

# 基于零空间分析的张量局部 Fisher 判别方法

郑建炜 蒋一波 王万良

(浙江工业大学计算机学院 杭州 310023)

**摘要** 结合局部 Fisher 判别、张量子空间学习和零空间分析等技术的优点,提出了一种基于零空间分析的张量局部 Fisher 判别算法,其特点包括:i) 引入类间判别信息,对局部 Fisher 判别技术进行调整,提升了算法识别性能并且降低了计算时间复杂度;ii) 通过张量型降维思想对输入样本进行双边投影变换而非单边投影,获得了更高的信息压缩率;iii) 随着训练样本量的变化,可采用基于零空间分析的求解方法和传统的直接迭代更新计算方法。通过 ORL、Yale 和 ExYaleB 3 个人脸数据库验证了所提算法的性能。

**关键词** Fisher 判别分析,零空间,局部保持投影,张量子空间分析

中图分类号 TP391.41 文献标识码 A

## Tensor Local Fisher Discriminant with Null Space Analysis

ZHENG Jian-wei JIANG Yi-bo WANG Wan-liang

(School of Computer, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract** The tensor local fisher discriminant algorithm with null space analysis or NSTLFDA for short was proposed which incorporates the merits of three techniques, i. e., tensor based methods, local Fisher discriminant analysis, and null space analysis. The main features of our implementation include: (i) local Fisher discriminant analysis is improved by inter-class discriminant information for better recognition performance and reduces time complexity. ii) the tensor based method employs two-sided transformations rather than single-sided one, and yields higher compression ratio. iii) while TLFDA directly uses an iterative procedure to calculate the optimal solution of two transformation matrices, the NSTLFDA method takes the advantages of null space information when the training samples number is less than the dimensionality of the vector samples. The effectiveness of our new method was demonstrated by the ORL, Yale, and ExYaleB face databases.

**Keywords** Fisher discriminant analysis, Null space, Local preservation projection, Tensor subspace analysis

## 1 引言

有监督或无监督的子空间分析技术<sup>[1]</sup>已经广泛应用于机器视觉和模式识别等人工智能领域。在具体的应用如人脸识别中,2 维图像样本往往要先依行或依列连接成一个一维向量<sup>[2]</sup>,其维数很高,不仅包含大量的冗余信息,而且增加了后续处理的计算量,因此,对其进行降维操作,使之在保持数据类内紧凑性的同时获得更大的类间判别散度成为一种合理的特征预处理方法。主成分分析方法(Principal Component Analysis, PCA)<sup>[3]</sup>和线性 Fisher 判别(Linear Fisher Discriminant, LFD)<sup>[4]</sup>是两种应用最为广泛的向量型降维技术,PCA 属于无监督投影技术,并不适合于分类问题;而 LDA 通过数据类别信息,以类内散度最小和类间散度最大为目标进行最佳投影矩阵求解,分类效果较优。然而,PCA 和 LDA 仅能够揭示数据的全局欧氏结构,却无法对嵌入在高维数据中的低维子流形进行有效挖掘,并且在实际应用中,LDA 还经常遇到小样本问题<sup>[5]</sup>,即输入数据量远小于数据维度时的类内散

度矩阵奇异性问题。为提升算法性能并解决所存在的问题,已提出了不少基于 PCA 和 LDA 的改进型算法,包括基于概率的 PCA<sup>[6]</sup>、基于概率的 LDA<sup>[7]</sup>、几何均值子空间学习法<sup>[8]</sup>、共同判别矢量法<sup>[9]</sup>等等。

不同于上述向量型 PCA 和 LDA 算法,二维 PCA(2 Dimensional PCA, 2DPCA)<sup>[10]</sup>直接通过二维图像矩阵进行子空间特征的提取,省略了向量化过程。由于二维图像方差矩阵的规模远远小于传统的向量型方差矩阵,因此 2DPCA 的计算时间复杂度也远小于向量型 PCA。然而,2DPCA 更适合于数据表达而非数据分类。基于此,Li 和 Yuan<sup>[11]</sup>将矩阵数据引入传统 LDA 算法并指出了二维 LDA(2 Dimensional LDA, 2DLDA)。尽管有学者提出 2DLDA 并非具有绝对的优越性<sup>[12]</sup>,但一般情况下,它不仅具有较 LDA 更优的识别性能,同时其 2 维的类内散度矩阵往往是非奇异的,解决了小样本问题。2DPCA 和 2DLDA 的缺陷是只对原始图像数据进行依列或依行的单边降维变换,导致投影后的数据仍具有较多冗余的特征系数。近来,不少研究者提出了多边张量的子

到稿日期:2012-06-19 返修日期:2012-09-28 本文受国家自然科学基金(61070043),浙江省自然科学基金(LQ12F03011),浙江工业大学校自然科学基金(2011XY020)资助。

郑建炜(1982-),男,博士,讲师,主要研究方向为流形学习、模式识别,E-mail:zjw@zjut.edu.cn。

空间分析技术。Tao 等人<sup>[13]</sup>提出张量判别分析方法并将其应用于步态识别。Wang 等人<sup>[14]</sup>提出了双边 2DLFD (Bilateral 2DLFD, B2DLFD), 也可称之为张量 LFD (Tensor LFD, TLFD)。Qing 等人<sup>[15]</sup>采用 3 阶张量进行视频运动对象的跟踪。Wu 等人<sup>[16]</sup>则采用更高阶( $n$  阶)张量对通过 Gabor 分析后的语音信号进行特征提取操作。PCA、LDA 及其相应的 2D 或高阶张量扩展技术并不能对数据局部流形进行有效挖掘。He 等人<sup>[17]</sup>以在投影空间中尽量保持原高维数据的局部近邻分布结构为宗旨进行降维分析, 提出局部保持投影算法 (Locality Preserving Projection, LPP), 之后, 又通过张量技术将 LPP 扩展为张量子空间分析算法 (Tensor Subspace Analysis, TSA)<sup>[18]</sup>。此外, Yu<sup>[19]</sup>则将 LPP 扩展至 2DLPP, 其中直接通过矩阵图像数据进行样本局部结构的构建, 并且引入了类别信息来提升算法的判别能力。Yan 等人<sup>[20]</sup>通过引入谱图理论, 结合局部流形挖掘和类间判别思想, 构建了统一的数据降维框架, 提出了边缘 Fisher 分析算法 (Marginal Fisher Analysis, MFA) 并将之扩展为张量 MFA (Tensor MFA, TMFA)。在此框架下, 已提出了不少更新的子空间学习方法, 包括正交张量近邻保持嵌入方法<sup>[21]</sup>、正交局部 Spline 判别投影法<sup>[22]</sup>和流形弹性网算法<sup>[23]</sup>等等。而 Sugiyama<sup>[24]</sup>直接结合 LFD 和 LPP 的优点, 提出了局部 Fisher 判别分析 (Local Fisher Discriminant Analysis, LFDA), 它能够更好地适应具有多簇和类间交叉分布的数据。Zhang 等人<sup>[25]</sup>将 LFDA 进行直接张量化, 提出张量局部线性判别分析算法 (Tensor Locally Linear Discriminant Analysis, TLLDA), 进一步提升了性能。

在 Yan 等人<sup>[20]</sup>所提的子空间分析框架中, 向量型降维方法经常会遇到小样本问题, 使得目标泛函中的分母矩阵具有奇异性, 无法进行逆矩阵求取, 其常见的解决方法都采用矩阵正则化<sup>[26]</sup>等去除相应矩阵的零空间。然而实际上, 分母矩阵零空间中包含丰富的判别信息, 采用直接去除的方法并不合理, 直接 LDA 算法<sup>[27]</sup>和对偶 LDA 算法<sup>[28]</sup>都通过引入零空间思想进行最佳投影矩阵求解, 效果优于传统 LDA 方法。此外, Chu 和 Thye<sup>[29]</sup>基于零空间提出快速的 LDA 实现。Yang 等人<sup>[30]</sup>则利用零空间求解 LPP 算法并应用于人脸识别, 两者分别获得了识别速率和识别性能的提升。张量型算法包括 TLLDA 等, 它们能够自然地规避小样本问题, 但其实现过程需要采用迭代的双边投影矩阵更新操作, 都直接通过广义的特征分解技术进行算法求解, 最终的投影矩阵无法达到稳定解<sup>[31]</sup>。基于此, Xu 等人<sup>[31]</sup>结合向量型类内散度矩阵的零空间和张量型类间散度矩阵的秩空间提出了收敛的子空间分析方法, 从而在得到投影矩阵稳定解的同时也提升了算法判别性能。

基于上述讨论, 本文采用二阶张量子空间分析进行人脸识别应用, 首先调整了 TLLDA 算法的目标泛函和计算过程, 其称为张量局部 Fisher 判别分析算法 (Tensor Local Fisher Discriminant Analysis, TLFDA)。然后引入零空间分析技术进行算法求解, 提出零空间 TLFDA 算法 (Null Space TLFDA, NSTLFDA), 其优点包括: (a) 在保持类内散度矩阵结构的基础上, 通过样本均值矢量削减了 TLLDA 算法的计算量; (b) 通过克罗内克积求解 TLFDA, 计算过程更为清晰; (c) 根据训练样本数量的不同, 可选择 NSTLFDA 求解方法和直接迭代 TLFDA 求解方法, 提升了算法的适应能力。

本文第 2 节简述相关的 LFDA 算法和 TLLDA 算法; 第 3 节引出 TLFDA 算法, 并分别给出了直接 TLFDA 求解和 NSTLFDA 求解方法, 同时进行了复杂度分析; 第 4 节通过 ORL、Yale 和 EYaleB 3 个人脸图像库进行了算法最优参数选择和性能对比; 最后对本文的工作进行了总结并给出了后续工作展望。

## 2 相关工作

### 2.1 子空间判别分析简述

给定  $N$  个张量型表达的训练样本为:

$$X = \{X_1^1, X_2^1, \dots, X_{N_1}^1, X_1^2, X_2^2, \dots, X_{N_2}^2, \dots, X_1^C, X_2^C, \dots, X_{N_C}^C\} \quad (1)$$

式中,  $X_i^c \in R^{I_1 \times I_2}$  是第  $c$  类样本中第  $i$  个数据的表达形式, 样本类别总数为  $C$ ,  $N_c$  表示第  $c$  类训练样本数, 且存在  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_C$ 。相应的子空间投影即寻找最佳的变换矩阵  $U \in R^{I_1 \times L_1}$  和  $V \in R^{I_2 \times L_2}$ , 将原数据变换至:

$$Y_i = U^T X_i V \quad (2)$$

使得  $Y_i \in R^{L_1 \times L_2}$  具有最优的可识别能力, 其中  $L_1 < I_1$  和  $L_2 < I_2$  是子空间的数据维数。

在向量型降维分析中, 样本  $X_i^c$  首先需要展开为  $x_i \in R^{m \times 1}$ , 其中  $m = I_1 \times I_2$ , 相应的子空间变换即寻找最佳的变换矩阵  $U \in R^{m \times L_1}$ , 将原数据投影至:

$$Y_i = U^T X_i \quad (3)$$

使得  $Y_i \in R^{L_1 \times 1}$  具有最佳的分类效果。

### 2.2 局部 Fisher 判别分析

分别将局部类内和局部类间散度矩阵表达为  $S_w$  和  $S_b$ :

$$S_w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \tilde{w}_{ij}^w \|x_i - x_j\|^2 \quad (4)$$

$$S_b = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \tilde{w}_{ij}^b \|x_i - x_j\|^2 \quad (5)$$

式中,  $\|\cdot\|$  代表欧式范数,  $\tilde{w}_{ij}^w$  和  $\tilde{w}_{ij}^b$  分别为:

$$\tilde{w}_{ij}^w = \begin{cases} A_{ij}/N_c, & \text{if } c(x_i) = c(x_j) \\ 0, & \text{if } c(x_i) \neq c(x_j) \end{cases} \quad (6)$$

$$\tilde{w}_{ij}^b = \begin{cases} A_{ij}(1/N - 1/N_c), & \text{if } c(x_i) = c(x_j) \\ 1/N, & \text{if } c(x_i) \neq c(x_j) \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $A_{ij}$  表示样本  $x_i$  和  $x_j$  之间的相似度, 一般采用热核函数计算得到<sup>[24]</sup>。LFDA 最佳投影矩阵可通过式(8)计算得到:

$$U_{LFDA} = \operatorname{argmax}_{U \in R^{m \times L_1}} \left[ \frac{\operatorname{tr}(U^T S_b U)}{\operatorname{tr}(U^T S_w U)} \right] \quad (8)$$

LFDA 在继承 LFD 全局欧式判别能力的同时, 又融入了 LPP 局部流形保持思想, 获得了分类性能的提升, 并且能够更好地适应多种不同类型的训练样本, 包括多簇分布和具有类间交叉分布的各类数据。

### 2.3 张量局部线性判别分析

在 LFDA 的基础上, TLLDA 采用二阶张量进行样本表达, 其目标泛函描述为<sup>[25]</sup>:

$$\max_{U, V} \frac{\operatorname{tr} \left( \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^b \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2 \right)}{\operatorname{tr} \left( \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^w \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2 \right)} \quad (9)$$

式中,  $\|\cdot\|_F^2$  表示矩阵的  $F$  范数,  $w_{ij}^w$  和  $w_{ij}^b$  的表达形式分别是:

$$w_{ij}^w = \begin{cases} A_{ij}/\sqrt{N}, & \text{if } c(x_i) = c(x_j) \\ 0, & \text{if } c(x_i) \neq c(x_j) \end{cases} \quad (10)$$

$$w_{ij}^b = \begin{cases} 1/\sqrt{N}, & \text{if } c(x_i) \neq c(x_j) \\ A_{ij}(1/\sqrt{2N}-1/\sqrt{N}), & \text{else} \end{cases} \quad (11)$$

式(9)中的  $U$  和  $V$  都需要优化求解,两者互相关联,无法直接实现闭式求解。因此 TLLDA 采用与 TSA<sup>[18]</sup> 类似的迭代方式获取最优的投影矩阵。设定  $D^b$  和  $D^w$  是两个对角矩阵,其元素分别为  $D_{ij}^b = \sum_j w_{ij}^b$  和  $D_{ij}^w = \sum_j w_{ij}^w$ 。将式(9)写成两个公式<sup>[25]</sup>:

$$\max_U \frac{\text{tr}[U^T(D_{ij}^b - W_{ij}^b)U]}{\text{tr}[U^T(D_{ij}^w - W_{ij}^w)U]} \quad (12)$$

$$\max_V \frac{\text{tr}[V^T(D_{ij}^b - W_{ij}^b)V]}{\text{tr}[V^T(D_{ij}^w - W_{ij}^w)V]} \quad (13)$$

即分别在给定  $U$  或者  $V$  的前提下,迭代计算最佳投影矩阵  $U$  和  $V$ ,其中  $D_{ij}^b = \sum_i D_{ij}^b X_i V V^T X_i^T$ ,  $W_{ij}^b = \sum_{ij} w_{ij}^b X_i V V^T X_i^T$ ,  $D_{ij}^w = \sum_i D_{ij}^w X_i V V^T X_i^T$ ,  $W_{ij}^w = \sum_{ij} w_{ij}^w X_i V V^T X_i^T$ ,  $D_{ij}^b = \sum_i D_{ij}^b X_i U U^T X_i^T$ ,  $W_{ij}^b = \sum_{ij} w_{ij}^b X_i U U^T X_i^T$ ,  $D_{ij}^w = \sum_i D_{ij}^w X_i U U^T X_i^T$ ,  $W_{ij}^w = \sum_{ij} w_{ij}^w X_i U U^T X_i^T$ 。通过式(12)、式(13)可知,当给定  $V$  时,最优投影矩阵  $U$  可通过求解以下泛化特征值问题得到:

$$(D_{ij}^b - W_{ij}^b)u = \lambda(D_{ij}^w - W_{ij}^w)u \quad (14)$$

类似地,当给定  $U$  时,最优  $V$  矩阵的求解方式为:

$$(D_{ij}^b - W_{ij}^b)v = \lambda(D_{ij}^w - W_{ij}^w)v \quad (15)$$

### 3 张量局部 Fisher 判别分析

#### 3.1 问题描述

上节所述的 TLLDA 采用二阶张量数据表达优化了 LFDA 算法,能够保存更多的样本空间信息,性能较传统的 FDA 算法提升不少,但仍然存在不足之处。

1)从式(9)可见,经过调整后,TLLDA 需要计算  $2N$  次的矩阵相乘和相加操作。回顾 FDA 算法,其类内散度矩阵只需要  $N$  次叠加计算得到,由于大部分的  $w_{ij}^b$  值为零,因此其计算量并无明显增加。然而,FDA 的类间散度矩阵仅需  $C$  次叠加计算就能得到,其中  $C \ll 2N$ 。并且该矩阵不具有稀疏性,因此,随着训练样本数量的增加,TLLDA 的计算量将较 FDA 明显增加。

2)通过式(11)可见,TLLDA 仅引入了类内邻域相似度  $A_{ij}$ ,却未考虑类间数据的近邻权重,因此,算法性能仍有提升空间。

3)TLLDA 采用传统的迭代求解方法进行最优投影矩阵计算,其解具有不稳定性以及非收敛性。

针对上述几点,同时引入 2DLPP 的思想<sup>[19]</sup>,可将 TLLDA 中式(9)分子部分进一步调整为:

$$\sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|U^T \bar{X}_i V - U^T \bar{X}_j V\|_F^2 \quad (16)$$

即以各类数据的中心作为类间散度矩阵构建的基础,其加和次数仅为  $2C$ 。而且,不同类别的数据中心相似度也已通过  $A_{ij}$  进行反映。最终目标泛函由式(9)转变成:

$$\max_{U,V} \frac{\sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|U^T \bar{X}_i V - U^T \bar{X}_j V\|_F^2}{\sum_{i,j=1}^C w_{ij}^b \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2} \quad (17)$$

称之为张量局部 Fisher 判别分析。

#### 3.2 TLFDA 最佳投影矩阵求解

与 TLLDA 一致,最优投影矩阵  $U$  和  $V$  的求解仍需通过迭代操作。首先,在给定  $U$  的条件下,式(17)的分母部分可以化简为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^b \|U^T X_i V - U^T X_j V\|_F^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N w_{ij}^b \text{tr}(U^T X_i V - U^T X_j V)^T (U^T X_i V - U^T X_j V) \\ &= 2\text{tr}(V^T [P_{ij}^b (D^w \otimes I_{L_1}) P_{ij}^{bT} - P_{ij}^b (W \otimes I_{L_1}) P_{ij}^{bT}] V) \\ &= 2\text{tr}(V^T S_{ij}^b V) \end{aligned} \quad (18)$$

式中,符号  $\otimes$  代表矩阵克罗内克积, $W$  是由元素  $w_{ij}^b$  组成的样本近邻相似度矩阵,  $S_{ij}^b = P_{ij}^b [(D^w - W) \otimes I_{L_1}] P_{ij}^{bT}$ ,  $P_{ij}^b$  定义为:

$$P_{ij}^b = [(U^T X_1)^T, (U^T X_2)^T, \dots, (U^T X_N)^T] \quad (19)$$

类似地,式(17)的分子部分可以化简为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \|U^T \bar{X}_i V - U^T \bar{X}_j V\|_F^2 \\ &= 2\text{tr}(V^T P_{ij}^b [(B-A) \otimes I_{L_1}] P_{ij}^{bT} V) \\ &= 2\text{tr}(V^T S_{ij}^b V) \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $A$  是类别中心的近邻相似度矩阵,其元素由  $A_{ij}$  组成,  $P_{ij}^b$  和  $B$  分别定义为:

$$P_{ij}^b = [(U^T \bar{X}_1)^T, (U^T \bar{X}_2)^T, \dots, (U^T \bar{X}_C)^T] \quad (21)$$

$$B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^C A_{1i} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=1}^C A_{Ci} \end{bmatrix} \quad (22)$$

综合上述分析,当给定  $U$  时,式(17)可以转变为针对  $V$  的目标泛函:

$$\max_V \frac{\text{tr}(V^T S_{ij}^b V)}{\text{tr}(V^T S_{ij}^w V)} \quad (23)$$

其中, $V$  可依下式泛化特征值问题计算得到:

$$S_{ij}^b V = \lambda S_{ij}^w V \quad (24)$$

相应解  $V = [v_1, v_2, \dots, v_{L_2}]$  由式(24)求得的最大  $L_2$  个特征值相应的特征向量组成。

同理,在给定  $V$  的前提下,式(17)可转变为针对  $U$  的目标泛函:

$$\max_U \frac{\text{tr}(U^T S_{ij}^b U)}{\text{tr}(U^T S_{ij}^w U)} \quad (25)$$

式中,  $S_{ij}^w = P_{ij}^w [(D^b - W) \otimes I_{L_1}] P_{ij}^{wT}$ ,  $S_{ij}^b = P_{ij}^b [(B-A) \otimes I_{L_1}] P_{ij}^{bT}$ ,  $P_{ij}^w$  和  $P_{ij}^b$  分别定义为:

$$P_{ij}^w = [X_1 V, X_2 V, \dots, X_N V] \quad (26)$$

$$P_{ij}^b = [\bar{X}_1 V, \bar{X}_2 V, \dots, \bar{X}_C V] \quad (27)$$

式(25)的推导和求解过程基本与给定  $U$  为前提时一致。类似地, $U$  可通过求解如下泛化特征值问题获得:

$$S_{ij}^b U = \lambda S_{ij}^w U \quad (28)$$

综上所述,TLFDA 的最佳投影矩阵求解算法描述如表 1 所列。

表 1 TLFDA 算法描述

输入:带类别标签的 $N$ 个训练样本 $X$ ,子空间的维数 $L_1, L_2$ 以及最大迭代次数 $\text{Itr}_{\max}$ 。
输出:投影矩阵 $U$ 和 $V$ 。
TLFDA 算法:
初始化 $U$ 为单位矩阵,计算各类数据的平均向量,计算各类数据间的相似度矩阵 $A$ 和 $W$ ,以及相应的 $D$ 和 $B$ 。
For $t=1$ to $\text{Itr}_{\max}$
计算 $S_{ij}^b$ 和 $S_{ij}^w$ ,通过式(24)计算最佳的 $V$ 。
计算 $S_{ij}^b$ 和 $S_{ij}^w$ ,依式(28)计算最佳的 $U$ 。
End For

#### 3.3 NSTLFDA 最佳投影矩阵求解

与 TLFDA 的求解方法类似<sup>[13]</sup>,直接根据目标泛函式(24)

和式(28)两个广义特征分解式进行迭代操作并不能得到最终的闭合形式解,存在着解的收敛性问题<sup>[31]</sup>。基于此,NSTLFDA根据文献[31]的思想引入向量样本的零空间进行算法求解。首先寻找变换矩阵  $P_1$ ,将同类样本投影至同一子域,即将局部类内散度矩阵投影至零空间,然后最大化局部类间散度矩阵,使异类数据间隔最大化,以适合于模式分类。

在实际应用过程中,张量型降维算法中的类内散度矩阵往往不存在零空间<sup>[5]</sup>。因此,需要借助式(4)向量型  $S_w$  的零空间,即先将二维图像样本  $X_i$  转换成一维向量  $x_i$ ,再创建局部类内散度矩阵。考虑到一般情况下,全局散度矩阵  $S_t = S_b + S_w$  的秩是  $N-1$ ,可采用PCA计算  $P_1^t \in R^{m \times (N-1)}$ ,将向量样本转变为  $x_i^t \in R^{N-1}$ ,即去除  $S_b$  和  $S_w$  的公共零空间。基于  $x_i^t$ ,依式(9)计算  $(N-1) \times (N-1)$  的局部类内散度矩阵  $S_w^t$ ,相应的类内零空间投影矩阵计算公式为:

$$\text{tr}(P_1^{tT} S_w^t P_1^t) = 0 \quad (29)$$

式中,  $P_1^t$  由  $S_w^t$  矩阵零特征值相应的正交特征向量组成。至此,  $P_1 = P_1^t \times P_1^t$  计算完成。

通过上述  $P_1$ ,将任意训练样本  $x_i$  投影并重构为  $x_i^r$ ,即  $x_i^r = P_1 P_1^T x_i \in R^{m \times 1}$ 。由于  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,且  $P_1$  满足  $P_1^T P_1 = I$  是一个列正交矩阵,因此根据重构后样本计算所得的局部类内散度矩阵是一个零迹矩阵:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[ \sum_{i,j=1}^C w_{ij}^r (P_1 P_1^T x_i - P_1 P_1^T x_j)(P_1 P_1^T x_i - P_1 P_1^T x_j)^T \right] \\ = \text{tr} [P_1 P_1^T S_w P_1 P_1^T] = \text{tr} [P_1^T S_w P_1 P_1^T P_1] \\ = \text{tr} [P_1^T S_w P_1] = 0 \end{aligned}$$

同类样本统一投影至零空间后,即可进行类间散度最大化操作。首先将重构样本重组为2维矩阵表现形式  $X_i^r \in R^{1 \times I_2}$ 。然后构建类间散度最大目标泛函为:

$$\max \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \| U^T \bar{X}_i^r V - U^T \bar{X}_j^r V \|_F^2 \quad (30)$$

式中,  $\bar{X}_i^r$  是重构样本中第  $i$  类数据的均值。与式(16)类似,式(30)并不存在闭合形式解,仍需采用迭代更新操作,即在给定  $V$  时,根据重构后的2维样本,依式(20)构建  $S_w^r$ ,最优  $U$  投影矩阵即由  $S_w^r$  最大  $L_1$  个特征值所对应的特征向量组成。类似地,在给定  $U$  时,则构建相应的  $S_b^r$ ,最优  $V$  投影矩阵即由  $S_b^r$  中最大  $L_2$  个特征值所对应的特征向量组成。

针对上述求解过程,如果定义  $h(U_t, V_t) = 1 / \sum_{i,j=1}^C A_{ij} \| U_t^T \bar{X}_i^r V_t - U_t^T \bar{X}_j^r V_t \|_F^2$ ,其中  $t$  是迭代次数,在式(30)的迭代计算过程中,  $h(U_t, V_t)$  是非增的:

$$h(U_t, V_t) \geq h(U_{t+1}, V_t) \geq h(U_t, V_{t+1}) \quad (31)$$

表2 NSTLFDA 算法描述

输入:与表1算法一致。
输出:投影矩阵 $P_1$ , $U$ 和 $V$ 。
NSTLFDA 算法:
1) 将训练样本 $X_i$ 转换成 $x_i$ ,通过PCA计算 $P_1^t \in R^{m \times (N-1)}$ 并将 $x_i$ 投影成 $x_i^t \in R^{N-1}$ ;
2) 依式(29)计算得到 $P_1^t$ ,则 $P_1 = P_1^t \times P_1^t$ ;
3) 对所有样本进行重构 $x_i^r = P_1 P_1^T x_i$ ,然后表达成矩阵形式 $X_i^r \in R^{1 \times I_2}$ ;
4) 初始化 $U$ 和 $V$ 为单位矩阵;
5) For $t=1$ to $I_{\text{trmax}}$
计算 $S_w^r$ ,求得其最大 $L_2$ 个特征值对应的特征向量得到 $V_{t+1}$ 。
计算 $S_b^r$ ,求得其最大 $L_1$ 个特征值对应的特征向量得到 $U_{t+1}$ 。
End For

又由于  $h(U_t, V_t) \geq 0$ ,因此 NSTLFDA 能够达到稳定的局部最优解。表2是 NSTLFDA 的算法描述。值得注意的

是,在一些具体应用场合中,训练样本量较大,满足  $N > m$ ,则式(29)的零空间并不一定存在,此时 NSTLFDA 退化为 TLFDA(算法描述见表1)。

### 3.4 特征提取及分类

根据 TLFDA 和 NSTLFDA 两种不同求解方法,在实际应用中,当  $N > m$  时,采用表1算法求得  $U$  和  $V$ ,将任意原输入样本依式(3)投影至子空间,如输入测试样本为  $X_{\text{test}}$ ,其对应的投影空间数据为  $Y_{\text{test}} = U^T X_{\text{test}} V$ 。采用最近邻法进行最后的数据类别判定,其中的相似性测度采用欧式距离:

$$d(Y_{\text{test}}, Y_i^c) = \| Y_{\text{test}} - Y_i^c \|_F^2 \quad (32)$$

如果  $Y_{\text{test}}$  与  $Y_i^c$  之间的距离为最小,则  $X_{\text{test}}$  的类别被判定为  $c$ 。

当  $N < m$  时,依表2求得  $P_1$ ,  $U$  和  $V$ ,将所有训练样本重构后投影到子空间,对于任意测试样本  $X_{\text{test}}$ ,先进行重构得到  $X_{\text{test}}^r = P_1 P_1^T X_{\text{test}}$ ,然后进行投影操作,并依式(32)进行类别判断。

### 3.5 时间复杂度分析

张量型算法需要进行迭代求解,每一次迭代中,TLFDA 计算  $S_b^t, S_w^t, S_b^r$  和  $S_w^r$  分别消耗  $O\{C^2 L_1^2 (I_1 + 1)\}, O\{N^2 L_1^2 (I_1 + 1)\}, O\{C^2 L_2^2 (I_2 + 1)\}$  和  $O\{N^2 L_2^2 (I_2 + 1)\}$  的时间复杂度,而两次特征分解分别需要用时  $O(I_1^3)$  和  $O(I_2^3)$ 。如果统一将  $L_1, L_2, I_1, I_2$  表达为  $I$ ,则 TLFDA 的完整时间复杂度可以表达为  $O\{I \text{tr}_{\text{max}}(C^2 + N^2) I^3\}$ 。

当训练样本数  $N > m$  时, NSTLFDA 算法与 TLFDA 完全一致。当  $N < m$  时, NSTLFDA 也要计算与 TLFDA 相同的  $S_b^t$  和  $S_w^t$ 。此外,对比 TLFDA, NSTLFDA 的额外运算量包括:生成  $P_1^t$  和  $P_1^t$  分别需要  $O(N^3)$  和  $O\{(N-1)^3\}$  的时间复杂度,对训练样本  $X$  进行重构时需要  $O\{m(N-1)(C-1) + m^2(N+C-1)\}$  的计算量,总计为  $O\{2N^3 + m(N-1)(C-1) + m^2(N+C-1)\}$ 。由于 NSTLFDA 并不需要计算  $S_w^r$  和  $S_b^r$ ,因此其总体计算量与 TLFDA 较为接近。

LFDA 计算  $S_w$  和  $S_b$  需要  $O(m^2 N)$  的时间复杂度,特征分解则需要  $O(m^3)$  的计算用时,因此最终的时间复杂度为  $O\{m^2(N+m)\}$ 。虽然 LFDA 不需要通过迭代操作进行最优矩阵求解,但由于  $m = I_1 \times I_2$ ,并且当应用于人脸识别时,  $N < m$  是一个普遍存在的现象(小样本问题),因此,一般来说 LFDA 的计算用时要多于 TLFDA。

## 4 实验与分析

### 4.1 数据集和实验配置

分别采用 ORL、Yale 和 ExYaleB 3 个典型的人脸数据库验证本文所提张量投影算法的性能。

ORL 数据库(<http://www.cam-orl.co.uk>)共包括40人各10张灰度人脸图像,根据眼睛的距离进行图像配准,使所有样本图像的左眼中心和右眼中心重合。图1是 ORL 人脸库的部分人脸样例。



图1 ORL 人脸库部分样本示例

Yale人脸数据库(<http://cvc.yale.edu/projects/yalefaces>)包含15人共165幅脸部图像,每人11幅。所有图像取自于不同光照条件,且包含正常、愉悦、悲伤、困倦、惊讶和眨眼等不同表情。图2是Yale数据库中的部分样例图。



图2 Yale人脸库部分样本示例

ExYaleB人脸数据库包含38人的21888张图像,其中包括9个姿态和64个光照变化。本文抽取其中2500幅正面、光照各异的图像用于测试,其图像样例如图3所示。



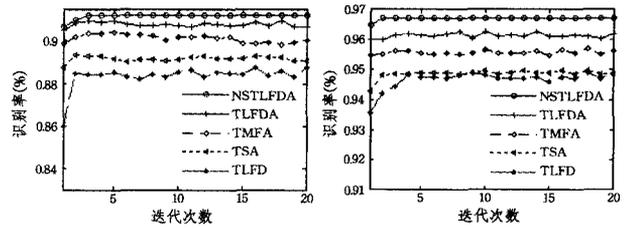
图3 ExYaleB人脸库部分样本示例

上述所有人脸数据库的图像都统一调整至 $32 \times 32$ 像素,每像素的灰度值在 $0 \sim 255$ 之间。为验证算法性能,每个数据库都分为不同的训练集和测试集,并以 $xtrain$ 为标记,表示随机选取 $x$ 张图像用于训练过程,余下的作为测试样本。在具体实验过程中,本文同时实现了NSTLFDA、TLFDA、TSA、TLFD、TMFA以及它们各自的向量型版本LFDA、LPP、LFD和MFA的对比测试。实验中热核函数的参数取所有训练样本间距离的平均值。TMFA与MFA需要构建类内近邻图和类间近邻图,实验中采用的类内近邻数为 $\min(5, wmc)$ ,类间近邻数为 $\min(400, bmc)$ ,其中 $wmc$ 和 $bmc$ 分别为同类训练总数和异类训练总数。TSA和LPP也需要通过 $k$ 近邻算法构建局部邻域图,实验中采用的近邻数为 $\min(10, wmc)$ 。所有实验均在一台Intel Core2 CPU 1.8GHz的PC机上进行,操作系统为Windows XP,各算法都采用Matlab7.1实现。所有的结果都通过20次同类数据实验并取平均值获得。

#### 4.2 最佳迭代次数选择

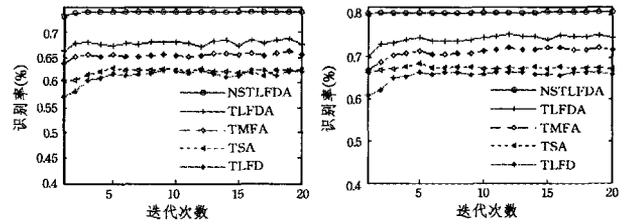
张量型数据降维算法包括NSTLFDA、TLFDA、TSA、TLFD和TMFA,它们都需要对 $U$ 和 $V$ 进行迭代更新操作以获得最佳的投影结果。算法具体应用前需要确认最佳的迭代次数,在获得理想效果的同时又不至于耗费过多的计算量。图4是不同迭代次数下ORL库中3train和5train的识别率结果,其中子空间维数为 $L_1=L_2=10$ 。图5是Yale中4train和6train的迭代效果,低维维数为 $L_1=L_2=7$ 。类似地,图6是ExYaleB人脸库在10train和20train两种实验方式中不同迭代次数下的识别率变化,子空间维数为 $L_1=L_2=20$ 。在ORL和ExYaleB中,各算法基本都在3次迭代后达到了近似最优的识别效果,而在Yale中,各算法基本在5次迭代之后达到识别率近似最优。可见,各种张量型数据降维算法都不需要过多的迭代次数就可获得近似最优的识别结果。需要注意的是,随着迭代次数的增加,TLFDA、TMFA、TSA、TLFD都不能达到真正的稳定解,识别率曲线存在着不同程度的波动,而NSTLFDA则在 $2 \sim 3$ 次迭代过程后能够达到稳定的识别率结果。通过观察发现,各算法在10次迭代时都能达到

相对较优的识别率,因此在后续实验中,如无特别声明,NSTLFDA采用3次迭代进行求解,而其它各张量型算法统一采用10次迭代进行求解。



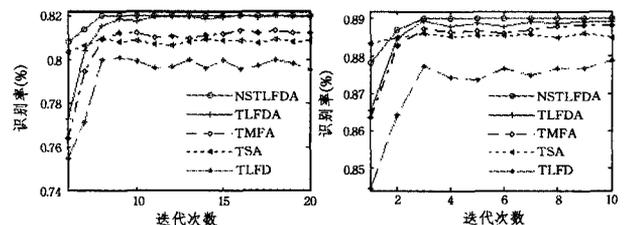
(a) 3train (b) 5train

图4 ORL人脸库中不同迭代次数下的识别率变化



(a) 4train (b) 6train

图5 Yale人脸库中不同迭代次数下的识别率变化



(a) 10train (b) 20train

图6 ExYaleB人脸库中不同迭代次数下的识别率变化

#### 4.3 最优投影维度分析

针对不同人脸数据集,各种投影算法的最佳子空间维数是不确定的。本节主要分析在ORL、Yale和ExYaleB中,5种张量型算法和相应向量型算法的最佳低维维数选择。图7是不同维数选取下,ORL 3train和5train的相应子空间维数选择效果。图8是Yale 4train和Yale 6train的实验结果。图9则是ExYaleB的10train和20train相应维数识别率。表3是所有算法在3个人脸库中的最佳识别率和相应子空间维数。与向量型算法不同,张量型算法将数据降至 $L_1 \times L_2$ 。为方便实验操作,本文采用 $L_1=L_2$ 的实验策略,并在图中统一表达为 $L$ 。此外,考虑到张量型算法和向量型算法的子空间维数跨度差异较大,本文将两类算法的实验结果分开表示,其中张量型算法图以 $T$ 前缀标注,而向量型算法图以 $V$ 前缀标注。

从图7—图9可见,NSTLFDA算法在投影维数达到 $L_1=L_2=8$ 后,识别率曲线即进入稳定的近似最优状态,而其它几种张量型算法依子空间维数变化的识别率则近似呈抛物线状,这主要是由于TLFDA、TMFA、TSA和TLFD都没有考虑零空间信息,当子空间维数进一步增加时,投影数据中冗余信息量增加,致使判别能力减弱。在向量型算法中,由于 $I_1 \times I_2 \gg L_1$ ,因此其识别率曲线后段也基本呈稳定状态。此外,在最佳降维维数选择方面,张量型算法的投影跨度是 $[1, 32]$ ,远远小于向量型算法的 $[1, 1024]$ 。因此其子空间维数更易确定。

表 3 各种投影算法在 ORL、Yale 和 ExYaleB 人脸库中取得的最佳识别率及相应维度

Algorithm	ORL 3train	ORL 5train	Yale 4train	Yale 6train	ExYaleB 10train	ExYaleB 20train
NSTLFDA	0.9171(7)	0.9705(8)	0.7457(20)	0.8173(30)	0.8398(23)	0.8966(24)
TLFDA	0.9149(10)	0.9655(9)	0.6824(10)	0.7490(9)	0.8334(18)	0.8934(18)
LFDA	0.8864(78)	0.9625(54)	0.7440(26)	0.8130(40)	0.7971(118)	0.8597(114)
TMFA	0.9057(13)	0.9580(9)	0.6570(9)	0.7290(9)	0.8270(18)	0.8911(18)
MFA	0.8396(74)	0.9125(80)	0.6829(50)	0.7547(58)	0.7611(120)	0.8510(118)
TSA	0.8976(9)	0.9520(12)	0.6395(6)	0.6927(8)	0.8183(14)	0.8854(16)
LPP	0.6173(60)	0.7065(59)	0.6157(59)	0.6712(59)	0.4800(120)	0.6195(120)
TLFD	0.8900(12)	0.9455(9)	0.6281(7)	0.6820(6)	0.8035(13)	0.8724(14)
LFD	0.8063(39)	0.9155(39)	0.7229(14)	0.7880(14)	0.7503(37)	0.8279(37)

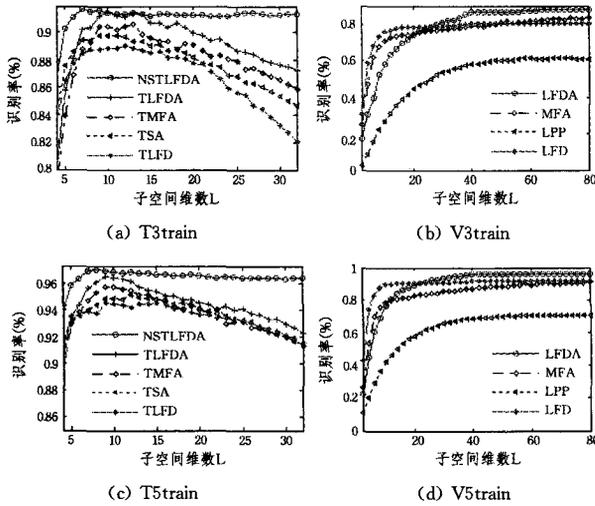


图 7 ORL 人脸库中不同子空间维数下的识别率变化

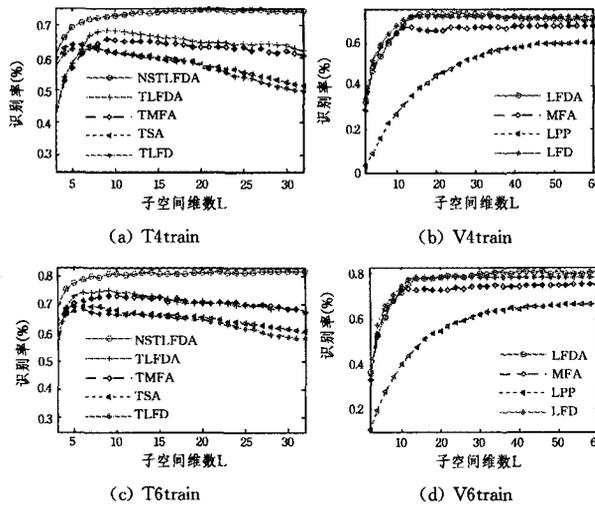


图 8 Yale 人脸库中不同子空间维数下的识别率变化

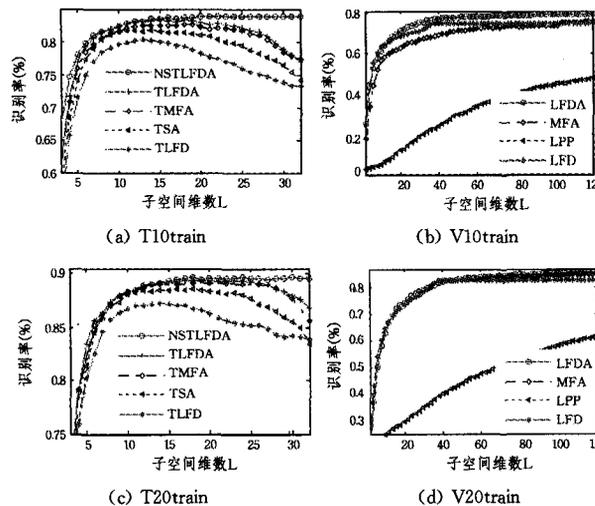


图 9 ExYaleB 人脸库中不同子空间维数下的识别率变化

#### 4.4 算法求解效率分析

本节主要将 NSTLFDA 与 TLFDA、TSA 和 LFDA 进行算法求解效率对比, TSA 的时间复杂度是  $O(Itr\_max[I_1^2 + I_2^2 + N^2(I_1 \times I_2)^{3/2}])$ <sup>[34]</sup>, 每次迭代都需要计算  $D_V, W_V, D_U$  和  $W_U$  4 个矩阵, 分别需要  $O(NL_1 I_1^2)$ 、 $O(N^2 L_1 I_1^2)$ 、 $O(NL_2 I_2^2)$  和  $O(N^2 L_2 I_2^2)$  的时间复杂度。在实际应用过程中, 往往满足  $N \gg C, I_1 > L_1$  且  $I_2 > L_2$ 。因此, TSA 的计算代价高于 TLFDA。图 10—图 12 分别是 4 种算法在 ORL、Yale 和 ExYaleB 中的求解时间对比。为公平起见, 所有实验都在相似的识别率前提下进行, 且不同张量型算法的子空间维数和迭代次数需要一致。依据上节实验结果, 在 ORL 和 Yale 数据库中, 子空间维数统一选为  $L_1 = L_2 = 6$  时几种算法的识别率最为接近, 而 ExYaleB 的子空间维数确定为 8, 迭代次数统一为 10。LFDA 的计算量主要是由原训练数据维数决定, 子空间维数并非决定因素, 实验中选择使识别率近似最优的  $L_1 = 100$ 。

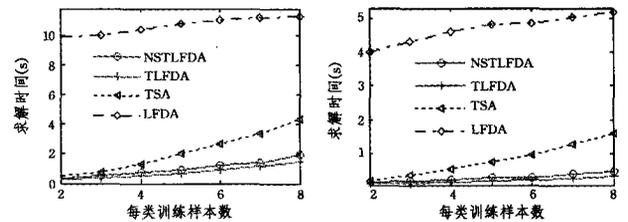


图 10 NSTLFDA, TLFDA, TSA 和 LFDA 在 ORL 人脸库中的求解时间对比

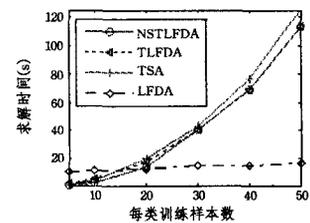


图 11 NSTLFDA, TLFDA, TSA 和 LFDA 在 Yale 人脸库中的求解时间对比

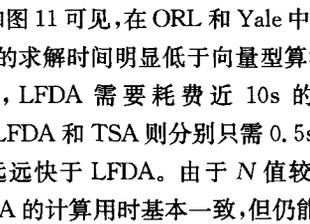


图 12 NSTLFDA, TLFDA, TSA 和 LFDA 在 ExYaleB 人脸库中的求解时间对比

从图 10 和图 11 可见, 在 ORL 和 Yale 中, 由于  $N \ll m$ , 因此张量型算法的求解时间明显低于向量型算法, 其中在 ORL 3train 实验中, LFDA 需要耗费近 10s 的求解时间, 而 NSTLFDA、TLFDA 和 TSA 则分别只需 0.5s、0.37s 和 0.77s 的计算用时, 远远快于 LFDA。由于  $N$  值较小, NSTLFDA、TLFDA 和 TSA 的计算用时基本一致, 但仍能看出 TSA 需要花费更多的求解时间。在 Yale 6train 实验中, NSTLFDA 的求解用时为 0.27s, 而 TSA 则需要 0.95 的计算用时, 接近于 TLFDA 的 4 倍。NSTLFDA 与 TLFDA 的求解时间非常接近, 尤其是在 Yale 实验中, 两者基本达到一致, 从具体数值来看, NSTLFDA 的计算用时更高, 在 Yale 6train 实验中, TLF-

DA的求解时间仅需0.23s。如果进一步考虑算法收敛性,通过4.2节的迭代实验可知,NSTLFDA在3次迭代后即进入稳定阶段,本实验中的后续7次迭代过程完全是冗余操作,而TLFDA并没有稳定解,需要更多次迭代来达到近似稳定的算法性能。

从图12可见,在ExYaleB中,随着训练数据量的增加, $N$ 接近甚至高于 $m$ 值。相应地,张量型算法的计算用时也接近甚至高于向量型算法。在张量型算法中,未达到30train训练样本时,NSTLFDA的求解时间最短。之后,由于 $N=1140 > m=1024$ ,NSTLFDA退化为TLFDA,相应的求解时间当然也与TLFDA一致。由于LFDA的计算耗时主要受输入数据维数的影响,受训练样本量的影响较小,因此其数值基本在13s左右。由于人脸识别中 $N > m$ 的情形较少,且NSTLFDA能够在更少次迭代次数内达到稳定解,因此,综上所述,NSTLFDA具有更高的算法求解性能。

#### 4.5 各类降维算法性能对比

本节将NSTLFDA、TLFDA、LFDA、TMFA、MFA、TSA、LPP、TLFD和LFD进行综合的识别性能对比,各算法的子空间维数通过对表3相应数据取均值并向上取整确定,例如TSA算法在ORL 3train中和5train中的最佳子空间维数分别为9和12,则本节实验中具体取值为 $L_1=L_2=11$ 。表4—表6给出了具体的识别率数值对比,加粗部分是最高识别率值。

从表4可见,在ORL人脸库实验结果中,NSTLFDA达到了最高的识别率,反映了零空间信息对判别结果的重要性。

表4 各种投影算法在ORL人脸库中不同训练样本数下的识别率对比

Samples	NSTLFDA	TLFDA	LFDA	TMFA	MFA	TSA	LPP	TLFD	LFD
2train	<b>0.8441</b>	0.7594	0.8031	0.7593	0.7391	0.7972	0.5546	0.8053	0.6200
3train	<b>0.9164</b>	0.9101	0.8814	0.9019	0.8364	0.8935	0.6163	0.8879	0.6994
4train	<b>0.9525</b>	0.9450	0.9363	0.9367	0.8967	0.9237	0.6670	0.9304	0.7863
5train	<b>0.9700</b>	0.9640	0.9600	0.9540	0.9125	0.9500	0.7055	0.9435	0.8086
6train	<b>0.9733</b>	0.9730	0.9700	0.9656	0.9350	0.9575	0.7606	0.9600	0.8176
7train	<b>0.9781</b>	0.9742	0.9702	0.9642	0.9333	0.9542	0.7733	0.9567	0.8312
8train	<b>0.9862</b>	0.9812	0.9775	0.9861	0.9437	0.9775	0.7700	0.9738	0.8431

在表6 ExYaleB实验结果中,NSTLFDA和LPP在所有算法中的识别率排位与上述实验一致。此外,各类向量型算

表5 各种投影算法在Yale人脸库中不同训练样本数下的识别率对比

Samples	NSTLFDA	TLFDA	LFDA	TMFA	MFA	TSA	LPP	TLFD	LFD
2train	<b>0.5407</b>	0.4104	0.5340	0.3993	0.4496	0.4563	0.4546	0.4289	0.5319
3train	<b>0.6658</b>	0.5817	0.6258	0.5633	0.6050	0.5742	0.5063	0.5442	0.6525
4train	<b>0.7450</b>	0.6824	0.7440	0.6570	0.6827	0.6390	0.6157	0.6281	0.7229
5train	<b>0.7856</b>	0.7256	0.7689	0.6867	0.6970	0.6600	0.6355	0.6500	0.7511
6train	<b>0.8167</b>	0.7480	0.8130	0.7290	0.7140	0.6927	0.6712	0.6813	0.7880
7train	<b>0.8300</b>	0.7817	0.8250	0.7600	0.7400	0.7200	0.6833	0.7030	0.7967
8train	<b>0.8556</b>	0.8400	0.8444	0.7800	0.7567	0.7489	0.6900	0.7234	0.8344

表6 各种投影算法在ExYaleB人脸库中不同训练样本数下的识别率对比

Samples	NSTLFDA	TLFDA	LFDA	TMFA	MFA	TSA	LPP	TLFD	LFD
5train	<b>0.7521</b>	0.7321	0.6528	0.7180	0.6134	0.7059	0.4014	0.6743	0.6665
10train	<b>0.8398</b>	0.8334	0.7970	0.8270	0.7601	0.8183	0.4879	0.8030	0.7503
20train	<b>0.8966</b>	0.8934	0.8544	0.8911	0.8463	0.8814	0.6180	0.8724	0.8279
30train	<b>0.9108</b>	<b>0.9108</b>	0.8598	0.9088	0.8499	0.9009	0.6370	0.8923	0.8391
40train	<b>0.9306</b>	<b>0.9306</b>	0.8570	0.9287	0.8500	0.9187	0.6530	0.9169	0.8436
50train	<b>0.9422</b>	<b>0.9422</b>	0.8663	0.9331	0.8510	0.9301	0.6665	0.9233	0.8500

#### 4.6 综合分析

鉴于上述一系列实验过程,强调如下几点:

在所有结果中,张量型算法都较相应的向量型算法效果更优,其中TLFD在不同训练数时识别率都较LFD高10%以上,说明张量型算法中空间信息保持对识别效果是有益的。除NSTLFDA外,TLFDA具有最高的识别率,而TMFA的识别性能与TLFDA最为接近,两者都兼顾考虑了数据分布的类内近邻和类间近邻结构。TSA虽然考虑了全局散度最大化,但其近邻保持过程中并未引入类别信息,而LFD虽然充分考虑了数据类别信息,却忽略了样本近邻结构,导致TSA和TLFD两者较上述TLFDA和TMFA两种算法性能略差。所有算法中,性能最差的是LPP降维技术,其在训练数据量较为充裕的8train实验中也只达到了77%的识别率,验证了类别信息对判别性能的重要性。值得注意的是,在2train实验中,TLFD的识别率达到了第二高的80.5%,这主要是由于TLFDA、TMFA和TSA都需要类内近邻结构进行最终目标泛函的构建,而每类两个样本用于训练时,近邻数据过少,不足以反映真实的数据类内分布特性。

从表5可见,在Yale数据库实验中,NSTLFDA算法仍然具有最高的识别结果。然而,除NSTLFDA和TSA外,其它张量型算法的识别率都不如相应的向量型算法,例如在3train实验中,TLFDA的识别率为58.2%,低于LFDA的62.6%。这主要是由于Yale数据库中的同类人脸图像受光照和表情的影响,差异性较ORL和ExYaleB更大,通过张量图像表达在保留更多空间信息的同时也保存了更多的类内差异性信息,导致识别结果不升反降。而LPP由于缺少类别信息,其综合识别率仍然低于其它各算法。

法较所有的张量型算法识别率更低,再一次验证了张量型数据表达、零空间信息以及类别信息对判别性能的重要性。

1)张量型数据降维算法都需要经过迭代训练过程获取最优投影矩阵。在具体求解过程中,NSTLFDA引入零空间思

想,能够获得稳定的识别率结果,而其它张量型算法在多次迭代后仍无法达到最终的稳定解,说明了零空间信息的重要性。

2) NSTLFD 和 TLFDA 的求解过程较 LFDA 和 TSA 更为高效,尤其是 LFDA,其主要计算量用于维数矩阵的特征分解,导致在小训练样本时也需要更高的计算负担。

3) 一般情况下,对比向量型算法,张量型算法具有更高的识别性能、更小的计算量以及更易选择的子空间维数。然而,当数据类内分布具有较大的空间差异性时,张量型算法的效果反而逊于向量型算法。

4) 由于缺少类别信息, LPP 并不适合于分类识别任务。虽然 TSA 的分子目标泛函并未考虑类别信息,但其分母目标泛函却用于最大化全局散度。因此 TSA 的识别性能较 LPP 有质的提升,说明了类别信息和类间离散度在面向分类的子空间降维技术中的重要性。

**结束语** 结合 LFDA 和 TSA 两种经典子空间降维技术的优势,本文提出了张量的局部 Fisher 判别分析(TLFD)。依据 TSA, TLFDA 采用张量降维技术,即对原输入数据进行双边降维变换,而非单边降维变换。依据 LFDA, TLFDA 以类间散度最大和类内散度最小为目标,同时考虑同类和异类数据的近邻结构,并将各类中心代替各数据进行类间散度最大化,以减少计算量。引入零空间思想,对 TLFDA 的求解方法进行改进,提出了 NSTLFD,它可以得到更优的稳定解以及更少的迭代次数。通过理论分析, NSTLFD 和 TLFDA 较 TSA 以及 LFDA 具有更低的计算时间复杂度。在 ORL、Yale 和 ExYaleB 3 组人脸库实验结果中显示了张量局部 Fisher 判别分析技术及相应零空间分析的有效性。

后续工作将重点围绕 TLFDA 可挖掘的潜力。首先, NSTLFD 求解过程计算量主要依赖于训练样本数量  $N$ , 期望能够通过增量式求解策略进行改进。其次,本文 TLFDA 主要采用二阶张量,有必要进行更高阶的扩展,使得算法能够满足于更多任务需求。

## 参考文献

- [1] 陈诗国,张道强. 半监督降维方法的实验比较[J]. 软件学报, 2011, 22(1): 28-43
- [2] Li H S, Hao J, Barrio R, et al. Incremental manifold learning by spectral embedding methods[J]. Pattern Recognition Letters, 2011, 32(10): 1447-1455
- [3] 吴枫,仲妍,吴泉源. 基于增量核主成分分析的数据流在线分类框架[J]. 自动化学报, 2010, 36(4): 534-542
- [4] Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711-720
- [5] Lai Z H, Wan M H, Jin Z, et al. Sparse two-dimensional local discriminant projections for feature extraction[J]. Neurocomputing, 2011, 74(4): 629-637
- [6] Archambeau C, Delannay N, Verleysen M. Mixtures of robust probabilistic principal component analyzers[J]. Neurocomputing, 2008, 71(7-9): 1274-1282
- [7] Ioffe S. Probabilistic linear discriminant analysis[C]//Proceeding of the 9th European Conference on Computer Vision. Graz, Austria, 2006: 531-542
- [8] Tao D, Li X, Wu X, et al. Geometric mean for subspace selection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 260-274
- [9] Cevikalp M, Neamtu M, Barkana W A. Discriminative common vectors for face recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(1): 4-13
- [10] Yang J, Zhang D, Frangi A F, et al. Two-dimensional PCA: a new approach to appearance-based face representation and recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(1): 131-137
- [11] Li M, Yuan B. 2D-LDA: a statistical linear discriminant analysis for image matrix[J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(5): 527-532
- [12] Zheng W S, Lai J H, Li S Z. 1D-LDA vs. 2D-LDA: When is vector-based linear discriminant analysis better than matrix-based [J]. Pattern Recognition, 2008, 41(7): 2156-2172
- [13] Tao D C, Li X L, Wu X D, et al. General tensor discriminant analysis and gabor features for gait recognition[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(10): 1700-1715
- [14] Wang J G, Sung E, Yau W Y. Incremental two-dimensional linear discriminant analysis with applications to face recognition[J]. Network and Computer Applications, 2010, 33(1): 314-322
- [15] Wang Q, Chen F, Xu W L. Tracking by third-order tensor representation[J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2011, 41(2): 385-396
- [16] Wu Q, Zhang L Q, Shi G C. Robust multifactor speech feature extraction based on Gabor analysis[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2011, 19(4): 927-936
- [17] He X F, Yan S C, Hu Y X, et al. Face recognition using Laplacianfaces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328-340
- [18] He X F, Cai D, Niyogi P. Tensor subspace analysis[C]// Advances in Neural Information Processing Systems. MIT Press, 2005: 499-507
- [19] Yu W. Two-dimensional discriminant locality preserving projections for face recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2009, 30(15): 1378-1383
- [20] Yan S C, Xu D, Zhang B Y, et al. Graph embedding and extensions: a general framework for dimensionality reduction [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(1): 40-51
- [21] Liu S, Ruan Q. Orthogonal tensor neighborhood preserving embedding for facial expression recognition [J]. Pattern Recognition, 2011, 44(7): 1497-1513
- [22] Lei Y K, Ding Z G, Hu R X, et al. Orthogonal local spline discriminant projection with application to face recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2011, 32(4): 615-625
- [23] Zhou T Y, Tao D C, Wu X D. Manifold elastic net: a unified framework for sparse dimension reduction[J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 2010, 22(3): 340-371
- [24] Sugiyama M. Dimensionality reduction of multimodal labeled data by local Fisher discriminant analysis[J]. Journal of Machine Learning Research, 2007, 8(1): 1027-1061
- [25] Zhang Z, Chow W S. Tensor locally linear discriminative analysis [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(11): 643-646

$$e_{jp}^{(k+1)} = e_{jp}^{(k)} + 2^{-k} d^{(k)} e_{jq}^{(k)}, j=1,2,3 \quad (11)$$

$$e_{jq}^{(k+1)} = e_{jq}^{(k)} + 2^{-k} d^{(k)} e_{jp}^{(k)}, j=1,2,3 \quad (12)$$

结合图 3 所示的 FFU 内部结构图, FFU 工作过程如下:

1) 数据控制器把数据存入 FFU 对应的位置  $a_{pp}^{(k)}, a_{pq}^{(k)}, a_{qp}^{(k)}, a_{qq}^{(k)}$  4 个寄存器,  $d^{(k)}$  即是由  $a_{pq}^{(k)}$  的符号位引出。设置  $cnt=0$ ; 并启动 FFU。

2) 在 FFU 的控制下数据按照算法的要求流经不同的函数模块, 并把得到的计算结果进行累加, 分别计算  $a_{pp}^{(k+1)}, a_{pq}^{(k+1)}, a_{qp}^{(k+1)}, a_{qq}^{(k+1)}$ 。

3) 更新。令  $a_{pp}^{(k)} = a_{pp}^{(k+1)}, a_{pq}^{(k)} = a_{pq}^{(k+1)}, a_{qp}^{(k)} = a_{qp}^{(k+1)}, a_{qq}^{(k)} = a_{qq}^{(k+1)}, cnt = cnt + 1$ 。

4) 如果  $cnt=64$ , 计算结束, 否则转到 2)。

VFU 和 SFU 的结构和计算过程类似, 这里不再赘述。

## 4 硬件实现与测试

整个设计采用 Verilog 语言描述, 在 Xilinx 的 xc3sd1800a-5 cs484 FPGA 上进行了实现。为验证系统的正确性, 同时测试系统的性能, 本文用表 2 所列的矩阵 X 对系统进行了测试。表 3 给出了硬件实现的综合报告。

表 2 测试数据及结果

十六进制数据		浮点数据	
原始实对称矩阵	$X = \begin{bmatrix} 405b851f & 402ae148 & 4099999a \\ 402ae148 & 3f99999a & 40666666 \\ 4099999a & 40666666 & 40a00000 \end{bmatrix}$	$X = \begin{bmatrix} 3.43 & 2.67 & 4.8 \\ 2.67 & 1.2 & 3.6 \\ 4.8 & 3.6 & 5 \end{bmatrix}$	
特征值	$D = \begin{bmatrix} BF825FBB & 2F5CA1FF & 322F0A7A \\ 2F5CA1FF & BEE765CA & 31FE3A14 \\ 322F0A7A & 31FE3A14 & 41319BA0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} -1.0185464 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4519481 & 0 \\ 0 & 0 & 11.1004943 \end{bmatrix}$	
特征向量	$E = \begin{bmatrix} BE74CC6F & 3F46F593 & 3F1503FE \\ BF3CC62B & BF090B3A & 3ED2E50B \\ 3F21B97A & BEA959F6 & 3F33798B \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} -0.2390611 & 0.7771846 & 0.5820921 \\ -0.7373988 & -0.5353275 & 0.4119037 \\ 0.6317363 & -0.3307644 & 0.7010733 \end{bmatrix}$	

表 3 综合报告

Vendor	Xilinx
Family	Spantan-3dsp
Device	xc3sd1800a-5
Number of Slice Flip Flops	3020 out of 33280 (9%)
Number of 4 input LUTs	3121 out of 33280 (9%)
Slice	2467 out of 16640 (14%)
Maximum frequency	154MHz

**结束语** 本文利用 FPGA 设计实现了符合 IEEE-754 标准的单精度浮点 (32-bit) 雅可比算法 (基于 CORDIC 算法实现) 用于求解高精度浮点实对称矩阵的特征值和特征向量。该设计结合 FPGA 自身的特点, 采用流水线结构的设计思想, 在保证运算精度的前提下, 最大限度地优化了资源和速度。该设计采用浮点运算单元, 相比定点设计提供了更高的精度和更大的动态范围。测试结果表明: 1) 对于  $3 \times 3$  的实对称矩阵 (每个矩阵元素是 32-bit 浮点数), 精度达到  $2^{-20}$ ; 2) 设计实现的结构占用 2467 个 slices, 占芯片总资源的 14%, 最高运行时钟频率达到 150MHz。

## 参考文献

- [1] Bravo I, Jimenez P, Mazo M, et al. Implementation in FPGAs of Jacobi Method to Solve the Eigenvalue and Eigenvector Problem [C] // International Conference on Field Programmable Logic and Applications. 2006; 1-4
- [2] 袁生光, 沈海斌. 基于 Jacobi 算法对称矩阵特征值计算的 FPGA 实现[J]. 机电工程, 2008, 25(10): 80-82
- [3] 宋庆增, 顾军华, 张金珠. 基于 FPGA 的 Jacobi 迭代求解器研究[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(29): 74-77
- [4] Wang Tao, Wei Ping. Hardware Efficient Architectures of Improved Jacobi Method to Solve the Eigen Problem [C] // 2nd International Conference on Computer Engineering and Technology (ICCET). V6, 2010; 22-25
- [5] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004
- [6] Volder J E. The CORDIC Trigonometric computing technique [J]. IRE Transactions on Electronics Computers, 1959, 8(3): 330-334

(上接第 18 页)

- [26] Gu X H, Gong W G, Yang L P. Regularized locality preserving discriminant analysis for face recognition[J]. Neurocomputing, 2011, 75(5): 201-215
- [27] Yu H, Yang J. A direct LDA algorithm for high-dimensional data-with application to face recognition[J]. Pattern Recognition, 2001, 34(10): 2067-2070
- [28] Wang X, Tang X. Dual-space linear discriminant analysis for face recognition[C] // Proceeding of IEEE Conference on Computer Vision and Patter Recognition. 2004; 564-569
- [29] Chu D, Thye G S. A new and fast implementation for null space based linear discriminant analysis [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(4): 1373-1379
- [30] Yang L P, Gong W G, Gu X H, et al. Bagging null space locality

preserving discriminant classifiers for face recognition[J]. Pattern Recognition, 2009, 42; 1853-1858

- [31] Xu D, Yan S C, Lin S, et al. Convergent 2-D subspace learning with null space analysis[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2008, 18(12): 1753-1759
- [32] Eschenauer H, Koski J, Osyczka A. Multicriteria design optimization[M]. Springer-Verlag, 1990
- [33] Georgiades A S, Belhumeur P N, Kriegman D J. From few to many: Illumination cone models for face recognition under variable lighting and pose[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(6): 643-660
- [34] Guan Z, Wang C, Chen Z, et al. Efficient face recognition using tensor subspace regression[J]. Neurocomputing, 2010, 73(13): 2744-2753