带权混合支配问题的近似算法研究

张佳男 肖鸣宇

(电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 611731)

摘 要 图 $G=(V,E)$ 上的混合支配集 D 是由图 G 中的顶点和边组成的集合,因此对于图 G 中的任意一条边或一个顶点,若其不在 D 中,则其必须与 D 中某条边或某个顶点相邻。混合支配问题是在一个图中找到一个基数最小的混合支配集。混合支配问题是图顶点支配问题和边支配问题的混合,在实际生活中有着许多应用,最近在算法中也备受关注。混合支配问题在一般图上是NP完全的。带权混合支配问题则是混合支配问题的一个自然推广,其将图中的点和边以不同权重进行区分。令图中所有点的权重均为 w_v,所有边的权重均为 w_e,带权混合支配问题则要求寻找一个混合支配集使得其点和边的权重之和达到最小。尽管针对混合支配问题已存在一个简单2倍近似算法,但是对带权混合支配问题的近似算法的研究进展却非常缓慢。在点的权重不大于边的权重的情况下,文中给出了带权混合支配问题的一个3倍近似算法。

关键词 混合支配问题,近似算法,点覆盖,线性规划

中图法分类号 TP391 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.04.012

Approximation Algorithm for Weighted Mixed Domination Problem

ZHANG Jia-nan XIAO Ming-yu

(School of Computer Science and Engineering,University of Electronic Science and Technology of China,Chengdu 611731,China)

Abstract A mixed domination set of graph $G=(V,E)$ is a set D with vertexes and edges in graph G,thus for every edge or vertex in G,if it is not in D,it must be adjacent or incident to at least one vertex or edge in D. The mixed domination problem is to find a mixed domination set with minimum cardinality. The mixed domination problem combines both the vertex domination problem and the edge domination problem,it is NP-complete and has many applications in real life . The weighted mixed domination set problem is a generalization of the mixed domination set problem,where a weight w_v is set to each vertex and a weight w_e is set to each edge,and the problem is to find a mixed domination set for minimum weight. Although the mixed domination set problem has a 2-approximation algorithm,few approximation results are known for the weighted mixed domination set problem. This paper designed a 3-approximation algorithm for the weighted mixed domination set problem with constraint $w_v \leqslant w_e$.

Keywords Mixed domination problem,Approximation algorithm,Vertex cover problem,Linear programming

1 引言

支配是图论和图算法中一个重要的研究内容。对于图,一个顶点支配集(简称支配集)是图中一个顶点的子集,使得该图中的每一个顶点,要么在该支配集中,要么它的至少一个邻居在该支配集中。经典的顶点支配问题[14]要求找到图中最小的一个顶点支配集。

支配的概念和问题在算法领域和实际应用中非常重要并且被广泛研究,例如,一个网络中的支配集对于控制和减轻网络拥塞及广播风暴具有重要的作用。一条信息需要在网络中广播时,通过支配集中的节点传播往往更高效且可以在很大程度上减轻网络负载,同时可以保证这条信息被网络中的所有节点接收[13]等。

除了顶点支配问题以外,还有很多不同类型的支配问题被广泛研究。边支配问题[12]是另一个被热门研究的问题,该问题要求从一个图中选取数量最少的一组边,使得图中任意一条不在这个集合中的边都和集合中至少一条边相邻。

顶点支配问题是用最少的一组顶点去支配剩余的顶点,而边支配问题是用最少的一组边去支配剩余的边。这两个问题在不同领域有着不同的应用,但是它们均被证明是NP完备的[6,12]。关于算法方面的研究大多集中在特殊图上的多项式可解性[2,5]、近似算法[9-10]、参数算法[15]等。

到稿日期:2017-05-31 返修日期:2017-07-30 本文受国家自然科学基金项目(61772115,61370071),中央高校基本科研业务费专项资金项目(ZYGX2015J057)资助。

张佳男(1994-),男,硕士生,主要研究方向为算法设计与分析等,E-mail:william.jn.zhang@gmail.com;**肖鸣宇**(1979-),男,博士,教授,主要研究方向为图算法、精确算法、参数算法等,E-mail:myxiao@uestc.edu.cn(通信作者)。

考虑到支配问题的重要性，研究者基于一些具体的应用场景，提出了混合支配的概念。混合支配是顶点支配和边支配两个概念的混合，其要求从图中选取一组具有最少顶点和边的集合来支配剩余的顶点和边。Zhao 等人[5]介绍了这种混合支配问题的一个直接应用，使用混合支配问题来解决相位测量单元(PMUs)在电力系统中的放置位置问题。事实上，混合支配问题最初被 Alavi 等人[1]提出，并被称为完全覆盖问题。尽管该问题现在更多地被称为"支配问题"，但是从其具体的数学定义来看，该问题也和"覆盖"这一类型的问题有很多共同点，因此早期该问题被称为"覆盖问题"。混合支配问题在被提出后不久就吸引了大量关注，也被集中研究[2-5]。

混合支配集的正式定义如下。对于简单图 $G=(V,E)$，一个混合支配集 D 是图 G 中的一个边和顶点的集合，对于图中的每一条边：若其不在集合 D 中，则与之相邻的边和它的两个端点构成的集合中至少有一个元素在集合 D 中；对于图中的每一个顶点：若其不在集合 D 中，则与之相邻的点和边构成的集合中至少有一个元素在集合 D 中。也就是说，一条边可以支配它的两个端点和与它相邻的边，一个顶点可以支配它的所有邻居顶点和连接它与邻居顶点的边。混合支配集是一个同时包含点和边的集合。混合支配问题即要求找到一个最小的集合来支配图中剩余的顶点和边。

混合支配问题在一般图上是 NP 完全的[6]，并且在很多特殊图上也被证明是 NP 完全的，比如二部图、分裂图(spilt graph)[7]、平面图[6]等。目前对于混合支配问题的研究主要集中在特殊图上的多项式可解性方面。Zhao 等人[5]研究了混合支配问题在树上的情况，即限定问题的输入(图 G)是一棵树，并给出了一个多项式时间的算法；之后，其在文中又证明了混合支配问题在一些限制图上难解的结论。Lan 等人[2]研究了混合支配问题在仙人掌上的情况，给出了一个多项式时间的算法；同时他们使用基于主对偶方法的标号法，为在树上的混合支配问题设计了一个更好的多项式时间的算法。

支配相关问题在近似算法领域被大量研究。很容易证明任意一个最大匹配是边支配集问题的一个 2 倍近似算法。但是对于顶点支配集问题，目前没有找到常数倍的近似算法，已知最好的近似率为 $1+\log|V|$[9]。作为顶点支配和边支配问题的结合和推广，混合支配问题也存在一个简单的 2 倍近似算法[16]。

现有研究也非常关注混合支配问题带权重的推广模型。混合支配集包含点和边，在初始混合支配问题中不对点和边进行区分，仅仅考虑它们的个数。点和边是两种不同的元素，在实际问题中它们的贡献和代价不一样，往往需要对其进行区分。因此，在混合支配问题中对点和边进行加权区分是非常有必要的。本文研究如下推广形式的问题。

带权混合支配问题：给定一个图 G，其中每个点的权值都为非负数 w_v，每条边的权值都为非负数 w_e，求一个混合支配集 S，使得其中点的权值之和加上边的权值之和最小。

在该带权问题中，所有点的权值都一样且所有边的权值都一样。尽管有如此限制，但是该问题的难度已经陡然增大，特别是关于近似算法方面的研究目前没有任何进展。很容易证明文献[16]中的简单 2 倍近似算法在带权问题上不成立。事实上，很多类似问题在带权重的情况下会变得更复杂，比如边支配集问题，不带权重的 2 倍近似算法只能算是教科书上的一个习题，但是带权重的 2 倍近似算法则得到了多年的研究[10]。

本文着重研究带权混合支配问题的近似算法，但是并没有为上述一般带权混合支配问题设计一个常数倍的近似算法。考虑实际情况，本文进一步将带权混合支配问题分为两种情况：1)点优先的带权问题，其中点和边的权值要求满足 $w_v\leqslant w_e$；2)边优先的带权问题，其中点和边的权值要求满足 $w_e\leqslant w_v$。点优先带权问题中边的权值更大，选边的代价更大；而边优先带权问题中点的权值更大，选点的代价更大。

本文将为点优先带权混合支配问题设计一个 3 倍的近似算法。对于边优先带权混合支配问题，本文没有给出任何近似算法，事实上，我们初步怀疑边优先情况的难度会很大，原因是当边的权值较小时，则希望解集中点的个数越少越好，这样就与最小点支配集问题非常相似，而点支配集问题已经被证明是在基于合理的假设下不存在常数倍的近似算法[17]。

本文针对点优先带权混合支配问题研究的近似算法主要基于线性规划技术。观察到混合支配问题和经典的点覆盖问题具有一些相似性，本文将在点覆盖问题的线性规划近似算法的基础上深入讨论混合支配问题和点覆盖问题的解的关系，从而构建一个点优先带权混合支配问题的近似算法。通过简单的分析，本文首先给出了一个较为直观的 4 倍近似算法，然后通过更细致的分析得到针对点优先带权混合支配问题的一个 3 倍近似算法。

2 基本性质

对于图 $G=(V,E)$，本文给出如下符号和定义。

带权图是指图中的点的权值为非负数 w_v，边的权值为非负数 w_e。一个点优先带权图是指图中的权值满足 $w_v\leqslant w_e$，一个边优先带权图是指图中的权值满足 $w_e\leqslant w_v$。

对于图的任意一个由顶点和边构成的集合 D，用 V_D 和 E_D 分别表示集合 D 中的顶点集和边集，也就是说：

$V_D=D\cap V$

$E_D=D\cap E$

$D=V_D\cup E_D$

并且定义 $V(D)$ 为 D 中的所有顶点以及边上的两个端点构成的点集。记 D 的权重 $w(D)=w_v|V_D|+w_e|E_D|$。

若一个带权混合支配集 S 使得 $w(S)$ 达到最小，则称其为最小带权混合支配集。

定理 1 对于任意一个带权图 G(满足 $w_v\leqslant w_e$)，总存在一个最小带权混合支配集 $S=V_S\cup E_S$，使得 E_S 要么是空集要么是图 G 中的一个匹配。

证明：(反证法)令 S' 是 G 的一个最小带权混合支配集，其中包含的边的条数达到最小。反设 S' 中包含的边集不是空集也不是一个匹配。那么 S' 中必定存在两条边 (u,v) 和 (v,w) 共用一个顶点 v。令 $E_{S''}=E_{S'}\setminus\{(u,v)\}$，$V_{S''}=V_{S'}\cup\{u\}$。

因为 $w_v \leqslant w_e$，所以 $S'' = V_{S''} \cup E_{S''}$ 是一个混合支配集且满足 $w(S'') \leqslant w(S')$，因此 S'' 仍然是一个最小带权混合支配集。但是 S'' 中包含的边的条数比 S' 中包含的边的条数少 1，从而与假设 S' 是包含边最少的最小混合支配集矛盾。因此假设不成立。证毕。

定理 2　一个图的任何混合支配集都包含了这个图中所有度数为 0 的点。

由前文对混合支配问题的介绍可以看到，混合支配问题与其他一些类型的覆盖和支配问题有很大的相似性，下面将研究混合支配问题与点覆盖问题的关系。

对于一个图 $G=(V,E)$，一个点覆盖是图 G 中的一个顶点集合 S，使得图中的每一条边至少有一个端点在集合 S 中。点覆盖问题要求找到图 G 中的一个最小的点覆盖。

对于一个图的点覆盖 C，因为图中的任何一条边都至少有一个端点在 C 中，C 在覆盖了图中所有边的同时也支配了图中的所有顶点，所以可以直接得到如下定理。

定理 3　在不含 0 度点的图中，任何一个点覆盖都是一个混合支配。

对于一个混合支配集 D，因为其支配了所有的边，所以每一条最少有一个端点是 D 中的一个点或者 D 中一条边上的端点，这就蕴含着 $V(D)$ 是一个点覆盖集。

定理 4　对于任意一个混合支配集 D，$V(D)$ 是一个点覆盖。

由以上定理很容易得到推论 1。

推论 1　对于图中的任意一个最小点覆盖 S_{vc} 和任意一个混合支配集 D，有：

$$|V_D| + 2|E_D| \geqslant |S_{vc}|$$

对于点覆盖和混合支配问题的最优解与可行解之间的关系，有如下结论。

定理 5　对于任意一个不含 0 度点的点优先带权图 G，用 S 和 S_{vc} 分别表示点优先带权混合支配问题和点覆盖问题的一个最优解集；用 D 和 C 分别表示任意一个带权混合支配集和点覆盖，则 $w(S) \leqslant w(C)$ 且 $w(S_{vc}) \leqslant 2w(D)$ 成立。

证明：首先 C 是一个点覆盖，由定理 3 可得 C 是一个混合支配集，从而也是点优先带权混合支配问题的一个可行解，而 S 是点优先带权混合支配问题的一个最优解，因此 $w(S) \leqslant w(C)$。

$V(D)$ 是一个点覆盖，满足：

$$|V(D)| \leqslant |V_D| + 2|E_D| \leqslant 2|D|$$

而 S_{vc} 是点覆盖的最优解，因此有：

$$|S_{vc}| \leqslant |V(D)|$$

故：

$$|S_{vc}| \leqslant 2|D|$$

将上式两边同时乘以 w_v，得：

$$w(S_{vc}) \leqslant 2w_v|D| = 2w_v|V_D| + 2w_v|E_D|$$

因为权重满足 $w_e \geqslant w_v$，所以：

$$2w_v|V_D| + 2w_v|E_D| \leqslant 2w_v|V_D| + 2w_e|E_D| = 2w(D)$$

因此，$w(S_{vc}) \leqslant 2w(D)$。证毕。

由定理 5 可以很容易得到推论 2。

推论 2　在不含 0 度点的图中，对于点覆盖问题和点优先带权混合支配问题的最优解 S_{vc} 和 S，有：

$$w(S) \leqslant w(S_{vc}) \leqslant 2w(S)$$

通过定理 5 及其推论，可以得到定理 6。

定理 6　若存在一个点覆盖问题的 α 倍近似算法，则存在一个点优先带权混合支配问题的 2α 倍近似算法。

证明：对于某个点优先带权图 G，记 I 为图 G 中度为 0 的顶点，令 S 为图 G 中混合支配问题的一个最优解，由定理 2 可知 I 一定在最优解 S 中。考察从 G 中删除度数为 0 的点以后的图 G'，令 C 为图 G' 中点覆盖问题的一个 α 倍近似解，则 C 是一个点覆盖，由定理 3 可知 C 也是图 G' 中一个混合支配问题的可行解。下面证明 C 的大小。

令 S_{vc} 为图 G' 中点覆盖问题的一个最优解，则

$$|C| \leqslant \alpha|S_{vc}|$$

令 S' 为图 G' 中点优先带权混合支配问题的一个最优解，则 $S = S' \cup I$。由推论 2 可知：

$$w(S_{vc}) \leqslant 2w(S')$$

综上可得：$w(C) \leqslant \alpha w(S_{vc}) \leqslant 2\alpha w(S')$。因此在原图 G 中，$w(C) + w(I) \leqslant 2\alpha w(S') + w(I) \leqslant 2\alpha(w(S') + w(I)) = 2\alpha w(S)$，即 $C \cup I$ 的权重最差不会超过最优解 $S = S' \cup I$ 的 2α 倍。证毕。

目前，针对点覆盖问题的最好的近似算法是 2 倍近似算法，并且得到点覆盖问题 2 倍近似解的方法有多种，后文使用的线性规划方法便是其中的一种重要方法。因此根据定理 6，利用点覆盖问题的 2 倍近似算法可以直接得到点优先带权混合支配问题的 4 倍近似算法。

推论 3　点优先带权混合支配问题存在 4 倍近似算法。

定理 7 说明在一种特例下，点优先带权混合支配问题存在 2 倍近似算法。

定理 7　对于一个带权图 G，若满足 $w_e \geqslant 2w_v$，则 G 上任意一个最小点覆盖是一个最小带权混合支配集。

证明：令 S 为 G 的一个最小带权混合支配集，令 S' 为将 S 中所有边替换成该边的两个端点后得到的点集。显然 S' 是 G 的一个混合支配集。并且由 $w_e \geqslant 2w_v$ 可知 $w(S) \geqslant w(S')$。因此 S' 仍然是 G 的一个最小混合支配集。

又因为图 G 的任意一个最小点覆盖 C 仍然是一个混合支配集，且满足 $|C| \leqslant |S'|$，所以图中任意一个最小点覆盖是一个最小带权混合支配集。证毕。

以上定理暗示：当权值满足关系 $w_e \geqslant 2w_v$ 时，任意一个点覆盖问题的 α 倍近似算法是点优先带权混合支配问题的一个 α 倍近似算法。因为点覆盖问题存在 2 倍近似算法，所以在这种特例下，点优先带权混合支配问题存在 2 倍近似算法。

对于一般情况下的点优先带权混合支配问题，目前只得到了一个 4 倍的近似算法。若要进一步得到 3 倍近似算法，则需要对点覆盖问题 2 倍近似算法的内部结构进行更细致的分析。本文则主要在点覆盖问题的线性规划算法的基础上，通过对其解结构内部性质的分析，证明了混合支配问题的一个 3 倍近似算法。算法中用到了点覆盖问题中两个重要的概念，因此在正式描述本文算法之前，先介绍这两个点覆盖问题中常用的技术。

3 NT定理与皇冠分解

线性规划是设计近似算法的强大工具,并且已经被运用到了很多问题的近似算法设计中,得到了大量优良的结果。本文也使用线性规划来研究点优先带权混合支配问题的近似算法,不直接对点优先带权混合支配问题进行线性规划建模。定理5及其推论和定理6揭示了混合支配问题与点覆盖问题的紧密联系。受此启发,本文将从点覆盖问题的线性规划模型入手,进一步分析并设计点优先带权混合支配问题的近似算法。

对于一个图 $G=(V,E)$,若对图中的每一个顶点 v 设置一个变量 $x_v\in\{0,1\}$ 来表示该点是否在解中,则点覆盖问题可以用如下整数规划模型IPVC表达。

$$\min \sum_{v\in V} x_v$$
$$x_u+x_v\geqslant 1, \forall (u,v)\in E$$
$$x_v\in\{0,1\}, \forall v\in V$$

若将IPVC中的0-1变量 x_v 松弛为 $0\leqslant x_v\leqslant 1$,则可得到点覆盖问题的松弛线性规划模型LPVC。求解整数规划模型是NP难的,但是线性规划模型是多项式可解的,只是线性规划模型可能得到非整数解,从而不能对应到原问题的一个解。对于图 G,记其点覆盖问题线性规划模型LPVC的最优解为 x_v^*,对应的目标函数值为 $vc^*(G)$,在不引起歧义的情况下也记为 vc^*。

Nemhauser和Trotter[11]给出了LPVC的可行域顶点的如下重要性质,这些性质又被称为NT定理。

定理8[11] 若 x_v^* 是LPVC的一个最优基可行解,则 x_v^* 满足半整性,即 $x_v^*\in\{0,\frac{1}{2},1\}$,并且可以在多项式时间内得到一个1/2分量最少且满足半整性的LPVC最优解。

定理9[11] 若LPVC的一个最优解满足半整性 $x_v^*\in\{0,\frac{1}{2},1\}$,则存在一个最小点覆盖包含 x_v^* 中所有分量为1的顶点。

下面用 x^* 表示满足定理8的一个使得 $\frac{1}{2}$ 分量最少且满足半整性的LPVC最优解。根据 x^* 将图 G 中的顶点划分为 V_1,$V_{\frac{1}{2}}$ 和 V_0 3个集合,分别表示对应分量为1,$\frac{1}{2}$ 和0的顶点构成的集合。本文将基于点优先带权混合支配问题的线性规划最优解 x^* 来构造其近似解。下面先分析 x^* 的一些性质。

注意,$C=V_{\frac{1}{2}}\cup V_1$ 是一个点覆盖,且满足如下关系:

$$|C|=|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}|=\sum_{v\in V_1}x_v^*+2\sum_{v\in V_{\frac{1}{2}}}x_v^*\leqslant 2(\sum_{v\in V_1}x_v^*+\sum_{v\in V_{\frac{1}{2}}}x_v^*)=2vc^*(G) \tag{1}$$

因此,C 是点覆盖问题的一个2倍近似算法。由定理6可知,C 是点优先带权混合支配问题的一个4倍近似算法。事实上,由式(1)可以得到如下更强的一个关系式:

$$2|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}|\leqslant 2vc^*(G) \tag{2}$$

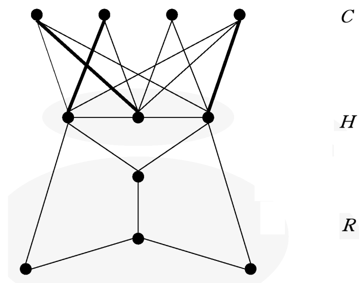
这个关系式将在3倍近似算法的证明中用到。为了得到点优先带权混合支配问题的一个3倍近似算法,文中还需要用到皇冠分解和其他的一些技术。

定义1(皇冠分解) 对于图 G,皇冠分解是将图的顶点划分成一个三元组 (C,H,R) 并且其满足如下3条性质:

1)C 是一个独立集,即 C 中任意两个顶点之间都不存在一条边。

2)H 将 C 与 R 分隔,即 C 与 R 之间没有边。

3)在由顶点 C 与 H 和它们之间的边构成的二部图中,存在一个匹配 M 包含了 H 中的所有顶点。



注:粗边表示一个 C 与 H 间的匹配 M

图1 皇冠分解

Fig.1 Crown decomposition

定理10给出了NT定理与皇冠分解的一个重要联系。

定理10 一个由LPVC最优解 x^* 确定的 $(V_0,V_1,V_{\frac{1}{2}})$ 是一个皇冠分解。

证明:由于 x^* 是LPVC的一个解,因此 V_0 中的任何一个点都只能与 V_1 中的点相连,则 V_0 是一个独立集且 V_0 与 $V_{\frac{1}{2}}$ 之间没有边。若 $(V_0,V_1,V_{\frac{1}{2}})$ 不是一个皇冠分解,说明在由顶点 V_0 与 V_1 以及它们之间的边构成的二部图中,不存在一个饱和顶点集 H 的匹配。由Hall定理可知,存在一个顶点集 $X\subseteq V_1$,使得 $|N_{V_0}(X)|<|X|$ 成立,其中 $N_{V_0}(X)$ 表示顶点集X在 V_0 中的邻居。很容易根据 x^* 构造LPVC一个新的解 $\tilde{x}$:

$$\tilde{x}_v=\begin{cases}0, & \text{if } v\in V_0\backslash N_{V_0}(X)\\ \frac{1}{2}, & \text{if } v\in V_{\frac{1}{2}}\cup X\cup N_{V_0}(X)\\ 1, & \text{if } v\in V_1\backslash X\end{cases}$$

因为 $|N_{V_0}(X)|<|X|$,所以 $w(\tilde{x})<w(x^*)$,这与 x^* 是LPVC的最优解矛盾。证毕。

4 3倍近似算法

下面将证明点优先带权混合支配问题的一个3倍的近似算法。算法判断 $w_e\geqslant 2w_v$ 是否成立,如果成立则由定理7可知该问题可以转换为一个点覆盖问题,从而返回一个点覆盖问题的2倍近似解即可。本文假设 $w_v\leqslant w_e<2w_v$。首先将图中所有度数为0的点放入解集中并将其从图中删除。其次在处理后的图上进行LPVC求解,根据其最优解确定一个皇冠分解 $(V_0,V_1,V_{\frac{1}{2}})$。然后在 $V_{\frac{1}{2}}$ 导出的子图 $G[V_{\frac{1}{2}}]$ 中求出一个最大匹配 M^*。最后将 M^* 中的边放入解集中,将 V_1 中的所有顶点放入解集中,将 $V_{\frac{1}{2}}$ 中不在匹配 M^* 中的点放入解集中。具体步骤如算法1所示。

算法 1

输入：一个点优先带权图 G，点权 w_v 和边权 w_e（其中 $w_e \geqslant w_v$）

输出：一个混合支配集 D

1. 初始化解集 $D=\varnothing$。
2. 若 $w_e \geqslant 2w_v$，返回点覆盖问题的任意一个 2 倍近似解。以下假设 $w_v \leqslant w_e < 2w_v$。
3. 记 I 为 G 中所有度数为 0 的顶点的集合。
4. 将 I 中的顶点加入到解集 D 中。从 G 中删除 I 从而得到图 G'。
5. 对 G' 进行 LPVC 求解得到皇冠分解（$V_0, V_1, V_{\frac{1}{2}}$）。
6. 将 V_1 中的顶点加入解集 D 中。
7. 在 $V_{\frac{1}{2}}$ 导出的子图 $G[V_{\frac{1}{2}}]$ 中求出一个最大匹配 M^*，并将 M^* 中所有边加入解集 D 中。
8. 记 N 为 $V_{\frac{1}{2}}$ 中剩下未包含在 M^* 中的顶点的集合，将 N 中所有点加入解集 D 中。
9. 返回解集 D。

定理 11　算法 1 返回的集合 D 是图 G 的一个点优先带权混合支配集，且其大小满足如下关系：

$$|D|=|I|+|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}|-|M^*|$$

证明：首先，由定理 2 可知任何混合支配集都将包含图中度数为 0 的顶点。下面考虑从 G 中删除度数为 0 的点以后的图 G'。根据皇冠分解的定义可知 V_0 是一个独立集，其中每一个点都不与 $V_{\frac{1}{2}}$ 中的点相邻，但每一个点都至少与 V_1 中的一个点相邻（因为 G' 中没有度数为 0 的点）。由于 D 包含了 V_1 中的所有点，因此 D 支配 V_0 中的所有点以及以 V_0 中的点为一个端点的边。由于 V_1 和 $V_{\frac{1}{2}}$ 中所有顶点都在 $V(D)$ 中，因此所有 V_1 和 $V_{\frac{1}{2}}$ 中的点以及它们间的边都被支配。故 D 是一个混合支配集，也是一个点优先带权混合支配集。

根据算法的步骤可以直接得到：

$$|D|=|I|+|V_1|+|M^*|+|N|$$

由于 M^* 是 $G[V_{\frac{1}{2}}]$ 的一个匹配，因此有：

$$|N|=|V_{\frac{1}{2}}|-2|M^*|$$

故 $|D|=|I|+|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}|-|M^*|$ 成立。证毕。

定理 12　令 $S=V_S \cup E_S$ 为 G 的一个最小点优先带权混合支配集，它使得 E_S 构成一个匹配。其大小满足如下关系式：

$$|E_S| \leqslant |V_1|+|M^*|$$

证明：E_S 中的边可以被分为两个部分：E_{S1} 和 E_{S2}。其中 E_{S1} 的每一条边至少有一个端点不在 $V_{\frac{1}{2}}$ 中；E_{S2} 的每一条边的两个端点都在 $V_{\frac{1}{2}}$ 中。故 $|E_S|=|E_{S1}|+|E_{S2}|$。我们通过证明 $|E_{S1}| \leqslant |V_1|$ 与 $|E_{S2}| \leqslant |M^*|$ 成立来证明定理成立。

由于 V_0 是一个独立集且 V_0 和 $V_{\frac{1}{2}}$ 之间没有边，因此可知 E_{S1} 中的每一条边都最少包含 V_1 中的一个顶点。故 $|E_{S1}| \leqslant |V_1|$ 成立。

根据定义可知，E_{S2} 也是 $G[V_{\frac{1}{2}}]$ 中的一个匹配，而 M^* 是 $G[V_{\frac{1}{2}}]$ 的一个最大匹配，因此有 $|E_{S2}| \leqslant |M^*|$。证毕。

定理 13　令 D 是算法 1 在图 G 上返回的一个解，令 I 为 G 中所有度数为 0 的顶点集合，令 $G'=G-I$。设 $S=V_S \cup E_S$ 是图 G' 的一个最小点优先带权混合支配集，其中 E_S 构成一个匹配，则 $|D| \leqslant |I|+2|V_S|+3|E_S|$ 成立。

证明：由定理 2 可知，G 的任何点优先带权最小混合支配集都将包含度数为 0 的点，即 I 中的点。因此下文将重点考虑从 G 中删除度数为 0 的点以后的图 G'。

因为 $S=V_S \cup E_S$ 是 G' 中一个最小点优先带权混合支配集，所以 $S^*=S \cup I$ 是原图 G 的一个最小点优先带权混合支配集。由推论 1 可知：

$$|V_S|+2|E_S| \geqslant |S_{vc}(G')|$$

再由式（2）可知：

$$2|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}| \leqslant 2vc^*(G') \leqslant 2|S_{vc}(G')|$$

因此：

$$2|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}| \leqslant 2|S_{vc}(G')| \leqslant 2|V_S|+4|E_S|$$

再由定理 11 可知：

$$|D|=|I|+|V_1|+|V_{\frac{1}{2}}|-|M^*|$$

因此：

$$|D|+|V_1|+|M^*| \leqslant |I|+2|V_S|+4|E_S|$$

由此可得：

$$|D| \leqslant |I|+2|V_S|+4|E_S|-(|V_1|+|M^*|)$$

由定理 12 可得 $|E_S| \leqslant |V_1|+|M^*|$。因此：

$$\begin{aligned}|D| &\leqslant |I|+2|V_S|+4|E_S|-(|V_1|+|M^*|)\\ &\leqslant |I|+2|V_S|+3|E_S|\end{aligned}$$

故 $|D| \leqslant |I|+2|V_S|+3|E_S|$ 成立。证毕。

以上 3 个定理主要描述解集 D 和最小点优先带权混合支配集 S 中点和边的元素个数的关系。由定理 13 的结论可以直接推导出不带权重的混合支配问题的 3 倍近似率。下文将在定理 13 的基础上证明点优先带权混合支配问题的 3 倍近似率。

定理 14　算法 1 给出的解 D 是一个点优先带权混合支配问题的 3 倍近似解。

证明：若 $w_e \geqslant 2w_v$，则 D 是一个点覆盖问题的 2 倍近似解；又由定理 7 可得，D 也是一个点优先带权混合支配问题的 2 倍近似解；否则，由 $|D|=|I|+|V_1|+|M^*|+|N|$ 和定理 13 中的 $|D| \leqslant |I|+2|V_S|+3|E_S|$ 可得：

$$|V_1|+|M^*|+|N| \leqslant 2|V_S|+3|E_S|$$

将上式两边同乘以 w_v 得：

$$w(V_1)+w_v|M^*|+w(N) \leqslant 2w(V_S)+3w_v|E_S| \tag{3}$$

又由推论 1 可知：

$$|V_S|+2|E_S| \geqslant |S_{vc}| \geqslant |M^*|$$

令 $\delta=w_e-w_v$，将上式两边同乘以 δ 可得：

$$\delta|M^*| \leqslant \delta|V_S|+2\delta|E_S| \tag{4}$$

将式（3）与式（4）相加可得：

$$w(V_1)+w_v|M^*|+\delta|M^*|+w(N) \leqslant 2w(V_S)+3w_v|E_S|+\delta|V_S|+2\delta|E_S|$$

因此有：

$$w(V_1)+w(M^*)+w(N) \leqslant 2w(V_S)+2w(E_S)+\delta|V_S|+w_v|E_S|$$

因为 $w_v \leqslant w_e < 2w_v$，所以 $w(V_1)+w(M^*)+w(N) \leqslant 3(w(V_S)+w(E_S))$。因此 $w(D) \leqslant 3w(S^*)$。证毕。

结束语　混合支配问题是众多热门研究的支配问题之一。本文紧扣混合支配问题与点覆盖问题的相似点，以 NT 定理和皇冠分解为核心技术，设计了针对点优先带权混合支配问题的第一个高效的近似算法，为一般带权混合支配问题近似算法的后续研究打下了基础，也为将 NT 定理和皇冠分解等重要方法用于研究其他类似问题提供了一个良好的思路。

参 考 文 献

[1] ALAVI Y,BEHZAD M,LESNIAK-FOSTER L M,et al. Total matchings and total coverings of graphs[J]. Journal of Graph Theory,1977,1(2):135-140.

[2] LAN J K,CHANG G J. On the mixed domination problem in graphs [J]. Theoretical Computer Science,2013,476(476):84-93.

[3] MANLOVE D F. On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics,1999,91(1-3):155-175.

[4] ALAVI Y,LIU J,WANG J,et al. On total covers of graphs[J]. Discrete Mathematics,1992,100(1-3):229-233.

[5] ZHAO Y,KANG L,SOHN M Y. The algorithmic complexity of mixed domination in graphs [J]. Theoretical Computer Science,2011,412(22):2387-2392.

[6] GAREY M R,JOHNSON D S. Computers and Intractability:A Guide to the Theory of NP-Completeness[M]. W. H. Freeman and Company,1979.

[7] BERTOSSI A A. Dominating sets for split and bipartite graphs [J]. Information Processing Letters,1984,19(1):37-40.

[8] PAPADIMITRIOU C H,STEIGLITZ K. Combinatorial optimization:algorithms and complexity[M]. Prentice Hall,1998.

[9] JOHNSON D S. Approximation algorithms for combinatorial problems[J]. Journal of Computer and System Sciences,1982,9(3):256-278.

[10] FUJITO T,NAGAMOCHI H. A 2-approximation algorithm for the minimum weight edge dominating set problem [J]. Discrete Applied Mathematics,2002,118(3):199-207.

[11] NEMHAUSER G L,JR L E Trotter. Properties of vertex packing and independence system polyhedra[J]. Mathematical Programming,1974,6(1):48-61.

[12] YANNAKAKIS M,GAVRIL F. Edge Dominating Sets in Graphs[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1980,38(3):364-372.

[13] NIEBERG T,HURINK J. A PTAS for the Minimum Dominating Set Problem in Unit Disk Graphs[M]// Approximation and Online Algorithms. Springer Berlin Heidelberg,2005:296-306.

[14] HEDETNIEMI S T,LASKAR R C. Bibliography on domination in graphs and some basic definitions of domination parameters [J]. Discrete Mathematics,1991,86(1):257-277.

[15] XIAO M,KLOKS T,POON S H. New parameterized algorithms for edge dominating set[J]. Theoretical Computer Science,2013,4(511):147-158.

[16] HATAMI P. An approximation algorithm for the total covering problem[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory,2007,27(3):553-558.

[17] RAZ R,SAFRA S. A sub-constant error-probability low-degree test,and a sub-constant error-probability PCP characterization of NP[C]// Proceedings of Twenty-Ninth ACM Symposium on Theory of Computing(STOC). ACM,1997:475-484.

(上接第 75 页)

参 考 文 献

[1] BAIER C,KATOEN J P. Principles of model checking[M]. Cam-bridge:The MIT Press,2008.

[2] LI Y M,DROSTE M,LEI L H. Model checking of linear-time properties in multi-valued system[J]. Information Sciences,2017,377:51-74.

[3] KHOUSSAINOV B,NERODE A. Automata Theory and its Applications[M]. Birkauser,2001.

[4] LI Y M,LI L J. Model checking of linear-time properties based on possibility measure [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems,2013,21(5):842-854.

[5] LI L,LI J. Model-checking of linear-time properties in possibilistic Kripkestructure[C]// Quanitative Logic and Soft Computing-the QI&SC. 2012:287-294.

[6] LI Y M. Two methods for Model-checking ofLTL[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition),2014,42(4):22-25.(in Chinese)
李永明. 可能 LTL 模型检测的两种方法[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版),2014,42(4):22-25.

[7] LI L J. Model checking of linear-time properti-es based on possibility measure [D]. Xi'an:Shaanxi Normal University,2012.(in Chinese)
李丽君. 基于可能性测度的 LTL 模型检测[D]. 西安:陕西师范大学,2012.

[8] EDMUND E,GRUMBERG O,PELED D. Model checking [M]. Cambridge:The MIT Press,1999.

[9] EVANGELISTA Y M,PRADAT-PEYRE J F. Memory Efficient State Space Storage in Explicit Software[C]// International Spin Workshop on Model Checking of Software. 2005:43-57.

[10] BARNAT J,BRIM L,ROCKAI P. Scalable multicore LTL model checking[M]// Model Checking Sofware. Springer Berlin Heidelberg,2007:187-203.

[11] HOU G,ZHOU K J,YONG J W,et al. Research overview of state explosion in the model checking[J]. Computer Science,2013,40(6A):77-86.(in Chinese)
候刚,周宽久,勇嘉伟,等. 模型检测中状态爆炸问题研究综述[J]. 计算机科学,2013,40(6A):77-86.

[12] JIANG Y X,LIN C,XING X J. Model checking of Petri net based on linear logic[J]. Journal of System Simulation,2003,15(21):6-10.(in Chinese)
蒋屹新,林闯,刑栩嘉. 基于线性逻辑的 Petri 网的模型检测[J]. 系统仿真学报,2003,15(21):6-10.

[13] BOURAHLA M. Distributed CTL model checking[J]. IEEE Proceedings Software,2005,152(6):297.

[14] LERDA F,SISTO R. Distributed-memory model checking with spin[C]// International Spin Workshops on Theoretical & Practical Aspects of Spin Model Checking. Spinger-Verlag,1999:22-39.

[15] BARNAT J,BRIM L,STŘÍBRNÁ J. Distributed LTL model-checking in SPIN[C]// Proceedings of the 8th International SPIN Workshop on Model Checkingof Software. 2001:200-216.