

偶图范畴的规范描述

许东 朱刚 李静

(上海大学计算机工程与科学学院 上海 200444)

摘要 范畴论是抽象地处理数学结构以及结构之间联系的一门数学理论。以范畴论为数学基础的偶图,为普适信息系统提供一个设计、模拟和分析的平台。然而偶图的范畴理论缺少规范化的描述,一些概念术语的定义甚至有错误的地方。改进了偶图基本签名的定义,校正了位置图并置运算的定义,揭示了预范畴、范畴、s-范畴、对称偏幺半范畴之间的联系,给出了构造偶图范畴的算法,以便进一步研究偶图理论及其应用。

关键词 偶图,范畴,普适信息系统

中图分类号 TP31 **文献标识码** A

Specification of Bigraphical Categories

XU Dong ZHU Gang LI Jing

(School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract Category theory is a mathematical theory to process abstractly mathematical structures and the relations among them. Bigraph which uses category theory as mathematical base, is a design, simulation and analysis platform for ubiquitous information systems. There, however, is a lack of specification, and are some errors in the definitions for bigraphical categories. The definition of bigraph basic signature was improved, and the juxtaposition operation of place graphs was corrected, and the relations among precategory, category, s-category and symmetric partial monoidal category were revealed in conjunction with giving an algorithm to construct bigraphical categories in this paper. Therefore, bigraph theories and its applications will be further investigated.

Keywords Bigraph, Category, Ubiquitous information system

1 引言

随着计算机技术的不断发展,人们获取信息的方式变得无处不在。你可以用平板电脑、智能手机等端设备在任何时间、任何地点获得自己想要的信息——这是普适计算、云计算、移动互联网等新技术带来的一种全新的计算模式。在这种环境中,计算将消失在人们的视线中,但计算无处不在,计算设备与环境融为一体,各种设备可以通过网络连接在一起。

为了适应这种计算模型的变化,Robin Milner等学者在2001年提出了偶图(Bigraph)的概念,它是一种基于图形的形式化理论工具^[1,2],旨在强调计算的位置和连接。偶图试图集成现有的进程代数理论,如通信系统演算 CCS、 π 演算等。偶图不是扩展这些经典代数,而是试图建立一个兼容这些进程代数的统一框架,目标是面向无所不在的计算提供一个新的理论计算模型。

本文阐述偶图理论的基本方面,即偶图范畴^[5],试图使其内容的描述更加规范化。

2 偶图简介

为给出偶图的定义,首先介绍一下裸偶图的概念。

定义1(裸偶图, bare bigraph) 裸偶图由节点集 V 和边的集合 E 组成,边可以连接任意的节点。如图1所示的是一个裸偶图,可以用 $\overset{V}{F}$ 表示。

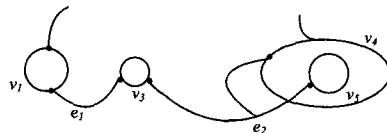


图1 一个裸偶图示意图

一个裸偶图可被分成一个森林和一个超图(hypergraph)。森林的节点就是裸偶图的节点 V 集,嵌套的节点在森林中表现为父子关系。超图是由节点集 V 和边的集合 E 组成。图2所示的左半部分是 $\overset{V}{F}$ 的森林,右半部分是它的超图。

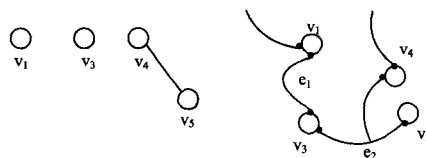


图2 裸偶图 $\overset{V}{F}$ 的森林和超图

定义2(位置图, place graph) 带有接口的森林称为位置图。位置图的接口用有穷序数 n 表示,即 $n = \{0, 1, n-1\}$, 特

到稿日期:2012-09-10 返修日期:2012-12-23

许东 男,博士,副教授,CCF会员,主要研究方向为新型计算模型、偶图及其应用等,E-mail:dxu@shu.edu.cn;朱刚 男,硕士生,主要研究方向为偶图及其应用。

别地 $0 = \emptyset$ 。位置图的接口又分为内部接口和外部接口,分别用来表示根(root)和站点(site)。

如上例 $\bar{F}$ 的森林的外部接口为 $3 = \{0, 1, 2\}$, 代表 3 个根, 分别是 v_1, v_3, v_4 的父节点; 而内部接口为 $0 = \emptyset$, 表示其没有站点。这样就将 $\bar{F}$ 的森林扩展为位置图 $F^P: 0 \rightarrow 3$, 如图 3(a) 所示。

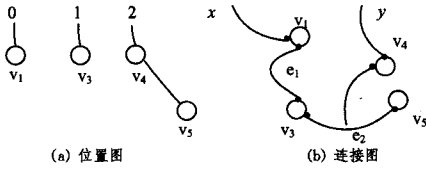


图 3 带有接口的位置图和连接图

节点之间可以嵌套, 表示了节点的包含关系。在位置图中, 用分支关系表示了节点之间的嵌套, 父节点相同的两个节点称作兄弟。

定义 3(连接图, link graph) 带有接口的超图称为连接图。连接图的接口是名字(字母)的集合, 也分为内部接口和外部接口, 即内部名字集和外部名字集。

如上例 $\bar{F}$ 的超图的外部接口为 $\{xy\}$; 而内部接口为 $\emptyset$ 。这样就将 $\bar{F}$ 的超图扩展为连接图 $F^L: \emptyset \rightarrow \{xy\}$, 如图 3(b) 所示。

定义 4(偶图, bigraph) 偶图是一个二元组 $B = \langle B^P, B^L \rangle$, B^P, B^L 分别是位置图和连接图。偶图的外部接口为 $\langle n, Y \rangle$, n, Y 分别是 B^P, B^L 的外部接口。偶图的内部接口为 $\langle m, X \rangle$, m, X 分别是 B^P, B^L 的内部接口。

例如上面的例子 $F = \langle F^P, F^L \rangle$, 其外部接口和内部接口分别是 $\langle 3, \{xy\} \rangle$ 和 $\langle 0, \emptyset \rangle$ 。这样裸偶图就扩展为偶图 $F: \langle 0, \emptyset \rangle \rightarrow \langle 3, \{xy\} \rangle$ 。偶图 F 还可以画成图 4 所示的图形。

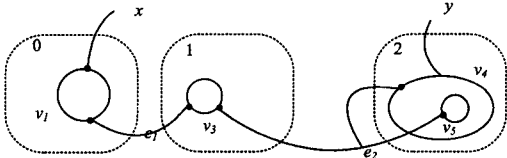


图 4 偶图 F 示意图

图中的矩形有时成为“区域”, 它是位置图中根的一种画法。

为了增强偶图的表示能力, 引进基本签名概念。本文对基本签名的定义进行如下的改进。

定义 5(基本签名, basic signature) 一个基本签名是一个二元组 $(\mathcal{K}, ar)$, 其中:

1. $\mathcal{K}$ 是一个集合, 其元素是称为控制(control)的节点。 $\forall K \in \mathcal{K}$, 用巴科斯范式(BNF)表示, 则有 $K ::= K | K : n, K$ 表示控制。 $n \in \mathbb{N}$, 表示 K 的参数数目, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数集。
2. 每个控制都有一个映射 ar , 表示从控制节点到 $\mathbb{N}$ 的映射, 即 $ar: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$ 。

基本签名 $\mathcal{K}$ 上的偶图, 就是给每个节点指派一个控制, 控制的参数数目就是该节点的端口数目。图 5 所示的偶图的基本签名为: $\mathcal{K} = \{K; 2, L; 1, M; 0\}$ 。这里 $ar(K) = ar(K; 2) = 2, ar(L) = ar(L; 1) = 1, ar(M) = ar(M; 0) = 0$ 。

有了基本签名的概念, 就可以进一步定义具体的位置图、连接图和偶图, 以及它们各自怎样构建特定类型的范畴。在

介绍它们的定义之前, 先定义几个运算符及符号:

1. $\#$, $S \# T$ 意味着两个集合 S 和 T 是不相交的, 即 $S \cap T = \emptyset$ 。
2. $\cup$, $S \cup T$ 表示两个不相交集的并。
3. $\mathcal{K}, \mathcal{V}$ 和 ϵ 表示 3 个有穷集合, 且这 3 个集合互不相交, 分别表示名字、节点和边标识符的集合。

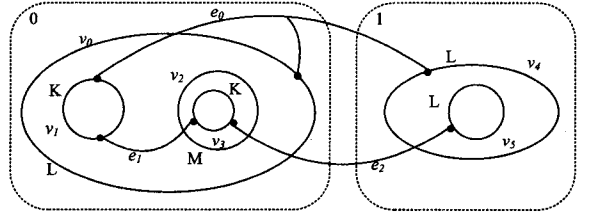


图 5 带有基本签名的偶图

现在分别定义具体的位置图、连接图和偶图。

定义 6(具体位置图, concrete place graph) 具体位置图 $F = (V_F, ctrl_F, prnt_F): m \rightarrow n$ 是一个三元组, 有一个内部接口 m 和一个外部接口 n , 它们都是有穷序数, 分别表示位置图的站点和根。 F 有一个有穷节点集 $V_F \subset \mathcal{V}$, 一个控制映射 $ctrl_F: V_F \rightarrow \mathcal{K}$ 和一个父映射 $prnt_F: m \cup V_F \rightarrow V_F \cup n$ 。

定义 7(具体连接图, concrete place graph) 具体连接图 $F = (V_F, E_F, ctrl_F, link_F): X \rightarrow Y$ 是一个四元组, 它有一个内部接口 X 和一个外部接口 Y , 它们都是 $\mathcal{X}$ 的有穷子集, 分别叫做连接图的内部和外部名字。 F 有一个有穷节点集 $V_F \subset \mathcal{V}$, 一个有穷边集 $E_F \subset \epsilon$, 一个控制映射 $ctrl_F: V_F \rightarrow \mathcal{K}$ 和一个连接映射 $link_F: X \cup P_F \rightarrow E_F \cup Y$ 。

这里 $P_F \stackrel{def}{=} \{(v, i) | i \in ar(ctrl_F(v))\}$ 是 F 的端口集。因此 (v, i) 就是节点 v 的第 i 个端口。

定义 8(具体偶图, concrete bigraph) 一个具体偶图 $F = (V_F, E_F, ctrl_F, prnt_F, link_F): \langle m, X \rangle \rightarrow \langle n, Y \rangle$ 由一个具体的位置图 $F^P = (V_F, ctrl_F, prnt_F): m \rightarrow n$ 和一个具体的连接图 $F^L = (V_F, E_F, ctrl_F, link_F): X \rightarrow Y$ 构成。把具体偶图写成 $F = \langle F^P, F^L \rangle$ 。

把偶图中的标识符定义为图形结构的支集(support), 形成有关偶图支集的概念。

定义 9(偶图支集, support for bigraphs) 给每个位置图、连接图或偶图 F 都附上一个有穷集合 $|F|$, 即它的支集。对于位置图, 定义 $|F| = V_F$, 对于连接图或偶图, 定义 $|F| = V_F \cup E_F$ 。

定义接口的目的是使偶图可以被组合; 这要求一个偶图的外部接口等于另一个偶图的内部接口。组合的定义如下:

定义 10(组合, composition; 同一性, identities) 这里先分别定义位置图和连接图的组合, 然后由它们一起定义偶图的组合。

(1) 如果 $F: k \rightarrow m$ 和 $G: m \rightarrow n$ 是两个位置图且 $|F| \# |G|$, 它们的组合

$$G \circ F = (V, ctrl, prnt): k \rightarrow n$$

节点 $V = V_F \cup V_G$, 控制映射 $ctrl = ctrl_F \cup ctrl_G$ 。它们的父映射如下定义: 如果 $w \in k \cup V_F \cup V_G$ 是 $G \circ F$ 的站点或节点, 则

$$prnt(w) \stackrel{def}{=} \begin{cases} prnt_F(w) & \text{if } w \in V_F \\ prnt_G(w) & \text{if } w \in V_G \end{cases}$$

$$\begin{cases} prnt_F(w), & \text{如果 } w \in k \cup V_F \text{ 且 } prnt_F(w) \in V_F \\ prnt_G(j), & \text{如果 } w \in k \cup V_F \text{ 且 } prnt_F(w) = j \in m \\ prnt_G(w), & \text{如果 } w \in V_G \end{cases}$$

m 上的单位(identity)位置图定义为: $id_m \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \emptyset_K, id_m): m \rightarrow m$.

(2) 如果 $F: X \rightarrow Y$ 和 $G: Y \rightarrow Z$ 是两个连接图且 $|F| \# |G|$, 它们的组合

$$G \circ F = (V, E, ctrl, prnt): X \rightarrow Z$$

$V = V_F \cup V_G, E = E_F \cup E_G, ctrl = ctrl_F \cup ctrl_G$, 它的连接映射定义如下: 如果 $q \in X \cup P_F \cup P_G$ 是 $G \circ F$ 的一个点(point), 则

$$link(q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} link_F(q), & \text{如果 } q \in X \cup P_F \text{ 且 } link_F(q) \in E_F \\ link_G(y), & \text{如果 } q \in X \cup P_F \text{ 且 } link_F(q) = y \in Y \\ link_G(q), & \text{如果 } q \in P_G \end{cases}$$

X 上的单位(identity)连接图定义为: $id_X \stackrel{\text{def}}{=} (\emptyset, \emptyset, \emptyset_K, id_X): X \rightarrow X$.

(3) 如果 $F: I \rightarrow J$ 和 $G: J \rightarrow K$ 是两个偶图且 $|F| \# |G|$, 它们的组合是

$$G \circ F \stackrel{\text{def}}{=} (G^P \circ F^P, G^L \circ F^L): I \rightarrow K$$

$I = \langle m, X \rangle$ 上的单位(identity)偶图是 $\langle id_m, id_X \rangle$.

把组合看作是将一个偶图放在另一个偶图的上面。也可以把两个偶图并排起来。仅当两个偶图不相交时, 定义这样的运算, 称作并置(juxtaposition)。下面分别定义。

定义 11(不相交图) 如果两个位置图 $F_i (i=0, 1)$, 有 $|F_0| \# |F_1|$, 则说它们是不相交的。如果两个连接图 $F_i: X_i \rightarrow Y_i$, 有 $X_0 \# X_1, Y_0 \# Y_1$ 且 $|F_0| \# |F_1|$, 则说它们是不相交的。如果 $F_0^P \# F_1^P$ 且 $F_0^L \# F_1^L$, 则说两个偶图 $F_i (i=0, 1)$ 是不相交的。

上面 3 种情况都可以写成 $F_0 \# F_1$ 。

我们现在定义不相交接口和不相交偶图的并置(juxtaposition)。并置是么半的(monoidal), 即它是可结合的并且有一个单位元(unit)。

定义 12(并置和单位元, juxtaposition and units) 分别定义位置图和连接图的并置, 然后由它们合在一起定义偶图的并置。在每一种情况中都明确指出并置的单位元。

(1) 对于位置图, 两个接口 $m_i (i=0, 1)$ 的并置是 $m_0 + m_1$, 单位元是 0。如果 $F_i = (V_i, ctrl_i, prnt_i): m_i \rightarrow n_i$ 是不相交的位置图, 它们的并置 $F_0 \otimes F_1: m_0 + m_1 \rightarrow n_0 + n_1$ 由下面的公式给出:

$$F_0 \otimes F_1 \stackrel{\text{def}}{=} (V_0 \cup V_1, ctrl_0 \cup ctrl_1, prnt_0 \cup prnt_1')$$

这里, $prnt_0 \cup prnt_1': (m_0 + m_1) \cup V_0 \cup V_1 \rightarrow (n_0 + n_1) \cup V_0 \cup V_1$ 。

令 $l = (m_0 + m_1) \setminus m_0$, 即 $(m_0 + m_1) \setminus m_0 = \{m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + m_1 - 1\}$ 。

$$prnt_1'(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} prnt_1(w), & \text{if } w = m_0 + i \in l \text{ and } prnt_1(i) \in V_1 \\ & \text{or } w \in V_1 \text{ and } prnt_1(w) \in V_1 \\ n_0 + j, & \text{if } w = m_0 + i \in l \text{ and } prnt_1(i) = j \in n_1 \\ & \text{or } w \in V_1 \text{ and } prnt_1(w) = j \in n_1 \end{cases}$$

(2) 对于连接图, 两个不相交连接图的接口的并置是 X_0

$\cup X_1$, 单位元是 $\emptyset$ 。如果 $F_i = (V_i, E_i, ctrl_i, link_i): X_i \rightarrow Y_i$ 是不相交的连接图($i=0, 1$), 它们的并置 $F_0 \otimes F_1: X_0 \cup X_1 \rightarrow Y_0 \cup Y_1$ 由下面的公式给出。

$$F_0 \otimes F_1 \stackrel{\text{def}}{=} (V_0 \cup V_1, E_0 \cup E_1, ctrl_0 \cup ctrl_1, link_0 \cup link_1)$$

(3) 对于偶图, 两个不相交 $I_i \langle m_i, X_i \rangle (i=0, 1)$ 的接口的并置是 $\langle m_0 + m_1, X_0 \cup X_1 \rangle$, 单位元(unit)是 $\epsilon = \langle 0, \emptyset \rangle$ 。如果 $F_i: I_i \rightarrow J_i$ 是不相交的偶图($i=0, 1$), 它们的并置 $F_0 \otimes F_1: I_0 \cup I_1 \rightarrow J_0 \cup J_1$ 由下面的公式给出。

$$F_0 \otimes F_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_0^P \otimes F_1^P, F_0^L \otimes F_1^L \rangle$$

有了偶图的基本概念后, 就可以将其与范畴的基本理论结合起来。

3 用于偶图的范畴基础

任何类型的范畴都涉及到两种主要实体: 对象(object)和箭头(arrow), 在有的范畴论的文献中称为态射。例如在范畴 SET 中对象是集合 $S_1, S_2, S_3, \dots$, 而箭头是集合间的函数 $f, g, \dots$ 。如果函数 f 使集合 S_1 的成员映射到集合 S_2 的成员, 则可写成 $f: S_1 \rightarrow S_2$, 这和正常的数学写法是一样的。在范畴中这种概念被推广了; 每个箭头 f 可能与函数很不一样, 它有一个定义域 I 和一个值域 J , 它们都是对象, 而且我们将之写成 $f: I \rightarrow J$ 。作为偶图基本理论的范畴, 其对象为接口, 箭头是图的结构。

任何类型的范畴都会涉及两个箭头 $f: I \rightarrow J$ 和 $h: J \rightarrow K$ 的组合, 并产生第三个箭头 $g = h \circ f: I \rightarrow K$ 。例如, 两个偶图 $F: \epsilon \rightarrow \langle 3, \{xy\} \rangle$ 和 $H: \langle 3, \{xy\} \rangle \rightarrow \langle 2, \emptyset \rangle$ 的组合, 就有 $G = H \circ F: \epsilon \rightarrow \langle 2, \emptyset \rangle$ 。范畴的定义还没有统一^[3,4], 下面给出用于偶图的一些范畴的定义。

定义 13(范畴, category) 一个范畴 C 有一个对象集合和一个箭头集合。我们经常用 I, J, K 表示对象, f, g, h 表示箭头。每个箭头 f 都有都一个定义域和值域, 它们都是对象; 如果定义域和值域是 I 和 J , 则写成 $f: I \rightarrow J, I = dom(f)$ 和 $J = cod(f)$ 。对于 I 和 J 的同域箭头集(homset), 即箭头 $f: I \rightarrow J$ 的集合, 写成 $C(I \rightarrow J)$, 或只写成 $(I \rightarrow J)$ 。

对于每个对象 I , 有一个单位(identity)箭头 $id_I: I \rightarrow I$; 当 I 是已知的, 简写成 id 。 f 和 g 的组合 $g \circ f$ 满足下面公式:

$$(1) g \circ f \text{ 有定义当且仅当 } cod(f) = dom(g).$$

(2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, 当等式的两边都有定义时等式成立。

$$(3) id \circ f = f, f \circ id = f.$$

向范畴中引入偏张量积及运算法则, 得到如下的偏么半范畴。

定义 14(偏么半范畴, partial monoidal category) 一个范畴是偏么半的, 当它在对象和箭头上有偏张量积(tensor product) $\otimes$, 且满足下面条件:

1. 对于对象

$$(1) I \otimes J \text{ 和 } J \otimes I \text{ 要么都定义, 要么都没有定义.}$$

$$(2) I \otimes (J \otimes K) \text{ 和 } (I \otimes J) \otimes K \text{ 要么都定义, 要么都没有定义.}$$

当都有定义时它们是相等的, 即 $I \otimes (J \otimes K) = (I \otimes J) \otimes K$ 。

(3) 有一个单位(unit)对象 ϵ , 通常叫做原点, 对于所有的

$$I, \text{ 有 } \epsilon \otimes I = I \otimes \epsilon = I.$$

2. 对于箭头

(1) $f: I_0 \rightarrow I_1$ 和 $g: J_0 \rightarrow J_1$ 的张量积有定义, 当且仅当 $I_0 \otimes J_0$ 和 $I_1 \otimes J_1$ 都有定义。

(2) 下面的等式的两边都有定义时, 等式成立:

$$1) f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h;$$

$$2) id_i \otimes f = f \otimes id_i = f;$$

$$3) (f_1 \otimes g_1) \circ (f_0 \otimes g_0) = (f_1 \circ f_0) \otimes (g_1 \circ g_0)。$$

给偏么半范畴增加对称(symmetric)箭头, 允许张量积中的因子重新排序。新的范畴将遵守 4 条准则, 这些准则解释了它们与组合、张量积和单位箭头是怎样的关系。

定义 15(对称偏么半范畴, symmetric partial monoidal category-spm 范畴) 一个偏么半范畴是对称的, 如果 $I \otimes J$ 有定义, 那么存在一个对称的箭头 $\gamma_{I,J}: I \otimes J \rightarrow J \otimes I$, 当组合和张量积有定义时, 满足下面的等式:

$$(1) \gamma_{I,I} = id_I;$$

$$(2) \gamma_{J,I} \circ \gamma_{I,J} = id_{I \otimes J};$$

$$(3) \gamma_{I_1, J_1} \circ (f \otimes g) = (g \otimes f) \circ \gamma_{I_0, J_0} \text{ (其中 } f: I_0 \rightarrow I_1, g: J_0 \rightarrow J_1 \text{);}$$

$$(4) \gamma_{I \otimes J, K} = (\gamma_{I,K} \otimes id_J) \circ (id_I \otimes \gamma_{J,K})。$$

现在介绍预范畴和 s -范畴的概念。

定义 16(预范畴, precategory) 预范畴 $\mathcal{C}$ 类似范畴, 除了 f 和 g 的组合可能未定义, 即使当 $cod(f) = dom(g)$ 时也可能未定义。用一个标记, 如 $\mathcal{C}$ 中的标记来区别预范畴。组合满足下面的条件(第一个条件比范畴中的要弱):

(1') 如果 $g \circ f$ 有定义, 则 $cod(f) = dom(g)$ 。反之不成立。

$$(2) h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f, \text{ 只要等式的两边都有定义。}$$

$$(3) id \circ f = f, \text{ 且 } f \circ id = f。$$

先假设一个表示支集元素的无穷词汇 $\mathcal{S}$, 然后把每个箭头关联到一个有穷支集; 再通过增加偏张量积和对称箭头, 预范畴可以转化为 s -范畴。下面是 s -范畴的定义。

定义 17(s -范畴) s -范畴 $\mathcal{C}$ 是一个预范畴, 其中每个箭头被附上一个有穷支集 $|f| \subset \mathcal{S}$ 。而且 s -范畴 $\mathcal{C}$ 具有偏张量积、单位元和对称性, 就象在 spm 范畴中一样。单位箭头 id_I 和对称箭头 $\gamma_{I,J}$ 被附上空支集。另外要满足下列条件:

(1) 对于 $f: I \rightarrow J$ 和 $g: J' \rightarrow K$, 组合 $g \circ f$ 有定义当且仅当 $J = J'$, 且 $|f| \# |g|$; 于是 $|g \circ f| = |f| \uplus |g|$ 。

(2) 对于 $f: I_0 \rightarrow I_1$ 和 $g: J_0 \rightarrow J_1$, 张量积 $f \otimes g$ 有定义当且仅当 $I_i \otimes J_i$ 有定义 ($i=0,1$), 且 $|f| \# |g|$; 于是 $|f \otimes g| = |f| \uplus |g|$ 。

图 6 表示了几种范畴之间的关系。

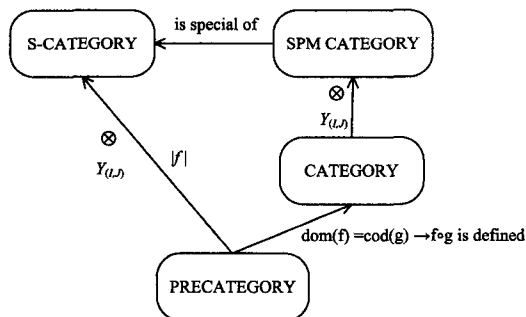


图 6 几种范畴关系示意图

4 偶图范畴

这里将把具体偶图以及具体的位置图和连接图转化成 s -范畴, 分别用 $'BG(\mathcal{X})$ 、 $'PG(\mathcal{X})$ 和 $'LG(\mathcal{X})$ 表示。算法 1 给出构造这些范畴的步骤。

算法 1 构造偶图范畴

Step 1 给定基于任意签名的具体位置图、连接图和偶图, 其定义见定义 6—定义 8。其对应的 s -范畴分别为 $'PG(\mathcal{X})$ 、 $'LG(\mathcal{X})$ 和 $'BG(\mathcal{X})$ 。

Step 2 箭头的构造。具体位置图、连接图和偶图中的接口映射分别作为 $'PG(\mathcal{X})$ 、 $'LG(\mathcal{X})$ 和 $'BG(\mathcal{X})$ 的箭头。

Step 3 对象的构造。具体位置图、连接图和偶图中的接口分别作为 $'PG(\mathcal{X})$ 、 $'LG(\mathcal{X})$ 和 $'BG(\mathcal{X})$ 的对象。对于位置图它们是自然数, 对于连接图它们是有穷名字集合, 对于偶图它们是自然数和有穷名字集合组成的对。

Step 4 支集的构造。 $'PG(\mathcal{X})$ 、 $'LG(\mathcal{X})$ 和 $'BG(\mathcal{X})$ 的支集分别是: V_G , $V_G, V_G \uplus E_G$ 。

Step 5 组合和单位图的构造, 见定义 10。

Step 6 张量积(并置)和单位元的构造, 见定义 12。

Step 7 对称箭头的构造。

在 $'PG$ 中: $\gamma_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset, \emptyset, \text{prnt}\}$, 这里: $\text{prnt}(i) = n + i (i \in m)$ 且 $\text{prnt}(m+j) = j (j \in n)$

在 $'LG$ 中: $\gamma_{X,Y} \stackrel{\text{def}}{=} id_{X \uplus Y}$

在 $'BG$ 中: $\gamma_{(m,X),(n,Y)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma_{m,n}, \gamma_{X,Y}\}$

容易验证根据以上算法构造出来的 $'BG(\mathcal{X})$ 、 $'PG(\mathcal{X})$ 和 $'LG(\mathcal{X})$ 均为 s -范畴。

结束语 偶图是一门年轻的学科, 有些理论还不太成熟。偶图理论及其应用技术正在以多种不同的方式发展。偶图范畴是将范畴论的基本理论引入偶图, 但又不同于标准的范畴论。本文的主要贡献在于: 基于巴科斯范式(BNF)改写了基本签名的定义; 将偶图中的并置运算($\otimes$)、关于两个位置图并置后的父节点映射的表示进行了改正, 并以严格的有穷序数的形式加以表述; 给出构造偶图范畴的算法; 对偶图范畴中的一些术语的中文表述带有尝试性, 有的以括号的形式给出英文, 试图使偶图范畴的表示更加规范化。

参考文献

- [1] Milner R. Bigraphical reactive systems[C]//Proc. 12th International Conference on Concurrency Theory, Lecture Notes in Computer Science 2154. Springer-Verlag, 2001: 16-35
- [2] Milner R. The Space and Motion of Communicating Agents [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- [3] 贺伟. 范畴论[M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [4] 陈意云. 计算机科学中的范畴论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1982
- [5] Milner R. Bigraphical Categories[C]//CONCUR 2009-Concurrency Theory. Lecture Notes in Computer Science. Volume 5710, 2009: 30-36