

三值量子基本门及其对量子 Fourier 变换的电路实现

樊富有^{1,2} 杨国武¹ 张 艳¹ 杨 钢¹

(电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 611731)¹ (宜宾学院计算机与信息工程学院 宜宾 644007)²

摘 要 理论上可以把量子基本门组合在一起来实现任何量子电路和构建可伸缩的量子计算机。但由于构建量子线路的量子基本门数量庞大,要正确控制这些量子门十分困难。因此,如何减少构建量子线路的基本门数量是一个非常重要和非常有意义的课题。提出采用三值量子态系统构建量子计算机,并给出了一组三值量子基本门的功能定义、算子矩阵和量子线路图。定义的基本门主要包括三值量子非门、三值控制非门、三值 Hadamard 门、三值量子交换门和三值控制 CR_k 门等。通过把量子 Fourier 变换推广到三值量子态,成功运用部分三值量子基本门构建出能实现量子 Fourier 变换的量子线路。通过定量分析发现,三值量子 Fourier 变换的线路复杂度比二值情况降低了至少 50%,表明三值量子基本门在降低量子计算线路复杂度方面具有巨大优势。

关键词 量子计算,三值量子基本门,量子 Fourier 变换,量子电路综合

中图分类号 TP302.2 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2015.7.013

Three-valued Quantum Elementary and Implementation of Quantum Fourier Transform Circuit

FAN Fu-you^{1,2} YANG Guo-wu¹ ZHANG Yan¹ YANG Gang¹

(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)¹

(School of Computer and Information Engineering, Yibin University, Yibin 644007, China)²

Abstract In theory, quantum elementary gates can be put together to implement any quantum circuit and build a scalable quantum computer. Because the number of quantum elementary gates required to build quantum logic circuits is too large, exactly controlling them is not easy. Therefore, how to reduce the number of quantum elementary gates to build quantum circuits is a very important and significant topic. Three-level quantum system was proposed to build quantum computer in this paper, and a set of three-valued quantum elementary gates were defined, including function, operator matrix, quantum circuit diagram. These elementary gates mainly include three-valued quantum NOT gate, three-valued quantum controlled-NOT gate, three-valued Hadamard gate, three-valued quantum SWAP gate and three-valued CR_k gate and so on. This paper extended the quantum Fourier transform (QFT) to three-valued quantum states, and quantum circuits were successfully built to implement QFT with partial three-valued quantum elementary gates. By the quantitative analysis, the complexity of three-valued QFT circuit is lower than two-valued case at least 50%. The result indicates that the three-valued quantum elementary gates have a huge advantage in respect of reducing the circuit complexity about quantum computation.

Keywords Quantum computation, Three-valued quantum elementary gates, Quantum Fourier transform, Synthesis of quantum circuit

1 引言

电子器件高度集成和小型化导致的量子极限问题和不可逆计算导致的高热耗散问题^[1],限制着经典计算机性能的进一步提高;再加上经典计算机难以承受模拟量子力学系统时庞大的时空需求等问题,1982年, Feynman 率先建造了基于量子力学器件、服从量子力学系统规律的量子计算机^[2],以应对经典计算机在性能提高要求上面面临的严峻挑战。1985年, Deutsch 从理论上证明量子计算机等效于量子图灵机^[3],

并建立了广泛使用的量子计算线路模型^[4]。由于量子系统演化的酉性,基于量子力学规律的量子逻辑具有天然的可逆的特性,使得量子电路和可逆逻辑电路的研究一开始就紧密地结合在一起。

近年来,关于量子电路和可逆逻辑电路基本门库的理论和物理实现研究,以及用基本门合成量子电路和可逆逻辑电路的逻辑综合技术研究吸引了大批的研究人员。这些研究大多面向二值量子系统,即量子电路处理的单一量子态仅由两个计算基态叠加而成。这样的量子态可用状态向量表示为式(1)。

收稿日期:2014-06-20 返修日期:2014-10-05 本文受国家自然科学基金项目(61272175),四川省科技厅项目(2012JY009),四川省教育厅重点项目(2011ZA173)资助。

樊富有(1974—),男,博士生,副教授,CCF会员,主要研究方向为量子计算、量子可逆逻辑电路综合, E-mail: fanfuyou@163.com; 杨国武(1966—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为量子计算、逻辑综合、形式化验证、算法优化; 张 艳(1989—),女,博士生,主要研究方向为逻辑综合、形式化验证、算法优化; 杨 钢(1987—),男,硕士,主要研究方向为量子计算、可逆逻辑综合。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

其中, α 和 β 是复数, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 为标准正交计算基态。 $|\psi\rangle$ 为 2 维 Hilbert 空间中的一个单位向量, 是一个基本的量子单元, 称为一个 qubit。另一些研究表明, 多值量子计算系统比二值量子计算系统具有更多的优越性^[5], 其中三值量子计算系统更具优势^[6]。Yang 教授等在文献[7,8]中用置换群的方法证明了一组离散三值量子可逆逻辑门库的通用性, 并验证了用它们合成电路的能力。Di 教授等也在文献[6,9]中定义了一组多值量子基本门, 并运用 Cartan 分解和量子香农分解对其通用性进行了论证。

由于三值量子系统是最简单的多值量子系统, 描述同样的状态空间时, 三值的量子状态数仅是二值的 63%, 大大减少了量子元器件的个数。迄今, 三值量子态系统已具有相应的物理实现^[10,11], 文献[11]通过增加操控目标量子位的第三量子基态, 保持其控制量子位为二值量子态, 把合成 Toffoli 门的量子门由 6 个减为 3 个, 使得量子门个数得到极大优化。因此, 基于三值量子态的量子线路和相应的量子算法是一个具有巨大吸引力的研究方向, 具有十分广阔的应用前景。

本文主要针对三值量子计算的需要, 设计了一组三值量子基本门。为了验证这些基本门合成量子电路的能力, 将二值量子态表征的量子 Fourier 变换推广到三值量子态情形, 并成功运用三值量子基本门合成了量子 Fourier 变换线路。

本文第 2 节介绍了三值量子系统, 并定义了一组三值量子基本门; 第 3 节首先将量子 Fourier 变换推广到三值情形; 然后构建出能完成 Fourier 变换的三值量子线路, 并定量分析了三值量子基本门在降低量子线路复杂度方面的优越性; 最后给出结论。

2 三值量子系统及三值量子基本门

不同的物理系统对量子态有不同的物理实现。为便于研究, 可将其抽象为统一的数学形式。在三值量子系统中, 存在 3 个标准正交基态, 分别记为 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$, 在线性冷离子阱实现方案中分别由基态、激发态和亚稳态表征^[10]。

2.1 三值量子系统的表示

三值量子系统中的一个基本量子单元称为 qutrit, 一个 qutrit 可以用式(2)表示:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \quad (2)$$

其中, α, β 和 γ 是复数, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$, 状态向量 $|\psi\rangle$ 为 3 维 Hilbert 空间中的一个单位向量, 是一个基本的量子单元。标准正交基态 $|0\rangle$ 、 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 可以分别表示为三维正交列向量 $[1, 0, 0]^T$ 、 $[0, 1, 0]^T$ 和 $[0, 0, 1]^T$ 。因此, 式(2)中的状态向量 $|\psi\rangle$ 也可表示为式(3):

$$|\psi\rangle = [\alpha, \beta, \gamma]^T \quad (3)$$

孤立量子系统中 qutrit 的演化可由一个仅与时间相关的 3 维 U 算子描述, 下文定义的量子门就是一些特殊的 U 算子。 n 个三值量子态形成一个复合量子系统, 由一个 3^n 维状态向量描述, 在数学形成上表示为 n 个状态向量的张量积。如 $|\psi\rangle_i (i=1, 2, \dots, n)$ 构成的复合系统可表示为式(4):

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n |\psi\rangle_i = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle \quad (4)$$

其中, $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ 可简记为 $|\psi_1 \psi_2 \psi_3\rangle$ 。对于两个 qutrit 张成的复合系统, 其计算基态为 $|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, \dots, |22\rangle$, 也可表示为十进制形式 $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |8\rangle$, 表示为正交列向量则为 $[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \dots$

$\dots, [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$ 。更高维复合系统的表示形式可照此类推。

2.2 三值量子基本门的定义

为方便起见, 在不作说明时, 以下定义的量子门均作用于三值量子态。在不引起混淆的前提下, 门的名称与二值量子门相同。为易于描述量子基本门的功能, 先定义几个状态向量, 下文不作说明时, 均指这几个向量:

$$|\psi\rangle = [\alpha, \beta, \gamma]^T, |\psi_1\rangle = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]^T, |\psi_2\rangle = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]^T$$

2.2.1 三值量子非门(NOT)

三值量子非门作用在一个 qutrit 上, 使得 3 个计算基态的概率幅发生变化, 其功能由式(5)定义:

$$NOT|\psi\rangle = [\gamma, \alpha, \beta]^T \quad (5)$$

如果直接作用于计算基态, 则实现 $NOT|0\rangle = |1\rangle, NOT|1\rangle = |2\rangle, NOT|2\rangle = |0\rangle$ 。在这种情况下, 与文献[8]定义的离散三进制量子非门功能一致。因此, NOT 门是离散量子非门的推广。 NOT 门在标准正交基下的矩阵表示为:

$$NOT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$NOT \cdot NOT^\dagger = NOT^\dagger \cdot NOT = I$, 满足 U 算子的要求。但 NOT 不是一个 *Hermite* 算子, 即 $NOT \neq NOT^\dagger$ 。事实上, $NOT^3 = I$, 表明它是一个 3-循环门。 NOT 门的量子线路如图 1 所示。



图 1 NOT 门的量子线路

2.2.2 三值量子控制非门(CNOT)

$CNOT$ 门是一个两 qutrit 量子门, 当控制量子位满足一定条件时, 目标量子位执行 NOT 操作。 $CNOT$ 门的量子线路如图 2 所示。

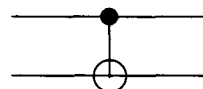


图 2 CNOT 门的量子线路

为兼顾构建混值量子线路的要求, 定义当且仅当控制量子位为 $|1\rangle$ 时, 目标量子比特执行 NOT 操作。算子 $CNOT$ 可由式(7)定义:

$$CNOT = (|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) \otimes I_3 + |1\rangle\langle 1| \otimes NOT \quad (7)$$

其中, I_3 是 3×3 的单位矩阵。 $CNOT \cdot CNOT^\dagger = CNOT^\dagger \cdot CNOT = I$, 所以 $CNOT$ 是 U 算子。由于 $CNOT \neq CNOT^\dagger$, 因此它不是一个 *Hermite* 算子。 $CNOT$ 门在标准正交基下的矩阵表示为式(8):

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

与离散三进制控制非门不同, 当 $CNOT$ 作用于叠加量子

态时,只能保证以一定概率对目标位执行 NOT 操作。例如:
 $CNOT(|\psi_1 \psi_2\rangle) = (\alpha_1|0\rangle + \gamma_1|2\rangle) \otimes |\psi_2\rangle + \beta_1|1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, 表示将以 $|\beta_1|^2$ 的概率对 $|\psi_2\rangle$ 执行 NOT 操作。

2.2.3 三值量子交换门(SWAP)

量子交换门 SWAP 实现两个任意 qutrit 的状态互换,其功能由式(9)定义:

$$SWAP|\psi_1 \psi_2\rangle = |\psi_2 \psi_1\rangle \quad (9)$$

SWAP 门在标准正交基下的矩阵表示为式(10):

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由于 $SWAP \cdot SWAP^\dagger = SWAP^\dagger \cdot SWAP = I$, 因此 SWAP 是一个 U 算子。由于 $SWAP = SWAP^\dagger$, 因此它也是 Hermite 算子。SWAP 门的量子线路如图 3 所示。

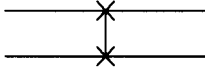


图 3 SWAP 门的量子线路

2.2.4 三值量子 Hadamard 门(H)

二值 Hadamard 门在制备量子叠加态时具有重要作用,可制备出量子 $|+\rangle$ 态和量子 $|-\rangle$ 态。在三值情况时,也需制备类似的叠加态,因此,定义三值 Hadamard 门是十分必要的。参照二值习惯,也将三值 Hadamard 门简记为 H 门, H 门的量子线路用图 4 表示。



图 4 H 门的量子线路

当作用在标准正交计算基态时, H 门的功能定义如下。

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \quad (11)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}|1\rangle + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}|2\rangle) \quad (12)$$

$$H|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}|1\rangle + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}|2\rangle) \quad (13)$$

当作用在任意三值量子态时,用矩阵将 H 门定义为式(14)。由于 $H \cdot H^\dagger = H^\dagger \cdot H = I$, $H \neq H^\dagger$, 因此 H 是酉算子,但不是 Hermite 算子。

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{8\pi i/3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

则 $H|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta + \gamma)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta e^{2\pi i/3} + \gamma e^{4\pi i/3})|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha + \beta e^{4\pi i/3} + \gamma e^{8\pi i/3})|2\rangle$ 。

2.2.5 三值 R_k 门(R_k)

在文献[12]中定义了一种控制二值量子系统的 R_k 门,它的功能是将计算基态 $|1\rangle$ 的相位提前 $2\pi/2^k$, 对计算基态 $|0\rangle$

不作任何改变。在三值量子系统中,因为有 3 个计算基态,改变相对相位可针对 $|1\rangle$ 或 $|2\rangle$ 进行,也可同时改变 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的相位。本文定义 3 种类型的 R_k 门,分别命名为 $R_{k,1}$ 、 $R_{k,2}$ 和 $R_{k,12}$ 。这 3 类 R_k 门的 U 矩阵定义如下。

$$R_{k,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3^k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$R_{k,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\pi i/3^k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$R_{k,12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3^k} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4\pi i/3^k} \end{bmatrix} \quad (17)$$

当 $R_{k,12}$ 作用于任意量子态 $|\psi\rangle$ 时,将改变计算基态 $|1\rangle$, $|2\rangle$ 的相位,即 $R_{k,12}|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + e^{2\pi i/3^k}\beta|1\rangle + e^{4\pi i/3^k}\gamma|2\rangle$ 。 R_k 门的量子线路如图 5 所示。

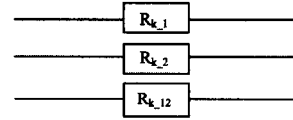


图 5 R_k 门的量子线路

2.2.6 三值控制 R_k 门(CR_k)

三值 CR_k 门是两 qutrit 门,当控制量子位满足一定条件时,目标量子位执行 R_k 。受篇幅所限,本文仅对 $R_{k,12}$ 定义控制 $R_{k,12}$ 门。 $R_{k,12}$ 的功能为:当控制量子位为 $|1\rangle$ 时,对目标量子位执行 $R_{k,12}$,当控制量子位为 $|2\rangle$ 时,对目标量子位执行两次 $R_{k,12}$ 操作, $R_{k,12}$ 门的功能用数学式描述如下:

$$CR_{k,12} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_3 + |1\rangle\langle 1| \otimes R_{k,12} + |2\rangle\langle 2| \otimes (R_{k,12})^2 \quad (18)$$

$CR_{k,12}$ 在标准正交基下的矩阵表示为式(19):

$$CR_{k,12} = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} & O_{4 \times 1} & O_{4 \times 1} & O_{4 \times 1} & O_{4 \times 1} & O_{4 \times 1} \\ O_{1 \times 4} & e^{2\pi i/3^k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ O_{1 \times 4} & 0 & e^{4\pi i/3^k} & 0 & 0 & 0 \\ O_{1 \times 4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ O_{1 \times 4} & 0 & 0 & 0 & e^{4\pi i/3^k} & 0 \\ O_{1 \times 4} & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{8\pi i/3^k} \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中, $I_{4 \times 4}$ 表示 4×4 单位矩阵, $O_{1 \times 4}$ 和 $O_{4 \times 1}$ 分别表示 1 行 4 列和 4 行 1 列的零矩阵。容易看出 $CR_{k,12}$ 是酉算子, $CR_{k,12}$ 门的量子线路如图 6 所示。

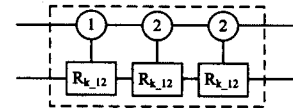


图 6 $CR_{k,12}$ 门的量子线路

如果物理器件直接实现了式(19)中的 $CR_{k,12}$ 门,就可以把 $CR_{k,12}$ 门记为 CR_k 门, CR_k 的量子线路如图 7 所示。

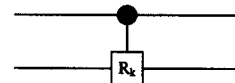


图 7 CR_k 门的量子线路

2.2.7 三值 Toffoli 门 (Toffoli)

Toffoli 门在 CNOT 门的基础上增加了一个控制量子位, 也被称为 CCNOT 门或控制-控制非门。为了便于构建混值量子逻辑电路, 定义当两个控制量子位均为 $|1\rangle$ 时, 目标量子位执行 NOT 操作。Toffoli 门的功能用数学表达式描述如下:

$$\begin{aligned} \text{Toffoli} &= |0\rangle\langle 0| \otimes I_6 + |1\rangle\langle 1| \otimes \text{CNOT} + |2\rangle\langle 2| \otimes I_6 \\ &= (|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) \otimes I_6 + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) \otimes I_3 + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \text{NOT} \quad (20) \end{aligned}$$

其中 I_3 和 I_6 分别表示 3×3 和 6×6 的单位矩阵。Toffoli 门可用简化矩阵表示, 记为式(21):

$$\text{Toffoli} = \begin{bmatrix} I_9 & O_9 & O_9 \\ O_9 & \text{CNOT} & O_9 \\ O_9 & O_9 & I_9 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中, I_9 和 O_9 分别表示 9×9 的单位矩阵和零矩阵, CNOT 表示 CNOT 门的矩阵。Toffoli 门的量子线路如图 8 所示。

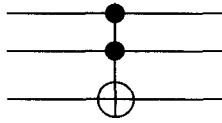


图 8 Toffoli 门的量子线路

本文定义三值量子 Toffoli 是二值情况的特定推广。事实上, 控制目标位的量子态可以为 $|1\rangle$ 态或 $|2\rangle$ 态, 甚至可以为混态, 我们称这样的 Toffoli 为广义 Toffoli 门。Toffoli 门以及广义 Toffoli 门在量子电路综合中具有重要作用。

3 三值量子基本门对 QFT 算法的实现

量子 Fourier 变换 (QFT) 在离散对数问题、因子分解问题、量子计数问题和隐含子群问题中有重要应用, 是一个非常重要的量子算法。如果能够用量子电路直接实现 QFT 算法, 是对量子计算高度并行计算能力的一个很好验证。鉴于 QFT 算法的重要性和特殊性, 并且为了验证三值量子基本门的电路合成能力, 本节对 QFT 算法进行推广, 通过代数运算将 QFT 分解为三值量子叠加态的张量积形式, 并采用三值量子基本门合成相应量子电路, 完成对算法的实现。

3.1 三值 QFT 的定义

首先, 借鉴文献[12]引入离散 Fourier 变换 (DFT) 和 QFT 的定义, 从而将其推广为三值 QFT 的形式。

3.1.1 DFT 的定义

DFT 以复向量 $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$ 为输入, 以复向量 $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$ 为输出, 其中

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi i j k / N} \quad (22)$$

向量长度 N 必须是固定的参数。

$$\begin{aligned} &= \frac{(|0\rangle + e^{2\pi i(0, j_n)} |1\rangle + e^{2\pi i(2 \times 0, j_n)} |2\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi i(0, j_{n-1} j_n)} |1\rangle + e^{2\pi i(2 \times 0, j_{n-1} j_n)} |2\rangle) \dots (|0\rangle + e^{2\pi i(0, j_1 \dots j_{n-1} j_n)} |1\rangle + e^{2\pi i(2 \times 0, j_1 \dots j_{n-1} j_n)} |2\rangle)}{\sqrt{3^n}} \quad (27) \end{aligned}$$

根据式(27), 结合量子力学第 4 假设^[12], 就可以用第 2 节定义三值量子基本门构建实现 QFT 运算的量子线路, 三值 QFT 量子线路如图 9 和图 10 两图拼接构成。图中虚线框中的三控制门组是一个物理整体, 用量子器件实

3.1.2 QFT 的定义

QFT 是定义在一组标准正交基 $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle$ 上的线性酉算子, 它对任意量子态的作用定义为式(23):

$$\begin{aligned} \text{QFT}(\sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle) &= \sum_{j=0}^{N-1} x_j \text{QFT}(|j\rangle) = \sum_{j=0}^{N-1} x_j (\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i j k / N} |k\rangle) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi i j k / N}) |k\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle \quad (23) \end{aligned}$$

其中, y_k 可由式(22)计算得出。

3.1.3 三值 QFT 的定义

为了用三值量子系统线路对 QFT 进行求解, 本文首先将 QFT 推广到三值形态, 以便于电路实现。设输入的复合量子系统的量子态为 $|\Psi\rangle$, $|\Psi\rangle$ 由标准正交基表示为式(24):

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^L x_j |j\rangle \quad (24)$$

令 $t = L - 3^{\lceil \log_3 L \rceil}$ 。如果 $t=0$, 令 $n = \log_3 L$, $|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle$; 如果 $t>0$, 则令 $n = \lceil \log_3 L \rceil + 1$, 将 $|\Psi\rangle$ 扩充为 $|\Psi'\rangle$, $|\Psi'\rangle$ 由标准正交基表示为式(25):

$$|\Psi'\rangle = \sum_{j=0}^{3^n-1} x_j |j\rangle \quad (25)$$

当 $j>L$ 时, $x_j=0$ 。其中, L 的含义与式中的 L 相同。经过处理的 $|\Psi'\rangle$ 可用 n 输入 n 输出的三值量子线路完成 Fourier 变换。

3.2 三值 QFT 量子线路合成

为了用三值量子电路实现 QFT 变换, 需对式(25)作等价代换。为此, 先将状态 $|j\rangle$ 写成三进制形式 $|j\rangle = |j_1 j_2 \dots j_n\rangle$, 即 $|j\rangle = |j_1 \times 3^{n-1} + j_2 \times 3^{n-2} + \dots + j_n \times 3^0\rangle$ 。用记号 $0, j_1 j_2 \dots j_n$ 表示三进制分数 $j_1/3 + j_2/9 + \dots + j_n/3^n$ 。接下来, 将三值 QFT 对 $|\Psi'\rangle$ 的运算变换为 n 个 qutrit 的张量积形式。

$$\text{QFT}(|\Psi'\rangle) = \text{QFT}(\sum_{j=0}^{3^n-1} x_j |j\rangle) = \sum_{j=0}^{3^n-1} x_j \text{QFT}(|j\rangle) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{QFT}(|j\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \sum_{k=0}^{3^n-1} e^{2\pi i j k / 3^n} |k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \sum_{k_1 \dots k_n=0 \dots 0}^{2 \dots 2} e^{2\pi i j (\sum_{l=1}^n k_l 3^{-l}) / 3^n} |k_1 \dots k_n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \sum_{k_1 \dots k_n=0 \dots 0}^{2 \dots 2} e^{2\pi i j (\sum_{l=1}^n k_l 3^{-l})} \bigotimes_{l=1}^n |k_l\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \sum_{k_1=0}^2 \dots \sum_{k_n=0}^2 \bigotimes_{l=1}^n e^{2\pi i j (\sum_{l=1}^n k_l 3^{-l})} |k_l\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \bigotimes_{l=1}^n [\sum_{k_l=0}^2 e^{2\pi i j k_l 3^{-l}} |k_l\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3^n}} \bigotimes_{l=1}^n [|0\rangle + e^{2\pi i j 3^{-l}} |1\rangle + e^{2\pi i j (2 \times 3^{-l})} |2\rangle] \end{aligned}$$

现为一个 2 qutrit 的基本控制门, 名称为 CR_{k-12} 。其中的 k 代表相位改变大小, 对任意的 k , CR_{k-12} 将计算基态 $|1\rangle$ 的相位提前 $2\pi/3^k$, 将计算基态 $|2\rangle$ 的相位提前 $4\pi/3^k$, 对 $|0\rangle$ 无影响。

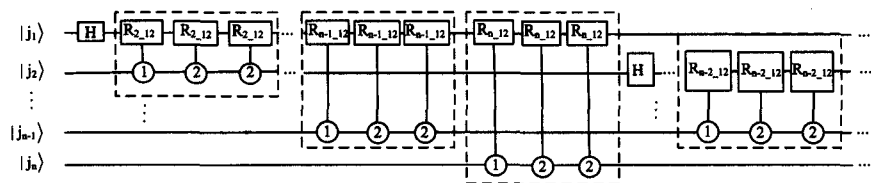


图9 三值量子 Fourier 变换线路图(左半部分)

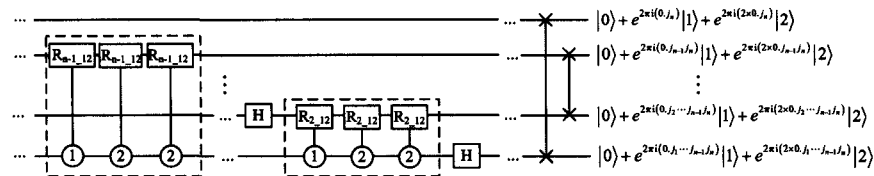


图10 三值量子 Fourier 变换线路图(右半部分)

3.3 三值 QFT 量子线路复杂分析

文献[11]指出,在量子计算机研究过程中面对的重大困难之一是构建量子线路所需量子基本门的绝对数量巨大,难以正确地控制,这些困难需要从理论创新和技术发展上加以克服。从理论上讲,在保证功能需求的前提下,要尽量减少合成量子线路的基本门数量,从而降低量子线路的复杂度。为了说明采用三值量子基本门合成电路的优势,本节对二值 QFT 量子线路和三值 QFT 量子线路的量子门代价进行分析,得到定量结果,从而确认三值量子基本门的优越性。

假设 QFT 变换定义在计算基态数目为 N 的复合量子系统上,为了让二值量子线路的 qubit 数量最小,不失一般性,可设 $n = \log_2 N$,表示用 n 个 qubit 的二值量子线路即可完成该 QFT 变换。此时,如果用三值量子线路执行同样的 QFT 运算,则仅需要 n' 个 qutrit 的量子线路即可完成,且 $n' = \lceil \log_3 N \rceil + 1$ 。当 N 不同时,二值和三值量子系统对应的 QFT 量子线路所需基本门数量如表 1 所列。

表 1 二值和三值 QFT 量子线路基本门数量对比

N	$n(\text{位})$	$n'(\text{位})$	二值量子线路 基本门总数(个)	三值量子线路 基本门总数(个)
1024	10	7	60	31
32768	15	10	127	60
1048576	20	13	220	97
33554432	25	16	337	144
1073741824	30	19	480	199
$1.26765E+30$	100	64	5100	2112

从表 1 中可以看出,采用三值量子基本门实现 QFT 算法时,所需的量子门个数大约是二值量子系统的 50%,并且随着线路规模的增大,该比例会进一步减小。图 11 描述了量子比特从 5qubit 增大到 100qubit 时,QFT 算法所需的二值或三值量子基本门的数量变化情况。

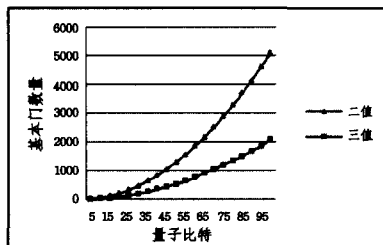


图 11 二值和三值 QFT 量子线路基本门数量随量子线路宽度变化的对比

从图 11 可以看出,二值情况的曲线比三值的更陡峭,并且始终处于上方,这表明用三值量子基本门构建 QFT 量子线路的复杂程度更低,体现了三值量子基本门在构建低复杂度

量子线路方面的巨大优越性。

结束语 量子计算机研究面临着巨大的挑战,既有理论层面的困难,也有技术层面的障碍。本文结合当前量子逻辑门器件设计技术已取得的实际进展,定义了一组三值量子基本门的逻辑功能、算子矩阵和量子线路图,并用其中一些基本门合成了能执行 QFT 算法的量子线路。与二值 QFT 量子线路相比,三值 QFT 量子线路的复杂度要低很多,体现了三值量子门在量子计算中的巨大优越性。迄今为止,实用的量子计算机是采用二值、三值,还是多值量子态系统都还没有定论,本文的研究结果表明三值具有更大的优越性,旨在能引起研究者的兴趣和关注。

参考文献

- [1] Landauer R. Irreversibility and heat generation in the computing process[J]. IBM journal of research and development, 1961, 5 (3):183-191
- [2] Feynman R P. Simulating physics with computers[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1982, 21(6):467-488
- [3] Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer[J]. Proceedings of the Royal Society of London, A Mathematical and Physical Sciences, 1985, 400(1818):97-117
- [4] Deutsch D. Quantum computational networks[J]. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 1989, 425(1868):73-90
- [5] Muthukrishnan A, Stroud Jr C R. Multivalued logic gates for quantum computation[J]. Physical Review A, 2000, 62(5)
- [6] Di Y M, Wei H R. Elementary gates for ternary quantum logic circuit[J]. arXiv preprint arXiv:1105.5485, 2011
- [7] Yang G, Song X, Perkowski M, et al. Realizing ternary quantum switching networks without ancilla bits[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2005, 38(44):9689-9697
- [8] Yang G, Xie F, Song X, et al. Universality of 2-qudit ternary reversible gates[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2006, 39(24):7763-7773
- [9] Di Y M, Wei H R. Synthesis of multivalued quantum logic circuits by elementary gates[J]. Physical Review A, 2013, 87(1):1-9
- [10] Klimov A B, Guzman R, Retamal J C, et al. Qutrit quantum computer with trapped ions[J]. Physical Review A, 2003, 67 (6):235-238
- [11] Lanyon B P, Barbieri M, Almeida M P, et al. Simplifying quantum logic using higher-dimensional Hilbert spaces[J]. Nature Physics, 2009, 5(2):134-140
- [12] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge University Press, 2010:218