

完全对换网络的一簇猜想

师海忠 王国亮 马继勇 侯斐斐

(西北师范大学数学与信息科学学院 兰州 730070)

摘 要 完全对换网络是互连网络设计中的一个重要的 Cayley 图模型,关于完全对换网络的一簇猜想如下:对任意整数 $n \geq 3$,当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $1 \pmod{4}$ 时,完全对换网络 CT_n 是 $k(1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{4})$ 个边不交的哈密尔顿圈和 $(\frac{n(n-1)}{2} - 2k)$ 个完美对集的并;当 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 或 $3 \pmod{4}$ 时,完全对换网络 CT_n 是 $k(1 \leq k \leq \frac{n(n-1)-2}{4})$ 个边不交的哈密尔顿圈和 $(\frac{n(n-1)}{2} - 2k)$ 个完美对集的并。证明了当 $n=3,4$ 和 $n=5(1 \leq k \leq 4), n=6(1 \leq k \leq 6)$ 时,这簇猜想是正确的。

关键词 互连网络, Cayley 图, 完全对换网络, 哈密尔顿圈, 完美对集

中图分类号 TP393 **文献标识码** A

One Variety Conjectures of Complete-transposition Network

SHI Hai-zhong WANG Guo-liang MA Ji-yong HOU Fei-fei

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730030, China)

Abstract Complete-transposition Networks are important cayley graphs model in networks design. One variety conjectures of complete-transposition networks were proposed as follows: for any integer $n \geq 3$, if $n \equiv 0 \pmod{4}$ or $1 \pmod{4}$, CT_n is a union of $k(1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{4})$ edge-disjoint Hamiltonian cycles and $\frac{n(n-1)}{2} - 2k$ perfect matchings. if $n \equiv 2 \pmod{4}$ or $3 \pmod{4}$, CT_n is a union of $k(1 \leq k \leq \frac{n(n-1)-2}{4})$ edge-disjoint Hamiltonian cycles and $\frac{n(n-1)}{2} - 2k$ perfect matchings. We proved the conjectures are true for $n=3,4$, and $n=5(1 \leq k \leq 4), n=6(1 \leq k \leq 6)$.

Keywords Interconnection networks, Cayley graph, Complete-transposition, Hamiltonian cycle, Perfect matching

1 引言

超级计算机通常是指由数百数千甚至更多的处理器/服务器互连而成的、能计算普通 PC 机和服务器不能完成的大型复杂课题的计算机。互连网络是超级计算机的组成部分,互连网络很大程度上决定着超级计算机的性能。互连网络拓扑结构通常模型化一个图^[1-4],其顶点对应处理器/通讯端口,边对应通信信道。超立方体等因有良好的性能而受到青睐,然而它们也各有不足之处。为了设计出更多性能的互连网络,1989 年 S. B. Akers 和 B. krishnamurthy 提出了互连网络的群论模型,并设计出了 star 网络、冒泡排序网络等^[5]。1993 年 S. Lakshmivarahan 等设计出了修正冒泡排序网络、完全对换网络等^[6]。1998 年师海忠在博士论文中提出互连网络的环论模型^[7]。2011 年师海忠等提出了互连网络的向量图模型^[8]。互连网络设计是一个多目标最优化问题,这个目标包括小的网络直径、高连通度、可诊断性、可嵌入性、可扩展性、哈密尔顿性等。许多文献研究了 star 网络、冒泡排序网络、修正冒泡排序网络、完全对换网络等的性质^[9-16],但对完全对换网络的哈密尔顿性质研究较少。本文提出了关于完全对换网

络的一簇猜想,并证明了当 $n=3,4$ 和 $n=5(1 \leq k \leq 4), n=6(1 \leq k \leq 6)$ 时,这簇猜想是正确的。

2 预备知识

定义 1 设 G 是一个有限群, 1 是它的单位元, $\Omega = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ 是 G 的一个生成子集且满足: 1) $g_i \in \Omega \Rightarrow g_i^{-1} \in \Omega$, 2) $1 \notin \Omega$ 。Cayley 图是一个简单图, 它的顶点集和边集分别如下: $V(\Gamma) = G, E(\Gamma) = \{(g_i, g_j) \mid g_i^{-1}g_j \in \Omega\}$ 。

定义 2 一个对换就是指交换两个数的位置所得的置换。对换图(transposition graph)是一个无环图, 它有 n 个顶点, 用符号 $1, 2, \dots, n$ 来表示, 它的边 (i, j) 对应于一个对换, 即在 $1, 2, \dots, n$ 中把 i 和 j 交换得到的置换, 我们称这个图为对换图。

定义 3 (完全对换网络, complete-transposition network) 是特殊的 Cayley 图, 在 Cayley 图的定义中, 令 G 是 n 个符号 $1, 2, \dots, n$ 上的对称群 $S_n, \Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, (\text{其中 } (i, j) \text{ 表示交换 } i \text{ 和 } j \text{ 的位置得到的置换})\}$, 则生成的 Cayley 图称为完全对换网络, 记为 CT_n 。

定义 4 设 M 是边集 E 的一个子集, 它的元素是 G 中的

本文受甘肃省自然科学基金(ZS991-A25-017-G)资助。

师海忠(1963—),男,博士,副教授,主要研究方向为组合优化、互连网络理论、图半群与图语言等, E-mail: shihaizhong@nwnu.edu.cn。

连杆,并且这些连杆中的任意两个在 G 中均不相邻,则称 M 为 G 的对集;若对集 M 的某条边与顶点 V 关联,则称 M 饱和顶点 V ,并且称 V 是 M 饱和的;若 G 的每个顶点均为 M 饱和的,则称 M 为 G 的完美对集。

对于 $1 \leq i \leq n$,在 CT_n 中顶点 X 的第 i 个元素标号表示为 $X[i]$,对于固定的 i ,在 CT_n 中定义一个子图 $CT_n^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$),子图被顶点集 $\{X | X[n] = i\}$ 导出,“—”表示两个顶点是邻接的。完全对换网络 CT_2, CT_3 和 CT_4 ,如图 1 所示。

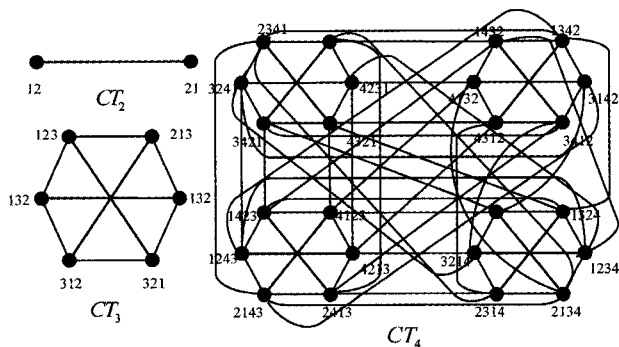


图 1 完全对换网络 CT_2, CT_3 和 CT_4

3 主要结果

3.1 关于完全对换网络 CT_n 的一簇猜想

猜想:对任意整数 $n \geq 3$,当 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 或 $1 \pmod{4}$ 时,完全对换网络 CT_n 是 k ($1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{4}$) 个边不交的哈密尔顿圈和 $(\frac{n(n-1)}{2} - 2k)$ 个完美对集的并;当 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 或 $3 \pmod{4}$ 时,完全对换网络 CT_n 是 k ($1 \leq k \leq \frac{n(n-1)-2}{4}$) 个边不交的哈密尔顿圈和 $(\frac{n(n-1)}{2} - 2k)$ 个完美对集的并。

上述猜想,是随着 k 取值的增大而逐渐增强的。即对于任意的 $1 \leq s < t \leq \frac{n(n-1)}{4}$ 或 $\frac{n(n-1)-2}{4}$, $k=t$ 的猜想总是强于 $k=s$ 的猜想。也就是说,若当 $k=t$ 时猜想成立,则当 $k=s$ 时猜想一定成立;但若当 $k=s$ 时猜想成立,则推不出当 $k=t$ 时猜想成立。

引理 1^[2] 设 G 是 k 正则二部图 ($k > 0$),则 G 有 k 个边不交的完美对集的并。

性质 1 完全对换网络 CT_n 有 $n!$ 个顶点且是 $\frac{n(n-1)}{2}$

正则二部图,它是顶点可迁的,它的直径是 $n-1$ 。

3.2 完全对换网络 CT_n ($n=3,4,5,6$) 的结构

定理 1 (1) CT_3 是 1 个边不交的哈密尔顿圈和 1 个完美对集的并;(2) CT_4 是 3 个边不交的哈密尔顿圈的并。

证明:(1)对于 CT_3 ,它是 1 个边不交的哈密尔顿圈和 1 个完美对集的并;

$H_1: 123-213-231-321-312-132-123$

$M: 123-321, 213-312, 231-132$

(2) CT_4 是 3 个边不交的哈密尔顿圈 H_1, H_2 和 H_3 的并。

$H_1: 4321-4312-4132-1432-1342-3142-3412-3214-3124-1324-1234-2134-2314-2413-2143-1243-1423-4123-4213-4231-2431-2341-3241-3421-$

4321

$H_2: 4321-4231-3241-3142-4132-2134-3124-4123-2143-2341-1342-4312-3412-1432-1423-3421-2431-2413-4213-1243-1234-3214-2314-1324-4321$

$H_3: 4321-4123-4132-4231-1234-1432-2431-2134-2143-3142-3124-3421-3412-2413-1423-1324-1342-1243-3241-3214-4213-4312-2314-2341-4321$

对于 $n=5$ 的完全图,可以找到两条哈密尔顿路如图 2 所示。

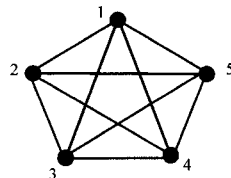


图 2

哈密尔顿路 $I_5: 1-2-3-4-5$

哈密尔顿路 $II_5: 1-3-5-2-4$

引理 2^[12] 利用哈密尔顿路 $I_5: 1-2-3-4-5$,构造 H_1 和 H_2 ,让所有交换第 1 位置和第 5 位置数字所生成的边作为 CT_5 一个完美对集 M_1 。

$H_1: 12345-12435-14235-14325-41325-41235-42135-42315-24315-23415-23145-21345-21435-24135-24153-24513-25413-25143-25134-25314-23514-23154-32154-32514-35214-35124-35142-35412-53412-53142-53124-53214-53241-53421-54321-54312-54132-45132-45312-43512-34512-34152-34125-34215-43215-43125-43152-41352-41532-41523-45123-45213-42513-42153-41253-14253-14523-15423-15243-51243-51234-51324-51342-51432-51423-54123-54213-52413-52143-52134-52314-52341-25341-25431-52431-54231-45231-45321-43521-43251-42351-42531-24531-24351-23451-23541-32541-35241-35421-34521-34251-32451-32415-32145-31245-13245-13425-31425-31452-13452-14352-14532-15432-15342-13542-31542-31524-31254-13254-13524-15324-15234-12534-12543-12453-21453-21543-21534-21354-12354-12345$

$H_2: 12345-13245-13254-12354-12534-21534-25134-52134-51234-15234-15243-12543-21543-25143-52143-51243-51423-15423-15432-51432-54132-54123-45123-45132-41532-14532-14523-41523-41253-41235-14235-14253-12453-12435-21435-21453-24153-42153-42135-24135-24315-24351-42351-42315-43215-43251-34251-34215-32415-23415-23451-32451-32541-32514-23514-23541-25341-52314-53214-35214-35241-53241-52341-52431-52413-25413-25431-24531-24513-42513-42531-45231-45213-54213-54231-54321-45321-45312-54312-53412-53421-35421-35412-34512-34521-43521-43512-43152-34152-31452-31542-35142-53142-51342-15342-15324-$

51324-53124-35124-31524-13524-13542-16452-13425-14325-14352-41352-41325-43125-34125-31425-31245-31254-32154-32145-23145-23154-21354-21345-12345

引理 3 利用哈密尔顿路 $II_5: 1-3-5-2-4$, 对于 H_3 和 H_4 分别只须把 H_1 和 H_2 中每个顶点做如下替换, 1 不变, 2 变为 3, 3 变为 5, 4 变为 2, 5 变为 4, 让所有交换第 1 位置和第 4 位置数字所生成的边作为 CT_5 一个完美对集 M_2 。

由引理 2 和引理 3 可得到如下定理。

定理 2 CT_5 是 4 个边不交的哈密尔顿圈 H_1, H_2, H_3, H_4 以及 2 个完美对集 M_1 和 M_2 的并, 并且这 4 个哈密尔顿圈与这 2 个完美对集没有相同的边。

对于 $n=6$ 的完全图, 可以找到 3 条哈密尔顿路如图 3 所示。

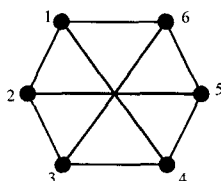


图 3

哈密尔顿路 $I_6: 1-2-3-4-5-6$

哈密尔顿路 $II_6: 5-2-6-3-1-4$

哈密尔顿路 $III_6: 3-5-1-6-4-2$

引理 4^[12] 利用哈密尔顿路 $I_6: 1-2-3-4-5-6$, 并利用引理 2 中的哈密尔顿圈 H_{120}^1 和 H_{120}^2 , 构造 H_{720}^1 和 H_{720}^2 。让所有交换第 1 位置和第 6 位置数字所生成的边作为 CT_6 一个完美对集 M_1 。

首先在 $CT_6^{(1)}$ 中建立一个哈密尔顿圈 H_1 , 相似地, 在 $CT_6^{(2)}, CT_6^{(3)}, CT_6^{(4)}, CT_6^{(5)}$ 和 $CT_6^{(6)}$ 中依次得到哈密尔顿圈 H_2, H_3, H_4, H_5 和 H_6 。这些哈密尔顿圈如下:

$H_1 = \langle 634521, P_{11}, 623451, P_{12}, 643521, 634521 \rangle$

$H_2 = \langle 634512, P_{21}, 564132, 561432, P_{22}, 643512, 634512 \rangle$

$H_3 = \langle 564123, P_{31}, 265143, 256143, P_{32}, 561423, 564123 \rangle$

$H_4 = \langle 265134, P_{41}, 216354, 213654, P_{42}, 256134, 265134 \rangle$

$H_5 = \langle 216345, P_{51}, 241365, 214365, P_{52}, 213645, 216345 \rangle$

$H_6 = \langle 214356, P_6, 241356, 214356 \rangle$

因此得到在 CT_6 中的哈密尔顿圈 H_{720}^1 (见图 4):

$H_{720}^1 = \langle 623451, P_{11}, 634521, 634512, P_{21}, 564132, 564123, P_{31}, 265143, 265134, P_{41}, 216354, 216345, P_{51}, 241365, 241356, P_6, 214356, 214365, P_{52}, 213645, 213654, P_{42}, 256134, 256143, P_{32}, 561423, 561432, P_{22}, 643512, 643521, P_{12}, 623451 \rangle$

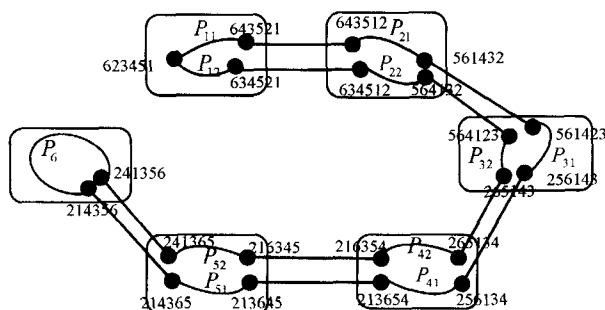


图 4

H_{720}^2 的构造类似于 H_{720}^1 的构造, 用 H_{120}^2 替代 H_{120}^1 , 在 $CT_6^{(1)}, CT_6^{(2)}, CT_6^{(3)}, CT_6^{(4)}, CT_6^{(5)}$ 和 $CT_6^{(6)}$ 中建立哈密尔顿圈 $H_1', H_2', H_3', H_4', H_5'$ 和 H_6' 。这些哈密尔顿圈如下:

$H_1' = \langle 623451, Q_{11}, 436521, 436512, Q_{12}, 623451 \rangle$

$H_2' = \langle 436512, Q_{21}, 546132, 456132, Q_{22}, 346512, 436512 \rangle$

$H_3' = \langle 546123, Q_{31}, 562143, 652143, Q_{32}, 456123, 546123 \rangle$

$H_4' = \langle 562134, Q_{41}, 123654, 132654, Q_{42}, 652134, 562134 \rangle$

$H_5' = \langle 123645, Q_{51}, 213465, 123465, Q_{52}, 132645, 123645 \rangle$

$H_6' = \langle 213456, Q_6, 123456, 213456 \rangle$

因此得到在 CT_6 中的哈密尔顿圈 H_{720}^2 (见图 5):

$H_{720}^2 = \langle 623451, Q_{11}, 436521, 436512, Q_{21}, 546132, 546123, Q_{31}, 562143, 562134, Q_{41}, 123654, 123645, Q_{51}, 213465, 213456, Q_6, 123456, 123465, Q_{52}, 132645, 132654, Q_{42}, 652134, 652143, Q_{32}, 456123, 456132, Q_{22}, 346512, 346521, Q_{12}, 623451 \rangle$

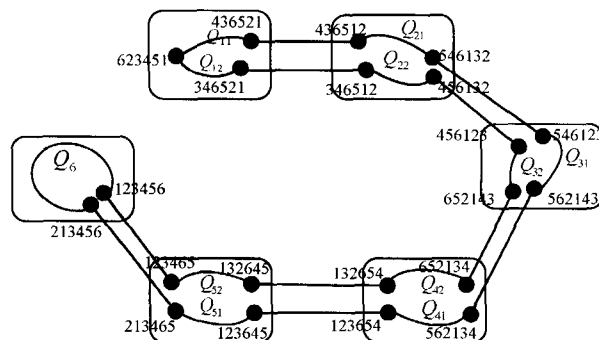


图 5

引理 5 利用哈密尔顿路 $II_6: 5-2-6-3-1-4$, 对于 H_{720}^1 和 H_{720}^2 分别只须把 H_{720}^1 和 H_{720}^2 中每个顶点做如下替换, 1 变为 5, 2 不变, 3 变为 6, 4 变为 3, 5 变为 1, 6 变为 4。让所有交换第 4 位置和第 5 位置数字所生成的边作为 CT_6 一个完美对集 M_2 。

引理 6 利用哈密尔顿路 $III_6: 3-5-1-6-4-2$, 对于 H_{720}^1 和 H_{720}^2 分别只须把 H_{720}^1 和 H_{720}^2 中每个顶点做如下替换, 1 变为 3, 2 变为 5, 3 变为 1, 4 变为 6, 5 变为 4, 6 变为 2。让所有交换第 2 位置和第 3 位置数字所生成的边作为 CT_6 一个完美对集 M_3 。

由引理 4, 引理 5 和引理 6 可得到如下定理。

定理 3 CT_6 是 6 个边不交的哈密尔顿圈和 3 个完美对集的并, 并且这 6 个哈密尔顿圈与这 3 个完美对集没有相同的边。

结束语 研究了并行计算机中互连网络的一个重要的模型——完全对换网络。提出关于完全对换网络的一簇猜想, 并证明了当 $n=3, 4$ 和 $n=5 (1 \leq k \leq 4)$, $n=6 (1 \leq k \leq 6)$ 时, 这簇猜想均是正确的。但关于完全对换网络 $CT_n (n \geq 7)$ 的这簇猜想的证明以及完全对换网络的其他性质有待于进一步研究。

参考文献

- [1] Bondy J A, Marty U S R. Graph Theory[M]. London: Springer,

- [2] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009
- [3] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [4] Cayley A. The theory of graphs, graphical representation[J]. Mathematical Paper, Cambridge, 10(1895): 26-28
- [5] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks [J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(4): 555-565
- [6] Lakshminarayanan S, Jwo J-S, Dhall S K. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey [J]. Parallel Computing, 1993, 19: 361-407
- [7] 师海忠. 互连网络的代数环模型[D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 1998
- [8] 师海忠, 牛攀峰, 马继勇, 等. 互连网络的向量图模型[J]. 运筹学报, 2011, 15(3): 115-123
- [9] Gaucyac G. On quasi-cayley graphs. Discrete Applied Mathematics, 1997(77): 43-58

- [10] Shi Hai-zhong, Niu Pan-feng. Hamiltonian decomposition of some interconnection networks [A]//Proceed of 3th Annual International conference on Combinatorial Optimization and Applications. (Ding-zhu Du etc)[C]. Berlin: Springer, 2009: 231-237
- [11] 师海忠, 路建波. 关于互连网络的几个猜想[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(31): 112-115
- [12] Shi Hai-zhong, Niu Pan-feng, Lu Jian-bo. One conjecture of bubble-sort graph[J]. Information Processing Letters, 2011, 111: 926-929
- [13] Xu Jun-ming, Ma Mei-jie. Survey on path and cycle embedding in some networks[J]. Front. Math. China, 2009, 4(2): 217-252
- [14] 师海忠, 马继勇, 牛攀峰. 关于修正冒泡排序网络一簇猜想[J]. 计算机科学, 2011, 38(10A): 265-267
- [15] 路建波. Star-网络的 Hamiltonian 圈分解及 (l, ω) 控制数[D]. 兰州: 西北师范大学, 2010
- [16] 牛攀峰. 冒泡排序网络的一些新结果[D]. 兰州: 西北师范大学, 2011

(上接第 388 页)

(3) $traffic_operation \vdash (dom\ traffic_op'! = (itinerary_set? \times place?)) \wedge (ran\ traffic_op'! \subseteq reqtraffic?)$

(4) $hotel_operation \vdash (dom\ hotel_op'! = (time? \times place?)) \wedge (ran\ hotel_op'! \subseteq reqhotel?)$

(5) $restaurant_operation \vdash dom\ restaurant_op'! = (time? \times place?)$

(6) $branchverify_operation \vdash tag'! = ((\emptyset \notin ran\ tickets_op?) \wedge (\emptyset \notin ran\ traffic_op?) \wedge (\emptyset \notin ran\ hotel_op?) \wedge \emptyset \notin ran\ restaurant_op?))$

在已有的(1)–(6)中, 可以根据变量的输入输出得到组件之间的组合关系。为了简便, 现假设组件之间都可以进行组合。

例如(1)和(2), (2)的输入变量包含在(1)的输出变量中, 所以(1)和(2)可以是顺序组合的关系, 即(1); (2)。同理可以推出(1); (3), (1); (4), (1); (5), 简写为(1); ((2) || (3) || (4) || (5)) $\triangleq$ (7)。

由于(2)、(3)、(4)、(5)的输出包含在(6)的输入中, 因此可以推出它们与(6)可以顺序连接。(6)的输出是 $tag!$, 它的值可能为真也可能为假。若为真, 即得到(0)的结论, 也就得到了需要的结果; 若为假, 那么为(1)的输入。由此可得到(1)与(6)之间的选择关系, 由此得到(7)与(6)的循环关系。使用 3.4 节说明的简化写法即 $operation \circ (6) \circ (7)$ 。

如果考虑到组件之间的可组合性, 那么每一步推导需要加入组件之间的可组合性的检查。可组合性的检查使用的是 3.2 节中的 *Match* 方法, 通过输出接口 $\leftrightarrow$ 消息 $\leftrightarrow$ 输入接口关系的匹配, 确定是否可组合。

组件系统中的组件的发生更新时, 相对应的操作谓词发生了改变, 那么根据以上的推导方法可以相应地改变组件的组合结构。

该方法建立的组件系统是一个增量式的组件库, 每一个原子组件和根据某种需求复合的新组件都在这个组件库中供新的需求提取, 即新的需求可以重用组件库中已有组件并对其扩展。

结束语 本文使用 Object-Z 语言对在 Internet 环境下的 Web 组件进行了形式化建模, 对 Web 原子组件及组件的组合

等行为进行了形式化的表述, 并以此作为进一步使用定理证明来验证 Web 组件的组合、交互行为的基础。进一步的工作是研究组件的组合在功能上的一致性、相关自动化工具的开发以及采用定理证明的方法对 Web 组件组合的验证。

参考文献

- [1] Christensen F, Curbera F, Meredith G. Web Service Definition Language[EB/OL]. <http://www.w3.org/TR/wsdl>
- [2] Martin D, burstein M, hobbs J, et al. OWL-S; Semantic Markup for Web Services[EB/OL]. <http://www.w3.org/Submission/OWL-S/>
- [3] Yang Jian, Papazoglou M P. Web component: a substrate for Web service reuse and composition[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2002, 2348: 21-36
- [4] Beyer D, Chakrabarti A, Henzinger T A. Web service interfaces [C] // Proceedings of the 14th international conference on World Wide Web(WWW '05). 2005: 148-159
- [5] Beyer D, Chakrabarti A, Henzinger T A. An Interface Formalism for Web Services[C]//Proceedings of the First International Workshop on Foundations of Interface Technologies(FIT 2005, San Francisco, CA, August 21). 2005
- [6] Shin S K, Kim S D. A method to transform objectoriented design into component-based design using Object-Z[C]// Proceedings of the International Conference on Software Engineering Research, Management and Applications(SERA). 2005: 274-281
- [7] Alencar P S C, Cowan D D, Lucena C J P. A Logical Theory of Interfaces and Objects[J]. IEEE Transaction on Software Engineering, 2002, 28(6): 548-575
- [8] Zaremski A M, Wing J M. Specification matching for software components[J]. ACM Trans Soft Eng Meth, 1997, 6(4): 333-369
- [9] 罗巨波, 应时. 基于 Object-Z 的 ReflectiveArchitecture 形式化研究[J]. 计算机科学, 2010(11): 126-130
- [10] 缪淮扣, 李刚, 朱关铭. 软件工程语言-Z[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1999
- [11] Smith G. The Object-Z Specification Language [M]. Kluwer Academic Publishers, 2000