

内P-推理信息恢复与属性潜藏推理发现

赵树理^{1,2} 吴松丽¹ 史开泉¹

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)¹ (商丘师范学院数学与信息科学学院 商丘 476000)²

摘要 P-集合(packet sets)是把动态特性引入到有限普通集合 X 内,改进有限普通集合 X 得到的一个动态模型;在一定的条件下,P-集合被还原成有限普通集合 X 。P-集合由内P-集合 X^F (internal packet set X^F)与外P-集合 X^F (outer packet set X^F)构成的集合对;或者, (X^F, X^F) 是P-集合。P-推理(packet reasoning)由内P-推理(internal packet reasoning)与外P-推理(outer packet reasoning)共同构成。利用内P-集合与内P-推理,给出了内P-信息恢复概念与内P-信息恢复特征、内P-信息恢复的内P-推理生成与它的属性潜藏、内P-信息恢复的信息元补充定理、内P-信息恢复的依赖性定理,以及内P-推理信息恢复的属性潜藏定理与属性潜藏发现定理。利用这些理论结果,给出内P-推理信息恢复在信息系统中的应用。

关键词 P-集合, P-推理, 内P-推理信息恢复, 恢复依赖定理, 属性潜藏定理, 属性潜藏发现, 应用

中图分类号 O144 **文献标识码** A

Internal P-reasoning Information Recovery and Attribute Hiding Reasoning Discovery

ZHAO Shu-li^{1,2} WU Song-li¹ SHI Kai-quan¹

(School of Mathematics and System Sciences, Shandong University, Jinan 250100, China)¹

(School of Mathematics and Information Sciences, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000, China)²

Abstract P-sets(packet sets) are a dynamic model obtained by embedding the dynamic characteristics into the finite Cantor set X and improving it. P-sets are a set-pair composed of internal P-set X^F (internal packet set X^F) and outer P-set X^F (outer packet set X^F), or (X^F, X^F) is P-sets. P-reasoning is composed of internal P-reasoning(internal packet reasoning) and outer P-reasoning(outer packet reasoning). Using internal P-sets and internal P-reasoning, the paper gave the concept and characteristics of internal P-information recovery, internal P-reasoning generation and attribute hiding of internal P-information recovery, information elements supplemented theorem and dependence theorem of internal P-information recovery, attribute hiding theorem and attribute hiding discovery theorem of internal P-reasoning information. Based on the results, the application of internal P-reasoning information recovery in the information system was given.

Keywords P-sets, P-reasoning, Internal P-reasoning information recovery, Recovery dependence theorem, Attribute hiding theorem, Attribute hiding discovery theorem, Application

1 引言

文献[1,2]提出P-集合(packet sets),给出P-集合的结构;P-集合是把动态特性引入到普通集合 X 内,改进有限普通集合 X 得到的;在一定的条件下,P-集合被还原成有限普通集合 X ;P-集合具有动态特性。P-集合在一类动态信息系统中得到了应用^[1-28],是由内P-集合 X^F (internal packet set X^F)与外P-集合 X^F (outer Packet set X^F)构成的集合对;或者, (X^F, X^F) 是P-集合。利用P-集合的结构与特性,文献[4]提出P-推理(packet reasoning),给出P-推理模型,P-推理是一个动态推理。P-推理由内P-推理(internal packet reasoning)与外P-推理(outer-packet reasoning)共同构成,P-推理

在信息智能识别、智能挖掘中得到了应用^[4,5]。P-集合具有这样的动态特性:A. 设 α^F 是内P-集合 X^F 的属性集合,若 $\alpha^F \subseteq \alpha_n^F \subseteq \dots \subseteq \alpha_{n-1}^F \subseteq \alpha_n^F$,则 $X_n^F \subseteq X_{n-1}^F \subseteq \dots \subseteq X_2^F \subseteq X_1^F$;B. 设 α^F 是外P-集合 X^F 的属性集合,若 $\alpha_n^F \subseteq \alpha_{n-1}^F \subseteq \dots \subseteq \alpha_2^F \subseteq \alpha_1^F$,则 $X_1^F \subseteq X_2^F \subseteq \dots \subseteq X_{n-1}^F \subseteq X_n^F$ 。从A中得到:如果把 X_k^F, X_{k-1}^F 分别定义成内P-信息 $(x)_k^F, (x)_{k-1}^F$; $(x)_k^F = X_k^F, (x)_{k-1}^F = X_{k-1}^F, (x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F; \forall x_i \in (x)_k^F$ 定义成 $(x)_k^F$ 的信息元(或者, $\forall x_j \in (x)_{k-1}^F$ 定义成 $(x)_{k-1}^F$ 的信息元),则 $(x)_k^F$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 内丢失了一些信息元得到的;相反,如果把丢失的一些信息元补充到 $(x)_k^F$ 内,则得到 $(x)_{k-1}^F$ 。显然, $(x)_{k-1}^F$ 能够被定义成 $(x)_k^F$ 的恢复。

取A中的一个例子:给定内P-集合 $X_{k-1}^F = \{x_1, x_2, x_3,$

到稿日期:2012-06-10 返修日期:2012-10-11 本文受河南省基础与前沿技术研究项目(122300410423),龙岩市科技计划基金项目(2011LY20)资助。

赵树理(1962—),男,副教授,主要研究方向为信息系统与信息识别,E-mail:zhaolishuli@163.com;吴松丽(1969—),女,副教授,主要研究方向为信息系统与应用;史开泉(1945—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为信息系统理论与应用,E-mail:shikq@sdu.edu.cn(通信作者)。

$x_4, x_5\}$, $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 X_{k-1}^F 的属性集合; $X_k^F = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 是 X_k^F 的属性集合; 由 P-集合的元素-属性特征得到: $\forall x_i \in X_{k-1}^F, x_i$ 具有属性 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; i=1, 2, \dots, 5$. $\forall x_j \in X_k^F, x_j$ 具有属性 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5; j=1, 2, 3$. X_k^F 与 X_{k-1}^F, α_k^F 与 α_{k-1}^F 满足: $X_k^F \subseteq X_{k-1}^F, \alpha_{k-1}^F \subseteq \alpha_k^F$. 设 $(x)_k^F = X_k^F, (x)_{k-1}^F = X_{k-1}^F, (x)_k^F$ 被恢复成 $(x)_{k-1}^F$ 等价于 $x_1, x_2, x_3 \in (x)_k^F$ 具有的属性 α_4, α_5 被潜藏; 换个说法, $(x)_k^F$ 被恢复成 $(x)_{k-1}^F$ 等价于 $x_1, x_2, x_3 \in (x)_k^F$ 具有的属性 α_4, α_5 被潜藏在 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 内, 而且在 α_{k-1}^F 内不被显露。属性潜藏是内 P-集合 X^F 具有的一个重要特性, 人们却未对它给出讨论和应用。本文利用内 P-集合、内 P-推理对内 P-集合的属性潜藏特性给出理论与应用的讨论。

本文的主要结果: 给出内 P-信息恢复与它的特性、内 P-信息恢复的内 P-推理生成与生成定理、属性潜藏定理、内 P-信息恢复依赖的几何特征; 利用这些结果, 给出内 P-推理信息恢复与属性潜藏推理发现的应用。

为了便于本文的讨论, 保持本文内容的完整, 又便于读者阅读, 把 P-集合、P-推理简单地引入到本文的第 2 节内, 作为本文讨论的理论准备与预备知识; P-集合、P-推理的更多概念见文献[1-5]。

2 P-集合结构与 P-推理模型

文献[1, 2]给出:

给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset U, \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset V$ 是 X 的属性集合, 称 X^F 是 X 生成的内 P-集合 (internal packet set), 简称 X^F 是内 P-集合, 而且

$$X^F = X - X^- \quad (1)$$

X^- 称作 X 的 $\bar{F}$ -元素删除集合, 而且

$$X^- = \{x | x \in X, \bar{f}(x) = u \in X, \bar{f} \in \bar{F}\} \quad (2)$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F = \alpha \cup \{\alpha' | f(\beta) = \alpha' \in \alpha, f \in F\} \quad (3)$$

这里: $\beta \in V, \beta \in \alpha; f \in F$ 把 β 变成 $f(\beta) = \alpha' \in \alpha; X^F \neq \emptyset$, 式(1)中, $X^F = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, p \leq q, p, q \in \mathbb{N}^+$ 。

给定集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset U, \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset V$ 是 X 的属性集合, 称 X^F 是 X 生成的外 P-集合 (outer packet set), 简称 X^F 是外 P-集合, 而且

$$X^F = X \cup X^+ \quad (4)$$

X^+ 称作 X 的 F -元素补充集合, 而且

$$X^+ = \{u | u \in U, u \notin X, f(u) = x' \in X, f \in F\} \quad (5)$$

如果 X^F 的属性集合 α^F 满足

$$\alpha^F = \alpha - \{\beta | \bar{f}(\alpha_k) = \beta_k \in \alpha, \bar{f} \in \bar{F}\} \quad (6)$$

这里: $\alpha_k \in \alpha, \bar{f} \in \bar{F}$ 把 α_k 变成 $\bar{f}(\alpha_k) = \beta_k \in \alpha; \alpha^F \neq \emptyset$, 式(4)中, $X^F = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}, q \leq r, q, r \in \mathbb{N}^+$ 。

由内 P-集合 X^F (internal packet set X^F) 与外 P-集合 X^F (outer packet set X^F) 构成的集合对, 而且

$$(X^F, X^F) \quad (7)$$

称作有限普通集合 X 生成的 P-集合 (packet sets), 简称 P-集合; 有限普通集合 X 称作 P-集合 (X^F, X^F) 的基集合 (基础集合)。称

$$\{(X_i^F, X_j^F) | i \in I, j \in J\} \quad (8)$$

是 P-集合生成的集合对族, 是 P-集合的一般表达式; I, J 是

指标集合。

由式(1)一式(8)得到。

命题 1 若 $F = \bar{F} = \emptyset$, 则 P-集合 (X^F, X^F) 被还原成有限普通集合 X ; 或者,

$$(X^F, X^F)_{F=\bar{F}=\emptyset} = X \quad (9)$$

命题 2 若 $F = \bar{F} = \emptyset$, 则 P-集合 $\{(X_i^F, X_j^F) | i \in I, j \in J\}$ 被还原成有限普通集合 X ; 或者,

$$\{(X_i^F, X_j^F) | i \in I, j \in J\}_{F=\bar{F}=\emptyset} = X \quad (10)$$

应当指出: 式(1)一式(10)中, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}, \bar{F} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n\}$ 是元素(属性)迁移族^[1-5], $f \in F, \bar{f} \in \bar{F}$ 是元素(属性)迁移^[1-5]; $f \in F$ 的特征: 对于元素 $u \in U, u \in X, f \in F$ 把 u 变成 $f(u) = x' \in X$; 对于属性 $\beta \in V, \beta \in \alpha, f \in F$ 把 β 变成 $f(\beta) = \alpha' \in \alpha$. $\bar{f} \in \bar{F}$ 的特征: 对于元素 $x \in X, \bar{f} \in \bar{F}$ 把 x 变成 $\bar{f}(x) = u \in X$; 对于属性 $\alpha_k \in \alpha, \bar{f} \in \bar{F}$ 把 α_k 变成 $\bar{f}(\alpha_k) = \beta_k \in \alpha$ 。

文献[4]给出:

称 X_{k+1}^F 是 X_k^F 的内 P-推理生成集合, 简称 X_{k+1}^F 是内 P-推理集合, 如果 X_k^F 的属性集合 α_k^F 与 X_{k+1}^F 的属性集合 α_{k+1}^F, X_k^F 与 X_{k+1}^F 满足

$$\text{if } \alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F, \text{ then } X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F \quad (11)$$

式(11)称作内 P-集合生成的内 P-推理, 简称内 P-推理; $\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F$ 称作内 P-推理条件, $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 称作内 P-推理结论。这里, $\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F$ 与 $\alpha_k^F \subseteq \alpha_{k+1}^F$ 等价; $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 与 $X_k^F \subseteq X_{k+1}^F$ 等价。

称 X_{k+1}^F 是 X_k^F 的外 P-推理生成集合, 简称 X_{k+1}^F 是外 P-推理集合, 如果 X_k^F 的属性集合 α_k^F 与 X_{k+1}^F 的属性集合 α_{k+1}^F, X_k^F 与 X_{k+1}^F 满足

$$\text{if } \alpha_{k+1}^F \Rightarrow \alpha_k^F, \text{ then } X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F \quad (12)$$

式(12)称作外 P-集合生成的外 P-推理, 简称外 P-推理; $\alpha_{k+1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$ 称作外 P-推理条件, $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 称作外 P-推理结论。

称 (X_k^F, X_{k+1}^F) 是内 P-推理与外 P-推理生成的 P-推理集合, 简称 (X_k^F, X_{k+1}^F) 是 P-推理集合, 如果 $(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^F)$ 与 $(\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F), (X_k^F, X_{k+1}^F)$ 与 (X_{k+1}^F, X_k^F) 满足

$$\text{if } (\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^F) \Rightarrow (\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F), \text{ then } (X_{k+1}^F, X_k^F) \Rightarrow (X_k^F, X_{k+1}^F) \quad (13)$$

式(13)称作 P-集合生成的 P-推理, 简称 P-推理; $(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^F) \Rightarrow (\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F)$ 称作 P-推理条件, $(X_{k+1}^F, X_k^F) \Rightarrow (X_k^F, X_{k+1}^F)$ 称作 P-推理结论。这里, $(\alpha_k^F, \alpha_{k+1}^F) \Rightarrow (\alpha_{k+1}^F, \alpha_k^F)$ 表示: $\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_{k+1}^F, \alpha_{k+1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$; $(X_{k+1}^F, X_k^F) \Rightarrow (X_k^F, X_{k+1}^F)$ 表示: $X_{k+1}^F \Rightarrow X_k^F, X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 。

命题 3 内 P-推理结论 $X_{k+1}^F \Rightarrow X_k^F$ 中, X_{k+1}^F 是 X_k^F 内元素丢失的生成。

命题 4 外 P-推理结论 $X_k^F \Rightarrow X_{k+1}^F$ 中, X_{k+1}^F 是 X_k^F 内元素补充的生成。

利用第 2 节中的内 P-集合概念与模型、内 P-推理概念与模型, 第 3 节中给出内 P-信息恢复与它的特性。

3 内 P-信息恢复与它的特性

约定 在第 3 节—5 节的讨论中, 第 2 节中的 X_k^F 记作 $(x)_k^F$; 或者 $(x)_k^F = X_k^F, (x)_k^F$ 称作内 P-信息; 基集合 X 记作 (x) ; 或者 $(x) = X, (x)$ 称作信息; $\forall x_i \in (x)_k^F$ 称作 $(x)_k^F$ 的信息元 (或 $\forall x_j \in (x)$ 称作 (x) 的信息元)。

定义 1 称 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-信息恢复, 简称 $(x)_{k-1}^F$ 是内 P-信息恢复, $k \in (1, 2, \dots, n+1)$; 如果 $(x)_{k-1}^F$ 与 $(x)_k^F$ 满

足

$$(x)_{k-1}^F - (x)_k^F \neq \emptyset \quad (14)$$

显然,信息 (x) 是每一个内 P-信息 $(x)_i^F$ 的内 P-信息恢复, $i=1,2,\dots,n$ 。

定义 2 数 γ_{k-1} 称作 $(x)_{k-1}^F$ 的内 P-信息恢复系数, γ_{k-1} 满足

$$\gamma_{k-1} = \text{card}((x)_k^F) / \text{card}((x)_{k-1}^F) \quad (15)$$

式中, $\text{card} = \text{cardinal number}$ 。

定义 3 称内 P-信息恢复 $(x)_{k-1}^F$ 单依赖于内 P-信息恢复 $(x)_k^F$; 记作

$$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F \quad (16)$$

定义 4 称内 P-信息恢复 $(x)_{k-1}^F$ 双依赖于内 P-信息恢复 $(x)_k^F$; 记作

$$(x)_k^F \Leftrightarrow (x)_{k-1}^F \quad (17)$$

这里:“单依赖 $\Rightarrow$ ”,“双依赖 $\Leftrightarrow$ ”取自数理逻辑;“ $\Rightarrow$ ”与“ $\subseteq$ ”等价,“ $\Leftrightarrow$ ”与“ $=$ ”等价。

由定义 1—定义 4 得到。

命题 5 信息 (x) 是任意一个内 P-信息 $(x)_i^F$ 的内 P-信息恢复,一定存在 $\nabla(x)_i^F \neq \emptyset, ((x) - \nabla(x)_i^F) \Leftrightarrow (x)_i^F$ 。

命题 6 信息 (x) 与内 P-信息恢复 $(x)_i^F$ 满足 $(x)_i^F \Rightarrow (x)$ 。

定理 1(内 P-信息恢复的信息元补充定理) $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-信息恢复的充分必要条件是,存在 $\nabla(x)_k^F \neq \emptyset$; $(x)_{k-1}^F, (x)_k^F$ 与 $\nabla(x)_k^F$ 满足

$$(x)_{k-1}^F = (x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F \quad (18)$$

证明:事实上,内 P-信息恢复是内 P-信息还原;1°由第 2 节中的式(1)、式(2)得到: $\text{card}((x)_k^F) \leq \text{card}((x)_{k-1}^F)$;或者 $(x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F$; $(x)_k^F$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 内丢失了信息元 x_i 得到的, $x_i \in (x)_{k-1}^F$;显然,在 $(x)_k^F$ 内补充 $\nabla(x)_k^F \neq \emptyset$ 得到 $(x)_{k-1}^F$;或者, $(x)_{k-1}^F = (x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F$; $\nabla(x)_k^F$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 内被丢失的信息元 x_i 构成的信息。2°若 $(x)_{k-1}^F = (x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F, \nabla(x)_k^F \neq \emptyset, (x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F$;由定义 1 得, $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-信息恢复。由 1°与 2°得到定理 1。

定理 2(内 P-信息恢复的单位离散区间内点定理)

$(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-信息恢复的充分必要条件是, $(x)_{k-1}^F$ 的内 P-信息恢复系数 γ_{k-1} 是单位离散区间 $(0, 1]$ 的一个内点;或者

$$\gamma_{k-1} \in (0, 1] \quad (19)$$

这里: $(0, 1]$ 是数值 0 与 $1 = \gamma = \text{card}((x)) / \text{card}((x))$ 构成的单位离散区间, $\gamma = \text{card}((x)) / \text{card}((x))$ 是信息 (x) 的自恢复系数。

证明:取数 0 与 $1 = \gamma = \text{card}((x)) / \text{card}((x))$ 作单位离散区间 $(0, 1]$ 。1°若 $\gamma_{k-1} = \text{card}((x)_k^F) / \text{card}((x)_{k-1}^F)$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 的内 P-信息恢复系数,则 $0 < \gamma_{k-1} \leq 1$;或者, $\gamma_{k-1} \in (0, 1]$ 。2°若 $\gamma_{k-1} \in (0, 1]$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 的内 P-信息恢复系数,由式(15)得到: $\text{card}((x)_k^F) \leq \text{card}((x)_{k-1}^F)$;或者, $(x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F$,由式(14)得到: $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-信息恢复;由 1°与 2°得到定理 2。

定理 3(内 P-信息恢复的单依赖-双依赖定理) 若 $(x)_{k-1}^F$ 单依赖于 $(x)_k^F$;或者,

$$(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F \quad (20)$$

则存在 $\nabla(x)_k^F \neq \emptyset, (x)_{k-1}^F$ 双依赖于 $(x)_k^F$;或者

$$((x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F) \Leftrightarrow (x)_{k-1}^F \quad (21)$$

证明:由式(16)得到:因为 $(x)_{k-1}^F$ 单依赖于 $(x)_k^F$;或者, $(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F$;或者 $(x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F$; $(x)_k^F$ 是信息元 $x_i \in (x)_{k-1}^F$ 从 $(x)_{k-1}^F$ 内被删除得到的。显然,存在信息 $\nabla(x)_k^F \neq \emptyset, (x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F = (x)_{k-1}^F, (x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F = (x)_{k+1}^F$ 与 $(x)_k^F \cup \nabla(x)_k^F \Leftrightarrow (x)_{k-1}^F$ 等价;由式(17)得到式(21)。

定理 4(内 P-信息恢复的内-同心圆定理) 若 $\odot_{k-1}^F$ 是内 P-信息恢复 $(x)_{k-1}^F$ 生成的一个内 P-信息恢复圆,则 $\odot_{k-1}^F$ 是信息单位圆 $\odot$ 的一个内-同心圆,而且

$$\odot_{k-1}^F \subset \odot \quad (22)$$

式中,“ $\subset$ ”是一个特别的记号,它表示 $\odot_{k-1}^F$ 被包围在 $\odot$ 内。 $\odot_{k-1}^F$ 是以坐标原点 O 为圆心、以 γ_{k-1} 为半径构成的圆; $\odot$ 是以坐标原点 O 为圆心、以 $\gamma = \text{card}((x)) / \text{card}((x)) = 1$ 为半径构成的信息单位圆。

证明:由命题 5 得到: (x) 是 $(x)_{k-1}^F$ 的内 P-信息恢复,由式(15)得到: $\text{card}((x)_{k-1}^F) \leq \text{card}((x))$;或者, $\gamma_{k-1} = \text{card}((x)_{k-1}^F) / \text{card}((x)) \leq \text{card}((x)) / \text{card}((x)) = \gamma = 1$;利用 γ, γ_{k-1} 作半径,以坐标原点 O 为圆心作圆,得到信息单位圆 $\odot$ 与内 P-信息恢复圆 $\odot_{k-1}^F$,则有 $\odot_{k-1}^F \subset \odot$; $\odot_{k-1}^F$ 是 $\odot$ 的一个内-同心圆,得到定理 4。

图 1 给出定理 4 的直观表示。

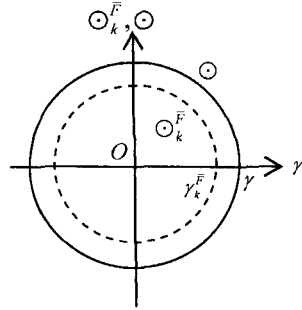


图 1 $\odot$ 是信息 (x) 构成的信息单位圆; $O, \gamma = \text{card}((x)) / \text{card}((x))$ 分别是 $\odot$ 的圆心与半径; $\odot$ 用实线表示。 $\odot_{k-1}^F$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 构成的内 P-信息恢复圆; O, γ_{k-1} 分别是 $\odot_{k-1}^F$ 的圆心与半径; $\odot_{k-1}^F$ 用虚线表示。 γ 与 γ_{k-1} 满足: $\gamma_{k-1} \leq \gamma$

第 3 节中给出内 P-信息恢复的特征:信息元补充特征,内 P-信息恢复系数离散区间特征,内 P-信息恢复依赖特征与内 P-信息恢复二维空间特征;把内 P-推理引入到内 P-信息恢复中,对第 3 节中的结果再讨论,第 4 节中给出内 P-信息恢复的 P-推理生成与它的属性潜藏定理。

4 内 P-信息恢复的内 P-推理生成与它的属性潜藏定理

定义 5 若 $(x)_k^F$ 与 $(x)_{k-1}^F$; $(x)_k^F$ 的属性集合 a_k^F 与 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 a_{k-1}^F 满足

$$\text{if } a_{k-1}^F \Rightarrow a_k^F, \text{ then } (x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F \quad (23)$$

称 $(x)_{k-1}^F$ 是满足内 P-推理条件 $a_{k-1}^F \Rightarrow a_k^F$ 被内 P-推理生成的 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复,简称 $(x)_{k-1}^F$ 是内 P-推理信息恢复。

定义 6 称 Δa_k^F 是内 P-推理信息恢复生成的属性潜藏,如果 Δa_k^F 是 $\nabla(x)_k^F$ 的属性集合,则 $\nabla(x)_k^F$ 满足

$$\nabla(x)_k^F = (x)_{k-1}^F - (x)_k^F \quad (24)$$

式中, $\Delta a_k^F \neq \emptyset$ 。

定理 5(内 P-推理信息恢复第一属性潜藏定理) 若 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则存在 $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$, $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F , $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 与 $\Delta\alpha_k^F$ 满足

$$\alpha_{k-1}^F = \alpha_k^F - \Delta\alpha_k^F \quad (25)$$

$\Delta\alpha_k^F$ 在 α_{k-1}^F 内被潜藏。

证明: 因为 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 由式 (23) 得到: $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足内 P-推理条件 $\alpha_{k-1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$; 或者 $\alpha_{k-1}^F \subseteq \alpha_k^F$; 存在属性集合 $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$, $\alpha_{k-1}^F \cup \Delta\alpha_k^F = \alpha_k^F$; 或者: $\alpha_{k-1}^F = \alpha_k^F - \Delta\alpha_k^F$; $\Delta\alpha_k^F$ 不在 α_{k-1}^F 内出现; 或者: $\Delta\alpha_k^F$ 潜藏在 α_{k-1}^F 内不被显露。

例如, 给定 $(x)_{k-1}^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合; $(x)_k^F = \{x_1, x_2, x_3\}$ 的内 P-推理信息恢复, $\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 是 $(x)_k^F$ 的属性集合; 显然, $(x)_k^F$ 被内 P-推理恢复成 $(x)_{k-1}^F$, α_k^F 内的属性 α_4, α_5 不在 α_{k-1}^F 内; 或者 $\alpha_4, \alpha_5 \in \alpha_{k-1}^F$; 或者 α_4, α_5 在 α_{k-1}^F 内被潜藏, 在 α_{k-1}^F 内不被显露。

由定理 5 与单依赖概念直接得到:

推论 1 若 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则一定存在属性集合 $\Delta\alpha_k^F \subseteq \alpha_k^F$, $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$; $\Delta\alpha_k^F$ 潜藏在 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 内, 不被显露。

推论 2 若 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则 α_k^F 与潜藏在 α_{k-1}^F 内的属性集合 $\Delta\alpha_k^F$ 满足单依赖; 或者 $\Delta\alpha_k^F \Rightarrow \alpha_k^F$ 。

推论 3 若 (x) 是 $(x)_i^F, (x)_j^F, (x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则潜藏在 (x) 的属性集合 α 内的属性集合 $\Delta\alpha_i^F, \Delta\alpha_j^F, \Delta\alpha_k^F$ 与 α 满足单依赖链 $\Delta\alpha_i^F \Rightarrow \Delta\alpha_j^F \Rightarrow \Delta\alpha_k^F \Rightarrow \alpha$ 。

定理 6(内 P-推理信息恢复第二属性潜藏定理) 若 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则 $(x)_{k-1}^F - (x)_k^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足

$$(\alpha_{k-1}^F \cup \alpha_k^F) - \alpha_k^F = \emptyset \quad (26)$$

式中, $\alpha_k^F, \alpha_{k-1}^F$ 分别是 $(x)_k^F, (x)_{k-1}^F$ 的属性集合。

证明: 设 $(x)_{k-1}^F = \{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m\}$, $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_t\}$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合; $(x)_k^F = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, $\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 是 $(x)_k^F$ 的属性集合; $(x)_k^F \subseteq (x)_{k-1}^F$, $\alpha_{k-1}^F \subseteq \alpha_k^F$ 。显然, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m \in (x)_{k-1}^F$ 具有属性集合 $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_t\}$ 。因为 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复; 或者 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 内信息元 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$ 的补充生成; $(x)_k^F$ 被恢复成 $(x)_{k-1}^F$, $(x)_k^F = (x)_{k-1}^F$ 等价于在 α_{k-1}^F 内补充属性: $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$; 或者 $\alpha_{k-1}^F \cup \alpha_k^F = \alpha_k^F$, 则有 $(\alpha_{k-1}^F \cup \alpha_k^F) - \alpha_k^F = \emptyset$; 潜藏在 α_{k-1}^F 内的属性 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ 被显露, 得到定理 6。

例如 $(x)_{k-1}^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合; $(x)_k^F = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 是 $(x)_k^F$ 的属性集合, $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 等价于 $(x)_k^F$ 内补充 x_4 , 而且 $(x)_{k-1}^F = (x)_k^F \cup \{x_4\}$, 则有 $(\alpha_{k-1}^F \cup \alpha_k^F) - \alpha_k^F = (\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}) - \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} - \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} = \emptyset$ 。

利用定理 6 与双依赖概念直接得到:

推论 4 若 $(x)_k^F$ 被内 P-推理信息恢复成 $(x)_{k-1}^F$, 则 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 与 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 满足双依赖; 或者 $\alpha_{k-1}^F \Leftrightarrow \alpha_k^F$ 。

推论 5 若 $(x)_k^F$ 被内 P-推理信息恢复成 $(x)_{k-1}^F$, 则 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 与 $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 满足 $\text{UNI}(\alpha_k^F, \alpha_{k-1}^F)$ 。
 $\text{UNI} = \text{unidentification}$ 。

定理 7(内 P-推理信息恢复属性潜藏存在性定理) 若 α_k^F 是 $(x)_k^F$ 的属性集合, $(x)_k^F$ 是 $(x)_{k+i}^F$ 的内 P-推理信息恢复, 则 $(x)_{k+i}^F$ 的属性集合 α_{k+i}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足

$$\alpha_{k+i}^F - \alpha_k^F \neq \emptyset \quad (27)$$

证明: 设 $(x)_k^F$ 是 $(x)_{k+i}^F$ 的内 P-推理信息恢复, 由式 (1) - 式 (3) 得: $(x)_{k+i}^F$ 的属性集合 α_{k+i}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F 满足 $\alpha_k^F \subseteq \alpha_{k+i}^F$, 则存在 $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$, $\alpha_{k+i}^F - \Delta\alpha_k^F = \alpha_k^F$; 或者: $\alpha_{k+i}^F - \alpha_k^F \neq \emptyset$, $(x)_{k+i}^F$ 被恢复成 $(x)_k^F$, α_{k+i}^F 内的一些属性在 α_k^F 内不被显露, 这些属性潜藏在 α_k^F 内。

定理 8(内 P-推理信息恢复属性潜藏发现定理) 若 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, 满足内 P-推理结论 $(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F$, 则潜藏在内 P-推理条件 $\alpha_{k-1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$ 中的 $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$, 在内 P-推理条件中被发现, 而且

$$(\alpha_k^F - \Delta\alpha_k^F) \Rightarrow \alpha_k^F \quad (28)$$

证明: 设 $(x)_{k-1}^F$ 是 $(x)_k^F$ 的内 P-推理信息恢复, $(x)_{k-1}^F$ 的属性集合 α_{k-1}^F 与 $(x)_k^F$ 的属性集合 α_k^F , $(x)_{k-1}^F$ 与 $(x)_k^F$ 满足: if $\alpha_{k-1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$, then $(x)_k^F \Rightarrow (x)_{k-1}^F$; 由 $\alpha_{k-1}^F \Rightarrow \alpha_k^F$ 得到: $\alpha_{k-1}^F \subseteq \alpha_k^F$, 存在 $\Delta\alpha_k^F \neq \emptyset$, $\Delta\alpha_k^F = \alpha_k^F - \alpha_{k-1}^F$, $\Delta\alpha_k^F$ 在 $(x)_k^F$ 被恢复成 $(x)_{k-1}^F$ 时被发现, 而且满足: $\alpha_k^F = \alpha_{k-1}^F \cup \Delta\alpha_k^F$; 或者: α_k^F 单依赖于 $\alpha_{k-1}^F - \Delta\alpha_k^F$, $(\alpha_k^F - \Delta\alpha_k^F) \Rightarrow \alpha_k^F$, 得到定理 8。

利用第 3 节、第 4 节中给出的讨论与结果, 将在第 5 节中给出内 P-推理信息恢复的应用。

5 内 P-推理信息恢复与属性潜藏推理发现的应用

本节的例子取自交通事故中对伤员的救护; 为了简单, 例子做了适当的简化。2010 年 7 月 23 日在浙江温州境内发生两列高速运行火车相撞事故。事故发生后, 浙江省, 国家民政部启动应急预案; 浙江省, 温州市派出大量医务人员组成救护团队并赴事故现场, 对有生还希望的伤员进行紧急救护。被救护的伤员构成内 P-信息 $(x)^F$, α^F 是被救护伤员具有的属性集合(特征集合); 而且

$$(x)^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad (29)$$

$$\alpha^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \quad (30)$$

式中, α_1 = 断肢, α_2 = 大量失血, α_3 = 昏迷, α_4 = 老人, α_5 = 儿童, α_6 = 妇女。

在事故现场中, 还有众多年轻伤员、列车司机伤员、乘务伤员; 他们受到死亡威胁, 需要对他们实施救护。救护团队对救护方案进行调正: 对所有具有生还希望的伤员, 进行救护; 式(30)变成

$$\alpha = \alpha^F - \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \quad (31)$$

具有属性集合 α^F 的信息 $(x)^F$ 变成 (x) , (x) 具有属性集合 α , 而且

$$\begin{aligned} (x) &= (x)^F \cup \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\} \\ &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\} \end{aligned} \quad (32)$$

例子的分析

例子中对断肢、大量失血、昏迷的伤员, 不分男、女、老、少, 一律实施相同的紧急救护, 挽救他们的生命, 使死亡人数减少到最低限度。救护方案调整后, 式(30)中的属性集合 α^F

内删除属性 $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$; 换个说法, $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in \alpha^F$ 被潜藏在式(31)中的 α 内; $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 在 α 内不被显露, α^F 变成 α 。内 P-信息 $(x)^F$ 被恢复成 (x) ; 或者, 具有属性(特征) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的所有伤员进行同等救护。利用式(11): if $\alpha \Rightarrow \alpha^F$, then $(x)^F \Rightarrow (x)$ 得到; 式(29)一式(32)满足内 P-推理, 式(32)是式(29)的内 P-推理信息恢复, 潜藏在 α 内的属性 $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ 在内 P-推理中被发现。利用式(16)得到: (x) 单依赖于 $(x)^F$, $(x)^F \Rightarrow (x)$; 满足定理 1、定理 2。利用式(15)得到: 式(29)中 $(x)^F$ 生成的内 P-信息恢复圆 $\odot^F$ 是 (x) 生成的信息单位圆 $\odot$ 的一个内-同心圆, 而且内 P-信息恢复系数 γ^F 满足 $\gamma^F \leq \gamma$ 。式(30)、式(31)中的 α^F , α 满足定理 5—定理 8。

结束语 文献[1, 2]提出 P-集合, 给出 P-集合的结构 (X^F, X^F) ; P-集合中的内 P-集合 X^F 、外 P-集合 X^F 具有一个重要特征: 内 P-集合 X^F 内的元素的属性 $\alpha_i \in \alpha^F$ 与元素 $x_i \in X^F$ 满足: 元素 $x_i \in X^F$ 具有属性 $\bigwedge_{i=1}^m \alpha_i$ 。例如, 给定 $X_k^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\alpha_k^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 是 X_k^F 的属性集合, $\forall x_i \in X_k^F$, x_i 具有属性 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$; 或者, $x_i \in X_k^F$ 具有属性 $\bigwedge_{i=1}^5 \alpha_i$ 。如果 $X_{k-1}^F = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ 被定义成 X_k^F 的内 P-信息恢复, $X_k^F \subseteq X_{k-1}^F$, X_{k-1}^F 具有属性集合 $\alpha_{k-1}^F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$; 则 α_k^F 内的属性 $\alpha_4, \alpha_5 \in \alpha_k^F$ 被潜藏在 α_{k-1}^F 内; 换个说法, 如果 α_k^F 内的属性 α_4, α_5 在 α_{k-1}^F 内被潜藏, 不被显露, 则 X_k^F 被恢复成 X_{k-1}^F 。显然, 如果 X_k^F 是由不完全元素构成的集合, 则 X_{k-1}^F 是由完全元素构成的集合; 或者, 内 P-信息恢复给出一个利用非完整信息寻找完整信息的方法。外 P-集合 X^F 的元素的属性 $\alpha_j \in \alpha^F$ 与元素 $x_j \in X^F$ 满足: $x_j \in X^F$ 具有属性 $\bigwedge_{j=1}^n \alpha_j$, 例子, 略。

本文对内 P-信息 $(x)^F$ 的恢复产生的属性潜藏-发现给出理论与应用的讨论, 如果把本文的结果移植到动态信息智能识别中, 能够得到一些新的应用结果。

P-集合是一类动态信息特征的数学模型表示; 在信息系统中还存在另一类动态信息, 另一类动态信息中的信息元 x_i 具有的属性 α_i 满足 $\bigvee_{i=1}^m \alpha_i$; 显然, P-集合不能被应用于另一类动态信息特征的研究。2012 年, 文献[29]把动态特征引入到有限普通集合 X 内, 改进有限普通集合 X , 提出逆 P-集合(inverse packet sets), 2012 年, 文献[30]把函数概念引入到逆 P-集合内, 改进逆 P-集合, 提出函数逆 P-集合(function inverse packet sets)。逆 P-集合、函数逆 P-集合能被应用到另一类动态信息、另一类动态信息规律研究中。

参考文献

- [1] 史开泉. P-集合[J]. 山东大学学报: 理学版, 2008, 43(11): 77-84
- [2] Shi Kai-quan. P-sets and its applications [J]. An International Journal Advances in Systems Science and Applications, 2009, 9(2): 209-219
- [3] 史开泉. P-集合与它的应用特性[J]. 计算机科学, 2010, 37(8): 1-8
- [4] 史开泉. P-推理与信息的 P-推理发现-辨识[J]. 计算机科学, 2011, 38(7): 1-9
- [5] 史开泉. P-集合, 逆 P-集合与信息智能融合-过滤辨识[J]. 计算机科学, 2012, 39(4): 1-13
- [6] 赵树理, 范成贤, 史开泉. 倒向 P-推理与内 P-属性类特征[J]. 计

算机科学, 2012, 39(7): 245-249

- [7] 赵树理, 范成贤, 史开泉. 外 P-信息生成与它的推理-搜索发现[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(11): 99-104
- [8] 张丽, 崔玉泉, 史开泉. 外 P-集合与数据内-恢复[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(6): 1233-1238
- [9] 史开泉, 张丽. 内 P-集合与数据外-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(4): 8-14
- [10] Shi Kai-quan, Li Xiu-hong. Camouflaged information identification and its applications [J]. An international Journal Advances in Systems Science and Applications, 2010, 10(2): 157-167
- [11] Shi Kai-quan. Function P-sets [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2011, 2(4): 281-288
- [12] Fan Cheng-xian, Lin Hong-kang. P-sets and the reasoning-identification of disaster information [J]. International Journal of Convergence Information Technology, 2012, 7(1): 337-345
- [13] Lin Hong-kang, Fan Cheng-xian. The dual form of P-reasoning and identification of unknown attribute[J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2012, 6(1): 121-131
- [14] Lin Rong, Fan Cheng-xian. P-sets and identification of inward-convergence Information [J]. International Journal of Convergence of Convergence Information Technology, 2012, 7(7): 157-164
- [15] Fan Cheng-xian, Huang Shun-liang. Inverse P-reasoning discovery-identification of inverse P-information[J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2012, 6(20): 735-744
- [16] 李豫颖, 范成贤, 史开泉. 混合记忆信息与记忆筛选[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(8): 1824-1828
- [17] 于秀清. 迭代 F-内嵌入信息生成及其遗传发现-应用[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(12): 2691-2731
- [18] 张冠宇, 周厚勇, 史开泉. P-集合与双 P-数据恢复-辨识[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9): 1919-1924
- [19] 刘若慧, 刘保仓, 史开泉. 外 P-集合与 F-信息伪装[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(1): 116-119
- [20] 耿红琴, 张冠宇, 史开泉. F-信息伪装与伪装-还原辨识[J]. 计算机科学, 2011, 38(2): 241-245
- [21] 汤积华, 陈保会, 史开泉. P-集合与 (F, F) 数据生成-辨识[J]. 山东大学学报: 理学版, 2009, 44(11): 83-92
- [22] 刘道广, 史开泉. 外-遗传信息与它的外 P-推理辨识[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 81-85
- [23] 李豫颖, 林宏康. 内-递推信息与内-递推二叉树特征-辨识[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 86-102
- [24] 林宏康, 李豫颖, 熊国敏. 动态数据距离与动态数据几何辨识-恢复[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 92-97
- [25] 张景晓, 刘新华. 函数 P-集合与同物系物质结构-物性规律发现[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 98-102
- [26] 徐风生, 于秀清, 史开泉. 内 P-推理与内收敛信息的辨识[J]. 计算机科学, 2012, 39(3): 212-215
- [27] 张景晓, 徐风生, 史开泉. P-集合与它的动态等价类特征[J]. 计算机科学, 2012, 39(3): 246-249
- [28] 周玉华, 张冠宇, 史开泉. P-集合与双信息规律生成[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(13): 71-80
- [29] 史开泉. 逆 P-集合[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(1): 98-109
- [30] 史开泉. 函数逆 P-集合与信息规律融合[J]. 山东大学学报: 理学版, 2012, 47(8): 73-80