

一种新的网格重叠差分盒分形模型

李传龙 李颖 于水明

(大连海事大学地理信息研究所 大连 116001)

摘要 分形维数一个最重要的特性是其维数大小与人眼感觉图像表面的粗糙程度有很大的相关性,分形在图像的纹理分析、图像的分割与分类等方面有着很多成功的运用。在基于分形理论提出的分形维数的估计方法中,差分盒法是一种经常被使用的分形维数估计技术。研究发现差分盒法对细致纹理的最小二乘法线性拟合度比较好,但是对较为粗糙的纹理其最小二乘法的线性拟合度不够理想,估计出的分形维数往往失真。为了解决这个问题,提出了一种网格重叠差分盒模型,用以计算差分盒的盒子数的网格在一定程度上重叠,计算整个图像统计自相似意义上的盒子数,其最小二乘法的线性拟合度比较好。为了进一步提高差分盒的盒子计数精度,提出了非整数盒子计数法,修正了缩放尺度,试验证明其能更真实地反映纹理的分形维数。

关键词 分形维数,差分盒,粗糙纹理

中图分类号 TP391.4 **文献标识码** A

New Fractal Model of Grid Overlapping Differential Box-counting

LI Chuan-long LI Ying YU Shui-ming

(Environmental Information Institute, Dalian Maritime University, Dalian 116001, China)

Abstract One of the most important feature of the fractal dimension is that its fractal dimension is largely correlated with the surface roughness of image feeled by the human eye. The fractal has many successful applications in analysis, segmentation and classification of images, the differential box-account method is often used in the fractal dimension estimation based on fractal theory. Least-squares is better for detailed textures, but is not satisfactory for more coarse textures, in order to solve this problem, overlapping grid differential box-account model was presented, the grids which the numbers of the boxes are calculated by are overlapped, the numbers of boxes of the whole image are calculated on the statistical self-similarity. Linear fit of least-square of this model is better, in order to improve the precision of box-counting, non-integer box-counting and zoom-scale-fixing were presented, the fractal dimension of the image texture got by the model was validated, compared with differential box-account.

Keywords Fractal dimension, Different box account, Coarse texture

在图像的分析过程中,有两个重要的过程:图像纹理的提取和分割,而图像纹理的提取是图像中目标分离和提取的首要步骤,在图像的处理过程中有着重要的意义。对于图像而言,分形维数是分形的数量表示,是分形特征的定量刻画,其值不仅仅是通常意义的欧式整数维数,也可以是分数维数,其维数的大小与图像的纹理粗糙度相对应。分形理论已经广泛应用到图像的分析中,在运用分形维数进行图像分形和处理,其大多数的研究主要集中在对图像灰度纹理的维数估计方面。分形维数的常用算法有 Keller 提出的盒维数算法^[1]、Peles 提出的基于形态算子的毯子算法^[2]、sarka 提出的差分计盒算法^[3]、分形布朗运动算法^[4,5]等,这些分形维数估计算法中,差分盒算法近年来在焊缝检测^[6]、声纳图像识别^[7]、原棉异纤图像处理^[8]、遥感图像分割^[9]、医疗特征图像提取^[10]等各个领域有着广泛的应用,其算法简单,与其他方法比较,有着更好的性能^[11]。

学者在近年来对差分盒法做了很多相关研究,例如文献^[12]针对差分盒算法计算精度不高和计算量大等问题,基于动态规划和残差分析的思想,提出了改进的差分盒分形维数计算方法,刘松涛等改进了盒子数的统计^[13],刘明芹等的局部盒维数的计算方法^[14],这些方法都基于一个最基本的假设:即图形中局部和整体之间(包括小的局部和大的局部)的相似性,但是本文研究发现,细致纹理的小尺度与大尺度之间有更好的相似性,差分盒法对细致的纹理有较好的性能,但是对较为粗糙的纹理,小尺度和大尺度之间相似性较差,其最小二乘法的拟合性却不理想。针对较为粗糙的纹理,本文提出的网格重叠差分盒模型有着更好的拟合性。

1 差分盒算法简介

差分盒算法^[3](differential box-counting DBC)的基础是分形的自相似性,这种自相似性在数学上称为标度不变性^[8],

到稿日期:2010-01-20 返修日期:2010-04-27 本文受国家科技部支撑计划课题-水上溢油遥感识别与监测技术(2006BAC11B01),海洋局重点实验室开放研究基金(200809)资助。

李传龙(1976-),男,博士生,主要研究方向为空间信息、图像处理技术、信号分析, E-mail: lichuanlong@bankcomm.com。

即把尺度 r 扩大为 λr 倍后,新的函数增大为原来函数的 λ^m 倍,即尺度改变了 λ 倍后,函数具有自相似性(新函数是膨胀或收缩的原函数)。差分盒分形维数是一种相似维,把一个 $M \times M$ 的图像分成若干个 $s \times s (2 \leq s \leq M/2, s \in N)$ 的图像块,将灰度图像想象成三维空间中的曲面, x, y 轴表示图像的长与宽, z 轴表示图像的灰度值,在每一个 $s \times s$ 大小的网格上,堆放一些 $s \times s \times h$ 的盒子,其中盒子的高度 $h = G \times r, G$ 是图像的最大灰度级, $r = s/M$ 是缩小的尺度,设第 (i, j) 个网格中的灰度最大值和最小值分别落在第 k 个和第 l 个盒子中,则:

$$n_r(i, j) = k - l + 1 \quad (1)$$

是覆盖第 (i, j) 个网格所需要的盒子数,所以覆盖整个图像所需要的总盒子数为所有网格的盒子数的总和:

$$N_r = \sum n_r(i, j) \quad (2)$$

对于不同的 s , 计算一系列的 $\log N_r, \log 1/r$, 运用最小二乘法求出这一系列 $\log N_r$ 和 $\log 1/r$ 的斜率, 亦即差分盒的维数。

为了盒子数的计算更加准确, 提出了一些改进^[15], 每个网格的盒子计算改为:

$$n_r = \begin{cases} \lceil (\max I - \min I) / h \rceil, & \max I \neq \min I \\ 1, & \max I = \min I \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\max I, \min I$ 分别是网格上最大和最小灰度值, 此种方法计算出来的盒子数与曲面更吻合, 盒子数更紧密, 等于将盒子沿 z 轴移动达到最小的盒子数就能覆盖灰度表面, 这个方法称为改进的移动差分盒 MDBC (moved differential box-counting)。

2 网格重叠的差分盒算法

2.1 网格重叠的差分盒算法

差分盒方法一个最基本的原理是分形的自相似性, 局部与整体的相似性, 其图像的灰度曲面也具有相似性, 虽然相似性普遍存在于自然界中, 但是完全严格的自相似性是不存在的。对于细致的纹理, 因为纹理的周期性比较小, 所以具有更大的相似性, 但是对于粗糙的纹理, 其纹理的周期比较大, 所分形的相似性比较差, 对于小尺度 s 可能无法包含一个完整的周期纹理, 而一个大尺度的 s 可能包含一个以上的周期纹理, 因此对于不同 s 的网格计算出来的 $\log N_r$ 和 $\log r$ 的最小二乘法的拟合性不够理想。另外, 普通 DBC 和 MDBC 等差分盒方法存在一些缺陷, MDBC 和 DBC 方法的网格是不重叠的, 比如相邻网格间的灰度跳跃和变化无法体现出来, 为了得到更好的拟合性和更真实的分形维数, 本文提出一种网格可以重叠的差分盒算法 OMDBC (Grid Overlapping MDBC), 重叠的网格能将 DBC 方法中网格间的灰度跳变包含进来, 能够包含更多的信息, 更好地计算出覆盖图像盒子数, 网格可以按照一定的跨度重叠, 下一个网格比照前一个网格向后(或向下)移动 st (网格跨度) 个像素, 计算此网格的盒子数, 如图 1 所示。

其盒子的计算如下:

$$N_r = \frac{N_r'}{\left\{ \frac{[\lceil (M-s+1)/st \rceil]^2}{\left[\lfloor \frac{M}{s} \rfloor \right]^2} \right\}} \quad (4)$$

式中, N_r' 是所有重叠网格的盒子总和, 其中每个网格的盒子

数由式(3)计算, M 是图像的宽度, $s \geq 2$ 是正方形网格的宽度, st 是网格重叠的跨度, $\lceil \cdot \rceil$ 函数求不小于给定实数的最小整数, $\lfloor \cdot \rfloor$ 函数求不大于给定实数的最大整数, $[\lceil (M-s+1)/st \rceil]^2$ 是图像所有重叠网格的个数, 式(4)是求统计意义上的平均盒子数, 当 $st = s$ 时, $\lceil (M-s+1)/st \rceil = \lceil (M-s+1)/s \rceil = \lceil (M+1)/s \rceil - 1 = \lfloor (M+1)/s \rfloor = \lfloor M/s \rfloor$ 代入式(4)中得 $N_r = N_r'$, 此时是普通的 DBC 方法。

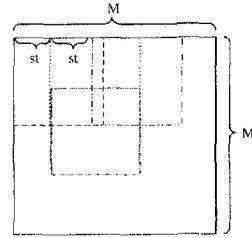


图 1 网格重叠

普通差分盒方法中观测到的盒子数常常存在异常点, 根据回归分析理论, 如果存在这样的异常点, 其对最小二乘法的回归直线的斜率(即分形维数)会产生比较大的影响, 那么其计算出来的分形维数较其实际的分形维数值就会有较大的差异, 另外, 由于纹理图像是统计自相似的, 因此在不同的尺度下, 图像的自相似程度会发生较大的变化, 对回归的斜率产生较大的影响。所以, 对于分形维数算法的可靠性、模型的统计自相似程度, 必须给予足够的重视, 本文采用的重叠网格算法, 是一种改进的 MDBC 算法, 从计算盒子数的方法上看, 式(4)是求重叠网格的盒子数的统计平均估计值, 其盒子数的统计值具有更多的相似性。

2.2 盒子非整数计数法

盒子的计数采用非整数计数, 更贴近实际情况, 比如采用普通 MDBC 中式(3)计算出 $\lceil (1.1) \rceil = 2$, 其盒子数为 2, 但是第 2 个盒子大部分是空的, 不符合实际情况, 所以直接采用 1.1 个盒子比较贴切。

式(3)中每个网格的盒子数都是整数, 为了更精确地计算盒子数, 本文提出一种分数盒子数, 将式(3)修改为:

$$n_r = \begin{cases} (\max I - \min I) / h = \nabla I / h, & \max I \neq \min I \\ 1, & \max I = \min I \end{cases} \quad (5)$$

2.3 缩放尺度整数化

图像是离散的数据, 在实际应用中其缩放比例只能是整数, 而不能是分数, 所以差分盒算法中的 $r = s/M$ 修正为:

$$r = 1 / \lfloor M/s \rfloor \quad (6)$$

2.4 测量纹理窗口的选择

图像纹理的周期变化并不是很严格的周期变化, 只是自相似的意义上的近似周期变化, 所以只要选取图像测量窗口包含一个以上的周期即可, 实际中要根据图像分辨率来选取测量纹理窗口的大小, 在本文的 3.1 节采用 brodatz 纹理库做仿真实验, 以 60 作为测量纹理窗口的大小。

2.5 重叠网格的分形维数范围

从几何中知道: 直线的维数是 1; 方形、圆、椭圆等平面图形的维数是 2; 立方体、球等立方体图形的维数是 3。图像中的所有像素的灰度值相同的情况下, 其图像是一个欧氏平面, 其分形维数理论应该为 2, 纹理粗糙复杂的图像其分形维数应该接近欧氏三维空间的维数 3, 本文基于重叠网格的差分

盒法所计算的维数介于 2 与 3 之间。

证明:纹理的图像,根据式(6),每个像素的盒子数为 n_r , 设定所有 n_r 中最大的为 $\max n_r$, 最小的为 $\min n_r$, 整个图像的网格数的和是: $\lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2$, 图像盒子数有下列不等式:

$$N_r' = \sum_{i=1}^N n_{r_i} \geq \lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2 \times \min n_r \quad (7)$$

$$\begin{aligned} N_r' &= \sum_{i=1}^N n_{r_i} \leq \lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2 \times \max n_r \\ &= \lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2 \times \max \nabla I/h \\ &= \lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2 \times (\max \nabla I / \\ &\quad \left[G/\text{floor}\left(\frac{M}{s}\right) \right]) \\ &= \lceil \text{ceil}((M-s+1)/st) \rceil^2 \times (\max \nabla I/G \times \text{floor} \\ &\quad \left(\frac{M}{s}\right)) \end{aligned} \quad (8)$$

在式(7)、式(8)中 $\min \nabla I$ 和 $\max \nabla I$ 分别是图像的网格中使用式(6)计算的最小和最大灰度差,所以根据式(6)得:

$$\begin{aligned} \min n_r &= \begin{cases} \min \nabla I/h, & \min \nabla I \neq 0 \\ 1, & \min \nabla I = 0 \end{cases} \\ \max n_r &= \begin{cases} \max \nabla I/h, & \max \nabla I \neq 0 \\ 1, & \max \nabla I = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(7)、式(8)代入式(4)得:

$$\begin{aligned} \min n_r \times \left[\text{floor}\left(\frac{M}{s}\right) \right]^2 &\leq N_r \\ N_r &\leq \left[\text{floor}\left(\frac{M}{s}\right) \right]^2 \times (\max \nabla I/G \times \text{floor}\left(\frac{M}{s}\right)) \end{aligned}$$

即:

$$\min n_r \times \left[\text{floor}\left(\frac{M}{s}\right) \right]^2 \leq N_r \leq \left[\text{floor}\left(\frac{M}{s}\right) \right]^3 \times (\max \nabla I/G)$$

根据式(5)代入得:

$$\min n_r \times \left[\frac{1}{r} \right]^2 \leq N_r \leq \left[\frac{1}{r} \right]^3 \times (\max \nabla I/G) \quad (10)$$

对于图像中的所有像素的灰度值相同的情况下,其图像是一个欧氏平面,维数也是最小的,根据式(6) $\min n_r = 1$, 所以由式(10)得:

$$\left[1/r \right]^2 \leq N_r \leq \left[1/r \right]^3 \times (\max \nabla I/G) \quad (11)$$

对于不同的 r , 由 $\log N_r$ 、 $\log 1/r$ 的比率 $K = \log N_r / (\log 1/r)$ 的范围可得到:

$$2 \leq K \leq 3 + \log(\max \nabla I/G) / \log(1/r) \quad (12)$$

式(12)的最后一项中的 G 是最大灰度值,其最大灰度差 $\max \nabla I \leq G$, 所以 $\log(\max \nabla I/G) < 0$, 又因为 $\log(1/r) > 0$, 所以式(12)中的最后一项是小于零的,且 $\max \nabla I$ 越接近 G , 式(12)中最后一项越接近 0, K 就越接近 3, 所以由式(12)得到 $2 \leq K \leq 3$ 。

3 仿真试验

3.1 拟合性仿真实验

本文从 brodatz 纹理库中分别选取粗细图像各 16 幅(120 * 120), 共 2 组, 如图 2、图 3 所示, 每幅图像再分割为 4 幅图像(60 * 60), 这样粗细每组图像共计 64 幅图像。

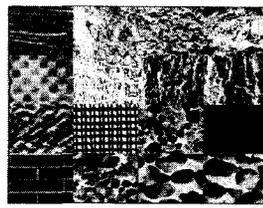


图 2 第一组粗纹理图像

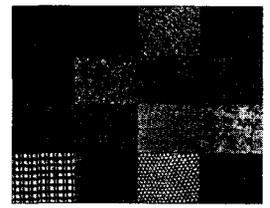


图 3 第二组细纹理图像

本文使用距离误差^[16,17]对重叠网格差分盒(OMDBC)和改进的差分盒(MDBC)做了对比, 距离误差反映的是在使用最小二乘法做拟合估计差分盒的分形维数时最小二乘法拟合的质量, 如果测量图像纹理的方法合理, 那么纹理图像的盒子数和 $1/r$ 的对数的散点图就接近一条直线, 从而令最小二乘法拟合的误差非常小; 反之, 如果模型计算出来的盒子数没有统计的相似性, 那么最小二乘法拟合的误差比较大。所以最小二乘法拟合的距离误差经常用来衡量分形维数估计的质量, 距离误差的计算方法如下:

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (kx_i + b - y_i)^2 / (1+k)^2}{N}} \quad (13)$$

式中, $y_i = \log N_{r_i}$, $x_i = \log 1/r_i$, r_i 是不同的测量尺度, N 是测量尺度的个数, 对图 2、图 3 分别做了实验和对比(式(4)中重叠网格跨度 $st=1$), 其距离误差的对比如图 4、图 5 所示, 从其中可以看出, 对于粗纹理的图像, OMDBC 方法的距离误差有比较明显的减小, 但是对于细致的纹理, 两种方法的距离误差没有明显的减小。所以对于粗纹理、纹理跨度较大的图像, 比较适合使用重叠网格差分盒做分形维数的估计, 能取得比较好的最小二乘法的拟合性, 其取得的分形维数更合理。

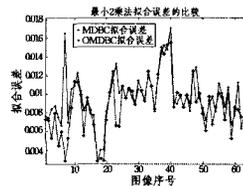


图 4 粗纹理图像的距离误差对比

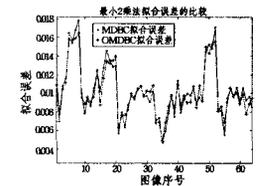


图 5 细致纹理图像的距离误差对比

从表 1 中可以看出将 OMDBC 方法用于粗纹理图像, 其 64 幅图像的平均距离误差减小了 0.0008, 拟合性能得到了进一步的提高, 但是用于细纹理图像, 其 64 幅图像的平均距离误差仅仅减小了 0.0001, 对细致纹理图像的拟合度提高不明显, 所以重叠网格差分盒法对粗纹理图像的拟合度比较好。

表 1 粗细 64 幅图像平均距离误差比较

	OMDBC 平均距离误差	MDBC 平均距离误差
粗纹理图像	0.0088	0.0096
细纹理图像	0.0102	0.0103

3.2 粗纹理的线性拟合关系分析

从 brodatz 纹理库选取了标号为 D31 和 D37 的图像, 这两幅图像都是粗纹理图像, 对其对数的线性关系做了分析, 如图 6 所示, 其 OMDBC 方法有明显的线性关系, 但是 MDBC 方法却出现了跳跃点, 跳跃点的出现将破坏线性拟合性。

3.3 重叠网格的重叠度分析

本文对不同的网格跨度(式(4)中重叠网格跨度 st)做了分析, 其跨度越小, 网格重叠的部分越大, 即重叠度越大, 但其拟合误差也越小, 如图 7 所示, 也即式(4)所计算出的盒子数

更具有统计特性,能够平滑个别网格因噪声而导致盒子数发生的跳变,具有更多的图像信息。

本文所提出的重叠网格差分盒算法中,两个重叠的网格一定会存在其中一个网格包含这个普通差分盒两个网格间的灰度跳变信息,因此它能很好地解决普通 DBC 差分盒模型中网格间灰度跳跃无法反映在分形维数中的问题,其计算出的分形维数也将更符合图像纹理。

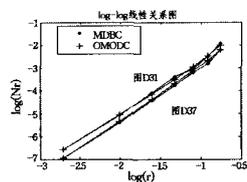


图6 拟合的线性关系

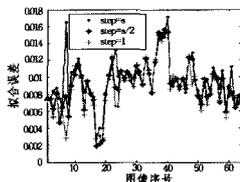


图7 重叠网格跨度对拟合性的影响

结束语 差分盒方法计算分形维数在很多方面有着广泛的应用,特别是在图像纹理特征提取方面,取得了很大进展。本文提出的基于统计自相似的网格重叠差分盒方法,用不同的尺度去度量纹理图像分形维数,能取得比较好的拟合性,其拟合距离误差非常小,相比于传统的差分盒估计分形维数性能有了更多的改进,并且提出了非整数表达盒子数和测量尺度整数化,进一步提高了差分盒中盒子数的计算精度,测量出的图像分形维数介于2和3之间,更符合图像维数的实际意义。

参考文献

[1] Keller J M, Chen S S, Crownover R M. Texture Description and Segmentation through Fractal Geometry[J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1987, 2(45): 150-166

[2] Peleg S, Naor J, Hartley R. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(5): 518-523

[3] Chaudhuri B B, Sarkar N, Kundu P. Improved Fractal Geometry

Based Texture Segmentation Technique [C] // Proceedings of Computers and Digital Techniques, 1993, 140: 233-241

[4] Penland A P. Fractal-based description of natural scenes [J]. IEEE Trans PAM I, PAM I, 1986, 6(6): 661-674

[5] Fortin C, et al. Fractal dimension in the analysis of medical images[J]. IEEE Engineering in Medicine and Biology, 1992, 6: 173-181

[6] 刘明芹, 张晓光. 差分盒维法在焊缝边缘检测上的应用研究[J]. 河北工业科技, 2009, 26(5): 300-302

[7] 杨词银, 许枫. 一种抗噪分形维计算方法及其在声纳图像识别中的应用[J]. 应用声学, 2008, 27(2): 95-101

[8] 陈廷, 张维龙. 分形维数在原棉异纤图像处理中的应用[J]. 测试技术学报, 2009, 23(3): 248-252

[9] 孙晓妍, 董槐林. 遥感图像中船只目标区域的分割方法[J]. 计算机工程, 2008, 34(10): 196-198

[10] 机小京, 孙万蓉. 基于分形维数的白细胞图像特征提取研究[J]. 计算机工程与设计, 2009, 30(4): 941-943

[11] Yu L, Zhang D, Wang K, et al. Coarse iris classification using box-counting to estimate fractal dimensions[J]. Pattern Recognition, 2005, 38: 1791-1798

[12] 张涛, 孙林, 黄爱民. 图像分形维数的差分盒方法的改进研究[J]. 电光与控制, 2007, 14(5): 55-57

[13] 刘松涛. 用盒子维评估红外烟幕对舰船目标的遮蔽效果[J]. 光电工程, 2009, 36(2): 35-38

[14] 刘明芹, 张晓光. 一种计算图像分形维数的有效方法[J]. 西安科技大学学报, 2009, 29(3): 369-372

[15] Jiang L, Du Q. An improved box-counting method for image fractal dimension estimation[J]. Pattern Recognition, 2009, 42: 2460-2469

[16] Sarkar N, Chaudhuri B B. An efficient approach to estimation fractal dimension of textural images[J]. Pattern Recognition, 1992, 25(9): 1035-1041

[17] Sarkar B B, Chaudhuri B B. An efficient differential box-counting approach to compute fractal dimension of image[J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics, 1994, SMC-24(1): 115-120

(上接第278页)

维模型质量的影响。随着噪声强度的增强三维模型的失真也随之变大,这可以用于在多个受噪声攻击的模型中判断哪个模型受过较少的攻击,从而可以采集到最有利用价值的三维网格模型。

表4 网格攻击后的质量变化

攻击方法	顶点数	面个数	$R(M_w, M_w')$
Smoothing	35945	69451	10.13
Noise Addition(0.5)	35945	69451	6.31
Noise Addition(1.0)	35945	69451	9.20
Noise Addition(1.5)	35945	69451	9.65
Noise Addition(2.0)	35945	69451	10.81
Remeshing	36471	70489	11.30
Cropping	34370	66240	7.30

结束语 本文主要介绍了一种新的三维网格模型数字水印失真度的客观评价方法——基于网格粗糙度的评价方法,此方法是对文献[2]中的粗糙度计算方法的改进,消除了文献[2]中可能出现的几种严重问题。这种客观评价方法有别于传统的信噪比和 Hausdorff 距离的评价方法,它与主观评价方法有着高度的一致性。在实验中,我们使用本文提出的质量评价算法对几种典型的三维模式水印算法的性能进行评价,结果表明,本文方法可用于对网格失真程度的评价,对水印算法中嵌入强度的选择有指导作用,并可评估被攻击网格模型受攻击的程度。

参考文献

[1] Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking Three-Dimensional Polygonal Models[A] // Proceedings of the fifth ACM international conference on multimedia[C]. Seattle, Washington, United States, 1997: 261-272

[2] Corsini M, Gelasca E D. Watermarked 3-D Mesh Quality Assessment[J]. IEEE Transaction on Multimedia, 2007, 9(2): 247-256

[3] Kanai S, Date H, Kishinami T. Digital watermarking for 3D polygons using multiresolution wavelet decomposition [A] // Proceedings of International Workshop on Geometric Modeling[C]. Tokyo, Japan, 1998: 296-307

[4] Funk W. Reversible Watermarking of NURBS-Based CAD Models[A] // 9th International Workshop on Information Hiding [C]. Alexandria, United States of America, 2007: 172-187

[5] 刘旺, 孙圣和. 基于三维 DCT 变换的 NURBS 模型鲁棒数字水印嵌入算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2005, 19(6): 1-5

[6] Wu Jian-hua, Hu Shi-min, Sun Jia-guang, et al. An effective feature-preserving mesh simplification scheme based on face contraction[A] // Ninth Pacific Conference on Computer Graphics and Applications [C]. Tokyo, Japan, 2001: 12-21

[7] 喻志强, 叶豪盛, 赵荣椿, 等. 稳健的三角形网格数字水印技术[J]. 计算机应用, 2002, 22(9): 94-96

[8] 张静, 郑国勋. 基于几何特征的三维网格数字水印算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(4): 740-747

[9] 胡敏, 谢颖, 许良凤, 等. 基于几何特征的自适应三维模型数字水印算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(3): 390-394