速度为 $O(N^{-1/2})$，一般不容易得到精确度较高的近似结果，但其实验设计简单，且对计算机的资源要求不高，在较低的实验次数下就能得到较高的运算精度。使用单驱动法估算圆周率，在不失精度的前提下缩短了运算时间，更好地解决了问题。文中提出的改进型梅森算法能够大幅度减少仿真时间，具有一定的应用价值。

参考文献

[1] 宁波，陈刚，陈卫东. 基于蒙特卡洛法的水下火箭攻击弹道数学仿真研究[J]. 系统仿真学报，2006，18(2)：8-12

[2] 潘冬. 基于 Monte-Carlo 法的矿岩结构面的计算机模拟[J]. 矿业研究与开发，2010，30(1)：22-24

[3] Harlin W J，Cicci D A. Ballistic missile trajectory prediction using a state transition matrix[J]. Applied Mathematics and Computation，2007，188：1832-1847

[4] 裴鹿成. 计算机随机模拟[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1989

[5] 郑小兵，董景新，张志国，等. 基于蒙特卡罗法的弹道导弹落点密集度验前估计[J]. 中国惯性技术学报，2011，19(1)：116-121

[6] 崔明路，王治强，刘薇. 基于蒙特卡罗的星—地单光子通信仿真方法[J]. 计算机工程，2011，37(7)：68-71

[7] 胡亮，裴莹，初剑峰，等. 基于鼠标移动轨迹的真随机数产生方法[J]. 吉林大学学报：理学版，2011，49(5)：890-894

[8] 盛骤，谢式千，潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2001

[9] 王萍，许海洋. 一种新的随机数组合发生器的研究[J]. 计算机技术与发展，2006，16(4)：79-81

(上接第 273 页)

$=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，即 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$。

"$\Leftarrow$"$\forall x,y\in L$，有 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$，则 $R_{KD}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，同理可证 $R_{KD}(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\vee y)\vee\lambda)=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$，故 A 为 L 上的 R_{KD}-广义模糊子格的理想。

(7)"$\Rightarrow$"$\forall x,y\in L$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(x)\wedge\mu$ 时，$R_O(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda< A(x)\vee A(x)\wedge\mu$ 时，$R_O(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，有 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$，故有 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(x)\wedge\mu$ 或 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$，同理可证 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant A(x)\wedge A(x)\wedge\mu$ 或 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$。

"$\Leftarrow$"$\forall x,y\in L$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant A(x)\vee A(x)\wedge\mu$ 时，$R_O(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=1\geqslant t$，当 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$ 时，$R_O(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=(1-A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，同理可证 $R_O(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu, A(x\vee y)\vee\lambda)=(1-A(x)\wedge A(y)\wedge\mu)\vee(A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$，故 A 为 L 上的 R_O-广义模糊子格的理想。

(8)"$\Rightarrow$" $\forall x,y\in L$，当 $1-A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 时，有 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\wedge A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$ 时，可得 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 或 $A(x\wedge y)\vee\lambda\geqslant t$。同理可证 $1-A(x)\wedge A\wedge\mu\geqslant t$或 $A(x)\wedge A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 或 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$。

"$\Leftarrow$"$\forall x,y\in L$，当 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\leqslant 1-t$ 或 $A(x)\vee A(y)\wedge\mu\geqslant t$ 或 $A(x\vee y)\vee\lambda\geqslant t$ 时，则有 $R_z(A(x)\vee A(y)\wedge\mu, A(x\wedge y)\vee\lambda)=(1-A(x)\vee A(y)\wedge\mu)\wedge(A(x)\vee A(y)\wedge\mu\wedge A(x\wedge y)\vee\lambda)\geqslant t$，同理可证 $R_z(A(x)\wedge A(y)\wedge\mu, A(x\vee y)\vee\lambda)\geqslant t$。

结束语 本文将一般的 R-广义模糊子格与 (λ,μ)-*fuzzy* 理想相结合，给出了 R-广义模糊子格的理想的定义，并讨论了它的一系列代数性质。最后给出了 8 个常见蕴涵算子下 R-广义模糊子格的理想的等价条件。这加深了对 R-蕴涵算子与模糊代数相结合的代数结构的认识，为多值逻辑在控制领域的应用提供了新的理论基础。

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control，1965，8：338-353

[2] Rosenfeld A. Fuzzy groups[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1971，35：512-517

[3] Boms D W，Mack J M. An algebraic introduction on mathematical logic[M]. Berlin：Springer，1975

[4] Bolc L，Borowik P. Many-valued logics[M]. Springer-Verlag，1992

[5] Ben E R，Dechter R. Default reasoning using classical logic[J]. Artificial Intelligence，1996，84：113-150

[6] 王国俊. 计算智能(第二册)——词语计算与 Fuzzy 集[M]. 北京：高等教育出版社，2005

[7] Dubois D，Prade H. Fuzzy sets in approximate Reasoning，part 1：Inference with possibility Distributions[J]. Fuzzy Sets and Systems，1991，40：143-202

[8] Dubois D，Lang J，Prade H. Fuzzy sets in approximater Reasoning，Part 2：Logical approaches[J]. Fuzzy Sets and Systems，1991，40：203-244

[9] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M]. 北京：科学出版社，2008

[10] 吴望名. 模糊推理的原理和方法[M]. 贵阳：贵州科技出版社，1994

[11] 尤飞. 模糊蕴涵算子及其模糊系统的响应能力[M]. 西安：西北工业大学出版社，2007

[12] 赵艳英，袁学海. 基于蕴涵算子上的模糊子群[J]. 北华大学学报：自然科学版，2002，3(5)：378-380

[13] 王德江，廖祖华，等. 基于蕴涵算子上的模糊子格[J]. 江南大学大学学报：自然科学版，2010，9(6)：719-722

[14] 王德江，廖祖华. R-广义模糊子格[J]. 山东大学学报：理学版，2012，47(1)：93-97

[15] 胡长流，宋振明. 格论基础[M]. 开封：河南大学出版社，1990

[16] 花秀娟，朱熙. L-fuzzy 格及(λ,μ)-*fuzzy* 凸子格[J]. 纺织高校基础科学学报，2009，22(4)：529-531