

# 基于模糊邻近关系的聚类结构分析

陶 华 唐旭清

(江南大学理学院 无锡 214122)

**摘 要** 提出了基于粒度空间的模糊邻近关系聚类结构分析研究,探讨了模糊邻近关系的聚类结构特性。首先,给出粒度空间(或聚类结构)的表示和生成算法,引入关键点序列概念和最小动态连通图诠释模糊邻近关系聚类结构的生成过程;其次,引入模糊邻近关系关于聚类结构的同构和 $\epsilon$ -相似的概念,给出了两个模糊邻近关系同构或 $\epsilon$ -相似的判定定理;最后,引入模糊邻近关系关于聚类结构的强 $\epsilon$ -相似的概念,研究了两个模糊邻近关系同构与强 $\epsilon$ -相似之间的关系。这些研究结论为一般的聚类结构分析提供了研究工具。

**关键词** 粒计算,模糊邻近关系,粒度空间,聚类结构

**中图法分类号** O29,TP18

**文献标识码** A

## Clustering Structural Analysis on Fuzzy Proximity Relation

TAO Hua TANG Xu-qing

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract** The clustering structural analysis of fuzzy proximity relations was presented based on the granular space, and the clustering structural characteristics was discussed. Firstly, the representation and generation algorithm of the granular space (or clustering structure) was given and the concept of key point sequence was introduced. The minimum dynamic connected graph was built to explain the generation process of the granular space. Secondly, by introducing the concepts of the isomorphism and  $\epsilon$ -similarity, the corresponding determinant theorem that two fuzzy proximity relations are isomorphic or  $\epsilon$ -similar was given. Finally, by introducing the concept of the strong  $\epsilon$ -similarity, the relationship between the isomorphism and strong  $\epsilon$ -similarity of two fuzzy proximity relations was studied. These results provide research tools for the general analysis of clustering structure.

**Keywords** Granular computing, Fuzzy proximity relation, Granular space, Clustering structure

## 1 引言

近年来粒计算成为人工智能研究中的一个新热点,目前粒计算的最主要的三大理论是:基于模糊逻辑的粒计算理论<sup>[1]</sup>、基于粗糙集的粒计算理论<sup>[2]</sup>、基于商空间的粒计算理论<sup>[3]</sup>。粒计算将结构化思维方式、结构化问题求解方法、结构化信息处理有机地结合在一起<sup>[4]</sup>,并导出其独特的理论、技术和工具。加拿大 Regina 大学教授 Yao<sup>[5]</sup>利用粗糙集粒计算模型来学习分类规则。蒙祖强等<sup>[6]</sup>基于粒度计算探讨了决策规则获取的方法,其可降低空间开销和提高计算效率。George Panoutsos 等<sup>[7]</sup>提出了一种系统建模方法,即粒计算被用来提取关系信息和数据特征的最初数据库。Andrzej Skowron 等<sup>[8]</sup>借助粒计算在近似空间上进行数据挖掘和机器学习建模研究。Pedrycz Witold<sup>[9,10]</sup>在模糊数学和粒计算等计算智能领域进行大量聚类分析的研究。聚类分析正是粒计算思想的具体实现,粒计算是聚类分析思想的抽象。粒计算的研究对人工智能、机器学习、智能系统等领域有着重要的指

导意义。

全局分析能力是人类智能最主要的特点之一,而粒计算正是对全局分析能力的一种模拟,于是对复杂问题取较粗的粒度进行研究就归纳为对简单问题进行分析求解。多层次粒结构是粒计算的基本概念<sup>[11]</sup>,它的基本成分是粒和层,它的结构描述粒与粒、粒与层及层与层之间的关系和联系。一个层的粒度由其所包含的粒的粒度决定,不同层按其粒度构成一个偏序关系,其结果就是一个多层次粒结构。依据各种不同的粒度将性质相似的元素聚为一类,同类中的元素是等同的。粒度空间有序地涵盖所有的聚类结果,包括粒、层次、多层次粒结构。同一层上看,粒是部分而层是整体;不同层上看,层是部分而多层次粒结构是整体。张铃<sup>[3]</sup>曾断言论域上的一个模糊等价关系与一个分层递阶结构是等价的,不同的模糊等价关系可以给出同一个分层递阶结构,而分层递阶结构是最本质的、唯一的。在问题求解的特定阶段,只需要从某个层次(粒度)考虑,就可有效地降低问题求解的复杂度,提高求解效率<sup>[12]</sup>。在文献[13]中,张铃等给出模糊等价关系的同

到稿日期:2012-03-25 返修日期:2012-07-31 本文受国际科技合作研究项目(2011DFR70500),江南大学创新团队发展计划(2008CXTD02)资助。

陶 华(1987—),女,硕士生,主要研究方向为粒度计算、生物信息学;唐旭清(1963—),男,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为计算智能、生态系统建模与仿真、生物信息学,E-mail:txq5139@jiangnan.edu.cn(通信作者)。

构及相似原理,在文献[14]中推广到模糊相容关系讨论其性质,用于解释对于同一个模糊概念人们依据不同的隶属函数可以获得相同或相似的结果的原因。

我们曾提出过基于归一化距离和模糊等价关系的粒度空间的概念,并研究了模糊粒度空间的性质<sup>[15,16]</sup>。在文献[17]中,我们进行了基于粒度空间的模糊邻近关系的聚类结构的研究,研究表明它的聚类结构具有一致性的良好性质。在文献[18]中,我们也进行了基于距离空间的聚类结构分析研究,建立了一系列的聚类分析理论和方法。本文将在这些研究结果的基础上研究模糊邻近关系关于聚类结构的同构及相似问题,同时揭示模糊邻近关系的同构和相似之间的联系。首先引入粒度空间的基本概念。

$R$  是  $X$  上的一个模糊关系,若其满足自反性、对称性和传递性(即  $\forall x, y, z \in X, R(x, y) \geq \sup_{z \in X} \{\min\{R(x, z), R(z, y)\}\}$ ),则称  $R$  是  $X$  上的模糊等价关系;若模糊关系  $R$  仅满足条件自反性和对称性,则  $R$  是  $X$  上的模糊邻近关系<sup>[17]</sup>。

若  $R$  是模糊等价关系,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 显然其截关系  $R_\lambda$  是  $X$  上一个普通等价关系。若记  $R_\lambda$  的等价类  $[x]_\lambda = \{y | R(x, y) \geq \lambda, y \in X\}$ ,  $X(\lambda) = \{[x]_\lambda | x \in X\}$ , 则  $X(\lambda)$  为模糊等价关系  $R$  在  $X$  上关于  $\lambda$  的粒度。而  $X$  上所有可能的粒度的集合  $\{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$  就称为由  $R$  引导的  $X$  的粒度空间,记为  $\aleph_R(X)$ <sup>[16]</sup>。

**定义 1**<sup>[17]</sup> 若  $R$  是模糊邻近关系,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 显然其截关系  $R_\lambda$  是  $X$  上一个普通邻近关系。定义  $D_\lambda = \{(x, y) | \exists x = x_1, x_2, \dots, x_m = y, (x_i, x_{i+1}) \in R_\lambda, i = 1, 2, \dots, m-1\}$ , 称  $D_\lambda$  为以  $R_\lambda$  为基诱导的等价关系。

事实上,  $D_\lambda$  是  $R_\lambda$  按传递性构造的一个传递闭包,记  $D_\lambda = t(R_\lambda)$ 。

**定义 2**<sup>[17]</sup>  $\forall x \in X$ , 等价关系  $D_\lambda$  引导的  $x$  的等价类记为  $[x]_\lambda$ , 则  $[x]_\lambda = \{y | (x, y) \in D_\lambda, y \in X\}$ , 即  $[x]_\lambda = \{y | \exists x = x_1, x_2, \dots, x_m = y, R(x_i, x_{i+1}) \geq \lambda, i = 1, 2, \dots, m-1, y \in X\}$ , 相应的粒度记为  $X(\lambda)$ , 即  $X(\lambda) = \{[x]_\lambda | x \in X\}$ , 则  $\{X(\lambda) | 0 \leq \lambda \leq 1\}$  为由模糊邻近关系  $R$  引导的粒度空间,记为  $\aleph_R(X)$ 。

**定义 3**<sup>[18]</sup> 给定  $X$  上的 2 个粒度  $X(\lambda_1), X(\lambda_2)$ :

(1) 若满足:  $\forall x \in X$ , 都有  $[x]_{\lambda_1} \subseteq [x]_{\lambda_2}$ , 则称粒度  $X(\lambda_2)$  不比  $X(\lambda_1)$  细,记为  $X(\lambda_2) \leq X(\lambda_1)$ ;

(2) 若  $X(\lambda_2) \leq X(\lambda_1)$ , 且存在  $\forall x_0 \in X$ , 使得  $[x_0]_{\lambda_1} \subset [x_0]_{\lambda_2}$ , 则称  $X(\lambda_1)$  比  $X(\lambda_2)$  细,记为  $X(\lambda_2) < X(\lambda_1)$ 。

**引理 1**<sup>[17]</sup> 若  $R$  是  $X$  上的一个模糊邻近关系,  $\aleph_R(X)$  是它的粒度空间,则  $\aleph_R(X)$  构成一个有序集,且  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 \leq \lambda_2$ , 有  $X(\lambda_2) \leq X(\lambda_1)$ 。

由引理 1, 我们也称模糊邻近关系  $R$  引导的粒度空间  $\aleph_R(X)$  是一个有序的粒度空间。文献[16]曾指出,一个模糊邻近关系的粒度空间就是它的聚类结构。

设  $R$  是  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  上的一个模糊邻近关系,其引导的粒度空间为  $\aleph_R(X)$ 。对于给定的  $X(\lambda) \in \aleph_R(X)$ , 记  $X(\lambda) = \{X_1, X_2, \dots, X_{C_\lambda}\}$ ,  $X_k = \{k_1, k_2, \dots, k_{J_k}\} \subseteq X, k = 1, 2, \dots, C_\lambda$ , 且  $\sum_{k=1}^{C_\lambda} J_k = n$ 。

**定义 4**<sup>[19]</sup> 粒度  $X(\lambda)$  的细度定义为:  $G(X(\lambda)) = \sum_{k=1}^{C_\lambda} |X_k|$

$|^2/|X|^2$ , 其中  $|\cdot|$  表示该集合的基数。

细度是衡量粒度粗细的一种度量,粒度越细,细度越小。

## 2 粒度空间的生成算法

文献[17]指出:模糊邻近关系  $R$  引导的粒度空间  $\aleph_R(X)$  就是  $R$  的聚类结构;同时获得了一个计算有限集上模糊邻近关系  $R$  的聚类结构(或粒度空间)  $\aleph_R(X)$  和最小传递闭包  $R^*$  (即  $t(R)$ ) 的算法。如果存在  $x_{j_0} \in a, x_{k_0} \in b (j_0 < k_0, a, b \in X(r_{i-1}))$  使得  $R(x_{j_0}, x_{k_0}) \geq r_i$ , 则  $R(x_{j_0}, x_{k_0}) = r_i = \max\{R(x_j, x_k) | x_j \in a, x_k \in b\}$ , 称  $(j_0, k_0)$  为关键点,  $R(j_0, k_0)$  为相应的关键值。基于文献[16]中粒度空间的算法,我们提出如下的改进算法。

**算法 1** 求解粒度空间和最小传递闭包

输入: 基数为  $n$  的集合  $X$  上的一个模糊邻近关系  $R$

输出: 粒度空间  $\aleph_R(X)$  和最小传递闭包  $R^*$

Step 1  $i \leftarrow 0, X(r_i) = A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} (N \leq n)$

For  $i = 1$  to  $N$ , if  $x_j, x_k \in a_i, R^*(x_j, x_k) = 1$

Step 2 Output  $X(r_i) = A$

Step 3  $\forall a \in A, i \leftarrow i + 1$

Step 4  $B \leftarrow \emptyset$

Step 5  $B \leftarrow B \cup a, A \leftarrow A \setminus a$

Step 6 If there exists  $x_{j_0} \in B, x_{k_0} \in a \in A$  such that  $R(x_{j_0}, x_{k_0}) = \max\{R(x_j, x_k) | x_j \in B, x_k \in a \in A\} = r_i$ , then  $\forall x_j \in B, x_k \in a, R^*(x_j, x_k) \leftarrow r_i$ , and  $B \leftarrow B \cup b, A \leftarrow \{A \setminus \{b\} \setminus \{a\}\} \cup \{B\}$ ; otherwise, go to Step 8

Step 7 go to Step 6

Step 8  $X(r_i) \leftarrow A$

Step 9 If  $X(r_i) \neq X(r_{i-1})$ , output  $X(r_i)$

Step 10 If  $i \neq m$  or  $X(r_i) \neq \{X\}$ , go to Step 3

Step 11 Output  $R^* = [R^*(x_i, x_j)]_{n \times n}$

Step 12 End

**例 1** 论域  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , 其上的模糊邻近关系为  $R =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}.$$

$R$  的关键点的值为  $D = \{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.3, 0.2\}$ ,  $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ 。运行算法 1:

(1) 当  $r_0 = 1.0$ , 显然  $X(1.0) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$  且  $R^*(i, i) = 1, i = 1, 2, 3, 4$ ;

(2) 当  $r_1 = 0.9$ , 因为  $R(4, 1) = 0.9$ , 所以  $(1, 4)$  是关键点,  $0.9$  是相应的关键值。所以  $X(0.9) = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$  且  $R^*(1, 4) = R^*(4, 1) = 0.9$ ;

(3) 当  $r_2 = 0.8$ , 对于  $a = \{1, 4\} \in X(0.9)$ , 存在  $b = \{3\} \in X(0.9)$  使得  $R(1, 3) = \max\{R(i, j) | i \in a, j \in b\} = 0.8$ , 所以  $(1, 3)$  是关键点,  $0.8$  是相应的关键值。所以  $X(0.8) = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$  且  $R^*(1, 3) = R^*(4, 3) = R^*(3, 1) = R^*(3, 4) = 0.8$ ;

(4) 当  $r_3 = 0.7$ , 对于  $a = \{1, 3, 4\} \in X(0.8)$ , 存在  $b = \{2\} \in X(0.8)$  使得  $R(1, 2) = \max\{R(i, j) | i \in a, j \in b\} = 0.7$ , 所以  $(1, 2)$  是关键点,  $0.7$  是相应的关键值, 即  $X(0.7) = \{X\}$  且  $R^*(1, 2) = R^*(2, 1) = R^*(2, 3) = R^*(3, 2) = R^*(2, 4) = R^*(4, 2) = 0.7$ 。

当  $X(0.7) = \{X\}$  时, 算法终止。

由以上(1)到(4)步,得到  $R$  引导的粒度空间:  $\mathcal{N}_{TR}(X) = \{X(1) = \{\{1\}, \dots, \{4\}\}, X(0.9) = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}, X(0.8) = \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, X(0.7) = \{X\}\}$ , 以及最小传递闭包:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 1 & 0.8 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

根据细度的定义,不同粒度的度量如下:

$$G(X(1)) = \frac{1+1+1+1}{4^2} = \frac{1}{4}, G(X(0.9)) = \frac{2^2+1+1}{4^2} = \frac{3}{8}, G(X(0.8)) = \frac{3^2+1}{4^2} = \frac{5}{8}, G(X(0.7)) = \frac{4^2}{4^2} = 1, \text{显然有 } G(X(1)) < G(X(0.9)) < G(X(0.8)) < G(X(0.7)).$$

在例 1 中,若不计每个元素单独成一类,算法 1 求解聚类结构的过程可借助最小连通图(含  $n$  个顶点)解释如下:

- (1) 当  $\lambda = r_1 = 0.9$ , 获得关键的  $(1, 4)$ , 则对应于连通图的一条边, 即元素  $\{1\}$  和  $\{4\}$  是连通的;
- (2) 当  $\lambda = r_2 = 0.8$ , 元素  $\{1\}$  和  $\{3\}$  是连通的;
- (3) 当  $\lambda = r_3 = 0.7$ , 元素  $\{1\}$  和  $\{2\}$  是连通的。

由以上(1)到(3)步,我们构建模糊邻近关系  $R$  的最小动态连通图(见图 1),它的基本原理是一步步增加连通元素的边。

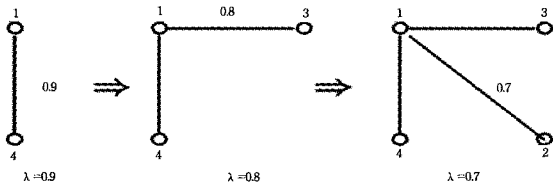


图 1  $R$  的最小动态连通图

用最小连通图表示聚类过程过于细化,为了简化,引入下列概念。

**定义 5** 在算法 1 中,当取定  $\lambda$  值时,关键点  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_2)$  是新出现的,若其在模糊邻近关系  $R$  的最小连通图中是连通的,则记为  $(p_1, q_1) \wedge (p_2, q_2)$ ; 反之,若不连通,则记为  $(p_1, q_1) \vee (p_2, q_2)$ 。将模糊邻近关系  $R$  的动态最小连通图中按照取得关键点的先后顺序用“ $\rightarrow$ ”符号连接新得到的序列,称为生成  $R$  的聚类结构的关键点序列。所有关键点序列的集合称为关键点序列集,用字母  $K$  表示。

在例 1 中,  $R$  的关键点序列集为

$$K = \{(1, 4) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (1, 2)\}$$

由算法 1 和最小连通图可知,下面定理显然成立。

**定理 1** 假定  $R$  是基数为  $n$  的集合  $X$  上的一个模糊邻近关系,则(1)每条关键点序列上有  $n-1$  个关键点;(2)  $R$  的任一条关键点序列唯一确定其聚类结构。

定理 1 给出了有限集  $X$  上的关键点序列性质,说明了关键点序列是一个模糊邻近关系的关键特性。关键点序列是按照定义 5 的规则连接关键点得到的,使得计算复杂度从  $O(n^2)$  降低为  $O(n)$ 。

### 3 基于粒度空间的聚类结构分析

张铃等在文献[13]中基于模糊商空间提出模糊集的结构分析,同时给出模糊集的同构原理和相似原理来解释;对于同一个模糊概念人们依据不同的隶属函数可以获得相同或相似

的结果。大多学者讨论概率意义下的描述,张铃指出结构上的描述比概率上的描述更本质。以下将在粒度空间的基础上研究模糊邻近关系关于聚类结构的同构及相似问题,同时揭示模糊邻近关系的同构和相似之间的联系。

#### 3.1 模糊邻近关系的同构性

**定义 6** 设  $R_1, R_2$  是  $X$  上的两个模糊邻近关系,它们的粒度空间分别是  $\mathcal{N}_{TR_1}(X)$  和  $\mathcal{N}_{TR_2}(X)$ 。若  $\mathcal{N}_{TR_1}(X) = \mathcal{N}_{TR_2}(X)$ , 则称模糊邻近关系  $R_1$  和  $R_2$  关于聚类结构是同构的,记作  $R_1 \cong R_2(T)$ , 其中  $T$  表示传递性。

**定义 7** 设  $R$  是  $X$  上的模糊邻近关系,映射  $f$  作用在  $R$  上且  $f(R)$  也是  $X$  上的模糊邻近关系。若  $R$  和变换  $f$  作用后,  $f(R)$  的粒度空间满足  $\mathcal{N}_{TR}(X) = \mathcal{N}_{Tf(R)}(R)$ , 则称  $R$  在变换  $f$  下聚类结构保持不变。

**定理 2** 设  $R_1, R_2$  是  $X$  上的两个模糊邻近关系,  $D_i = \{R_i(x, y) | x, y \in X\}, i=1, 2$ 。若存在 1-1 对应的严格增函数  $f: D_1 \rightarrow D_2$  (或  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ), 满足  $f(1)=1$  使得  $\forall x, y \in X, R_2(x, y) = f(R_1(x, y))$ , 则  $R_1 \cong R_2(T)$ , 即  $R_1$  在变换  $f$  下聚类结构保持不变。反之,也成立。

证明:类似于文献[18]中定理 8.2 的证明,由定义 6 和定义 7 容易知此定理成立,此略。

定理 2 从函数变换角度说明了保持聚类结构不变所需的条件。同构的两个模糊邻近关系间可以构建 1-1 对应函数。

例 2 论域  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , 给定  $X$  上两个模糊邻近关系  $R_1$  和  $R_2$  如下:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.6 & 0.6 \\ 0.9 & 1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1$  和  $R_2$  的粒度空间分别为  $\mathcal{N}_{TR_1}(X), \mathcal{N}_{TR_2}(X)$ :  $\mathcal{N}_{TR_1}(X) = \{X_1(1) = \{\{1\}, \dots, \{4\}\}, X_1(0.8) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, X_1(0.7) = \{X\}\}, \mathcal{N}_{TR_2}(X) = \{X_2(1) = \{\{1\}, \dots, \{4\}\}, X_2(0.9) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, X_2(0.6) = \{X\}\}$ 。

不难发现,  $X_1(1) = X_2(1), X_1(0.8) = X_2(0.9), X_1(0.7) = X_2(0.6)$ , 即  $\mathcal{N}_{TR_1}(X) = \mathcal{N}_{TR_2}(X)$ , 根据定义 6,  $R_1 \cong R_2(T)$ 。

例 2 说明不同的阈值决定了不同的等价类,且阈值与关键值一致,而关键值取决于关键点的隶属函数。在例 2 中,  $R_1$  和  $R_2$  的关键点序列集分别为  $K_1$  和  $K_2$ :  $K_1 = \{(1, 2) \rightarrow (2, 3) \wedge (1, 4)\}, K_2 = \{(1, 2) \rightarrow (2, 3) \wedge (1, 4), (1, 2) \rightarrow (1, 3) \wedge (1, 4)\}$ , 所以  $K_1 \cap K_2 = K_1$ 。

注 1 模糊邻近关系的关键点序列是不唯一的。

**定理 3 (同构原理)** 设  $R_1, R_2$  是  $X$  上的两个模糊邻近关系,  $K_1$  和  $K_2$  是对应的关键点序列集。若  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , 则  $R_1 \cong R_2(T)$ 。

证明:因为  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , 任选  $L \in K_1 \cap K_2$ ,  $L$  是  $R_1$  和  $R_2$  公共的关键点序列。由定理 1, 任一关键点序列唯一确定其聚类结构, 得证。

定理 3 从关键点序列角度给出了两个模糊邻近关系同构

的判断依据,深刻揭示了保持聚类结构不变的本质。

### 3.2 模糊邻近关系的 $\epsilon$ 相似性

上一节给出了模糊邻近关系的同构定义,并给出了模糊邻近关系的同构原理。但同构的条件太强,需要粒度空间完全相同。如果粒度空间不同,但结构上很相似,该如何来描述它呢? 以下将研究这一问题。

**定义 8** 给定  $X$  上两模糊邻近关系  $R_1, R_2$  及  $\epsilon > 0$ , 若存在  $X$  上模糊邻近关系  $R_3$  满足:  $R_1 \cong R_3(T)$  且  $\forall x, y \in X, |R_3(x, y) - R_2(x, y)| \leq \epsilon$ , 或者  $R_2 \cong R_3(T)$  且  $\forall x, y \in X, |R_3(x, y) - R_1(x, y)| \leq \epsilon$ , 则称  $R_1$  与  $R_2$  关于聚类结构是  $\epsilon$  相似, 记作  $R_1 \sim R_2(T, \epsilon)$ 。

**定理 4** 给定  $X$  上两模糊邻近关系  $R_1, R_2$  及  $\epsilon > 0$ , 对应的粒度空间分别是:

$$\mathcal{N}_{TR_i}(X) = \{X_i(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1\} (i=1, 2)$$

则  $R_1 \sim R_2(T, \epsilon)$  当且仅当  $\forall \lambda \in [0, 1], \exists \mu \in [0, 1]$ , 使得  $X_2(\mu - \epsilon) \leq X_1(\lambda) \leq X_2(\mu + \epsilon)$ , 或者  $\forall \mu \in [0, 1], \exists \lambda \in [0, 1]$ , 使得  $X_1(\lambda - \epsilon) \leq X_2(\mu) \leq X_1(\lambda + \epsilon)$ 。

证明: 类似于文献[18]中定理 8.4 之证明, 由定义 2、定义 8 和引理 1 容易给出定理的证明, 此略。

定理 4 表明: 若两个模糊邻近关系相似, 则其中一个模糊邻近关系的聚类结构被另一个模糊关系的聚类结构所限制, 但这种限定关系不是双向的。所以相似关系比同构关系条件弱, 引出下面的定理。

**定理 5** 给定  $X$  上的两模糊邻近关系  $R_1, R_2$ , 若存在 1-1 对应的严格增函数  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  且  $f(1) = 1$ , 使得  $\forall (x, y) \in X$ , 有  $|f(R_1(x, y)) - R_2(x, y)| \leq \epsilon$ ; 或者存在 1-1 对应的严格增函数  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  且  $g(1) = 1$ , 使得  $\forall (x, y) \in X$ , 有  $|g(R_2(x, y)) - R_1(x, y)| \leq \epsilon$ , 则  $R_1$  与  $R_2$  是  $\epsilon$  相似。

证明: 记  $R_3(x, y) = f(R_1(x, y))$ , 由定理 2 得,  $R_1 \cong R_3(T)$ 。于是由定义 8 知:  $R_1$  与  $R_2$  是  $\epsilon$  相似。

**例 3** 论域  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 给定  $X$  上两个模糊邻近关系  $R_1$  和  $R_2$  如下:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.7 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 & 1 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1$  和  $R_2$  的粒度空间分别为  $\mathcal{N}_{TR_1}(X), \mathcal{N}_{TR_2}(X): \mathcal{N}_{TR_1}(X) = \{X_1(1) = \{\{1\}, \dots, \{5\}\}, X_1(0.8) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, X_1(0.6) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}, X_1(0.5) = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}, X_1(0.3) = \{X\}\}; \mathcal{N}_{TR_2}(X) = \{X_2(1) = \{\{1\}, \dots, \{5\}\}, X_2(0.7) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}, X_2(0.6) = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\}, X_2(0.5) = \{X\}\}$ 。

因为  $\mathcal{N}_{TR_1}(X) \neq \mathcal{N}_{TR_2}(X)$ , 所以  $R_1$  与  $R_2$  是不同构的。例 3 中  $R_1$  的关键点的值为  $D_1 = \{1, 0.8, 0.6, 0.5, 0.3\}$ ,  $R_2$  的关键点的值为  $D_2 = \{1, 0.7, 0.6, 0.5\}$ 。尽管  $D_1 \rightarrow D_2$  上不存在 1-1 对应的严格增函数, 但存在  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  满足  $g$

$(1) = 1, 0.7 \rightarrow 0.8, 0.6 \rightarrow 0.5, 0.5 \rightarrow 0.3$ , 且  $\forall x, y \in X$ , 有  $|g(R_2(x, y)) - R_1(x, y)| \leq 0.1$ , 由定理 5 知:  $R_1 \sim R_3(T, 0.1)$ 。

### 3.3 同构性与相似性间的关系

为了更清楚地看到模糊邻近关系的同构性与  $\epsilon$  相似性间的关系, 引入下列概念。

**定义 9** 给定  $X$  上的两模糊邻近关系  $R_1, R_2$  及  $\epsilon > 0$ , 它们的粒度空间是  $\mathcal{N}_{TR_i}(X) = \{X_i(\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1\} (i=1, 2)$ 。若满足  $\forall \lambda \in [0, 1], \exists \mu \in [0, 1]$ , 使得  $X_2(\mu - \epsilon) \leq X_1(\lambda) \leq X_2(\mu + \epsilon)$ , 且  $\forall \mu \in [0, 1], \exists \lambda \in [0, 1], X_1(\lambda - \epsilon) \leq X_2(\mu) \leq X_1(\lambda + \epsilon)$ , 则  $R_1$  与  $R_2$  关于聚类结构是  $\epsilon$  强相似的, 记作  $R_1 \approx R_2(T, \epsilon)$ 。

**定理 6** 设  $R_1$  和  $R_2$  是  $X$  上的两模糊邻近关系,  $\epsilon > 0$ , 则  $R_1 \approx R_2(T, \epsilon) \Leftrightarrow$  存在  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  上的 1-1 对应的严格增函数  $f$  和  $g$  满足  $f(1) = 1, g(1) = 1$ , 且  $\forall x, y \in X$ , 有:

$$|f(R_1(x, y)) - R_2(x, y)| \leq \epsilon, |g(R_2(x, y)) - R_1(x, y)| \leq \epsilon$$

证明: 由定义 9 和定理 5 可直接证得。

**定理 7** 给定有限集  $X$  上的两模糊邻近关系  $R_1, R_2$ , 则  $R_1 \cong R_2(T) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, R_1 \approx R_2(T, \epsilon)$ 。

证明: (1)“ $\Rightarrow$ ”: 由定理 2 和定理 6 可直接证得。

(2)“ $\Leftarrow$ ”: 假设  $\forall \epsilon_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ 。由题意有  $R_1 \approx R_2(T, \epsilon_n)$ , 根据定理 6, 则存在 1-1 对应的严格增函数  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  满足  $f(1) = 1$ , 使得  $\forall (x, y) \in X$ , 有  $|f(R_1(x, y)) - R_2(x, y)| \leq \epsilon_n$ 。

当  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $\forall x, y \in X, f(R_1(x, y)) = R_2(x, y)$ , 定理 3 得证。

引入模糊邻近关系关于聚类结构的强  $\epsilon$  相似的概念, 定理 7 刻画了两个模糊邻近关系同构与  $\epsilon$  相似之间的关系。

**结束语** 本文提出了基于粒度空间的模糊邻近关系聚类结构分析研究, 探讨了模糊邻近关系的聚类结构特性。首先, 给出粒度空间(或聚类结构)的表示和生成算法, 引入关键点序列概念和最小动态连通图诠释模糊邻近关系聚类结构的生成过程; 其次, 引入模糊邻近关系关于聚类结构的同构和  $\epsilon$  相似的概念, 给出了两个模糊邻近关系同构或  $\epsilon$  相似的判定定理; 最后, 引入模糊邻近关系关于聚类结构的强  $\epsilon$  相似的概念, 研究了两个模糊邻近关系同构与强  $\epsilon$  相似之间的关系。这些结论有助于深入研究模糊邻近关系所对应的聚类结构, 为一般的聚类结构分析提供研究工具。

### 参考文献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy Logic=Computing with Words [J]. Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4(2): 103-111
- [2] Pawlak Z. Rough Sets and Intelligent Data Analysis [J]. Information Sciences, 2002, 147(1-4): 1-12
- [3] 张铃, 张钊. 模糊商空间理论(模糊粒度计算方法) [J]. 软件学报, 2003, 14(4): 770-776
- [4] Yao Yi-yu. Artificial Intelligence Perspectives on Granular Computing [J]. Intelligent Systems Reference Library, 2011, 13: 17-34
- [5] Yao Yi-yu. Interpreting Concept Learning in Cognitive Informatics and Granular Computing [J]. Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part B: Cybernetics, 2009, 39(4): 855-866

[6] 蒙祖强,周石泉. 不一致决策系统中基于粒度计算的广义决策规则获取方法研究[J]. 计算机科学,2012,39(1):198-202

[7] Panoutsos G, Mahfouf M. A Neural-fuzzy Modelling Framework Based on Granular Computing: Concepts and Applications [J]. Fuzzy Sets and Systems,2010,161(21):2808-2830

[8] Skowron A, Stepaniuk J, Swiniarski R. Modeling rough granular computing based on approximation spaces [J]. Information Sciences,2012,184(1):20-43

[9] Pedrycz W. The Design of Cognitive Maps: a Study in Synergy of Granular Computing and Evolutionary Optimization [J]. Expert Systems with Applications,2010,37(10):7288-7294

[10] Pedrycz W. Fuzzy Clustering with Viewpoints [J]. Transactions on Fuzzy Systems,2010,18(2):274-284

[11] 陈光,钟宁,姚一豫,等. 粒计算中粒度转换的运算符[J]. 计算机科学,2011,38(12):209-212

[12] 张铃,张钹. 问题求解理论与方法-商空间粒度计算理论及方法[M]. 北京:清华大学出版社,2007

[13] Zhang Ling, Zhang Bo. The Structure Analysis of Fuzzy Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2005,40(1/2):92-108

[14] 张钹,张铃. 模糊相容商空间与模糊子集[J]. 中国科学:信息科学,2011,41(7):1-11

[15] 唐旭清,朱平,程家兴. 基于等腰归一化距离的模糊粒度空间研究[J]. 计算机科学,2008,35(4):142-145

[16] 唐旭清,赵静静,方雪松. 模糊粒度空间的性质研究[J]. 模糊系统与数学,2009,23(5):70-78

[17] 唐旭清,方雪松,朱平. 基于模糊邻近关系的结构聚类[J]. 系统工程与理论实践,2010,30(11):1986-1996

[18] Tang Xu-qing, Zhu Ping, Cheng Jia-xing. The Structural Clustering and Analysis of Metric Based on Granular Space [J]. Pattern Recognition,2010,43(11):3768-3786

[19] 赵立权. 粒度计算的模型研究[D]. 合肥:安徽大学,2007

(上接第 235 页)

如果不改变其他参数,只改变收敛速度  $b$  的值,其性能指标如表 3 所列。

表 3 3 种最优算法在不同收敛速度时得到的布居数和迭代时间

| 参数 $b$ | 一般最优          |       | 共轭梯度算法        |       | 改进算法          |       |
|--------|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-------|
|        | 最短迭代时间<br>(s) | 最优布居数 | 最短迭代时间<br>(s) | 最优布居数 | 最短迭代时间<br>(s) | 最优布居数 |
| 2      | 4.16          | 0.832 | 9.51          | 0.995 | 4.66          | 0.998 |
| 4      | 4.16          | 0.832 | 9.51          | 0.995 | 4.57          | 0.998 |
| 8      | 4.16          | 0.832 | 9.51          | 0.995 | 4.31          | 0.997 |

从表 3 可以看出,随着收敛参数  $b$  值增大到 8,与共轭梯度算法相比,改进算法的迭代时间缩短到 4.31s,收敛速度比前者快了 5.2s;粒子态的最高布居转移率基本保持 0.998,而共轭梯度算法的布居转移率为 0.995。对于一般最优算法,虽然迭代时间比改进算法要短 0.15s,但是其布居转移率只有 0.832。由此可见,收敛速度  $b$  增加,改进的算法不管是收敛速度还是布居转移率,都要优于共轭梯度算法和一般最优算法。

**结束语** 本文讨论了动态控制场下一种改进的量子最优控制算法(IQOCT)的各种收敛迭代情况。由实验仿真结果可以看出,经过适当改进的新算法在跟踪期望目标、加快收敛速度时是有很有效的。研究结果表明,无论控制场权值  $\alpha$ 、收敛速度  $b$  以及迭代步进参数  $\eta$  如何变化,改进算法的粒子态达到最大布居转移率的收敛时间都要优于共轭梯度算法,与一般最优算法基本一致;比较系统实际终态与期望终态之间的误差发现,改进算法的误差最小,共轭梯度算法次之,而一般最优算法的误差最大。此外,仿真结果也表明,通过改变控制场权值  $\alpha$ 、迭代参数  $\eta$  和收敛速度  $b$ ,系统可以一直保持单调收敛不变。

## 参考文献

[1] Perice A P, Dahleh M, Rabitz H. Optimal control of quantum-mechanical system: Existence, numerical approximation, and applications[J]. Physical Review A,1988,37:4950-4964

[2] D'Alessandro D, Dahleh M. Optimal Control of Two-Level Quantum Systems[J]. IEEE Trans. Automat. control,2001,46:866-874

[3] 吴庆林,陈宗海,董道毅. 量子最优控制研究综述[A]//2004 系统仿真技术及其应用学术交流会议论文集,2004[C]. 合肥:中国科技大学出版社,2004:723-728

[4] 陈宗海,董道毅,张陈斌. 量子控制导论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2005:1-232

[5] Shen L, Shi S, Rabitz H. Control of Coherent Wave Function: A Linearized Molecular Dynamics View [J]. Physical Chemistry,1993,97:8874-8881

[6] Palao Jose' P, Kosloff R. Quantum Computing by an Optimal Control Algorithm for Unitary Transformations [J]. Physical Review Letters,2002,89

[7] Khaneja N, Reiss T, Luy B, Glaser S J. Optimal Control of Spin Dynamics in the Presence of Relaxation [J]. Journal of Magnetic Resonance,2003,161:1-9

[8] Huang G M, Tarn T J, Clark J W. On the controllability of quantum-mechanical systems [J]. Journal of Mathematical physics,1983,24(11):260-2615

[9] 丛爽. 量子系统控制中状态模型的建立[J]. 控制与决策,2004,19(10):1105-1108

[10] Borzi A, Stadler X, Hohenester U. Optimal Quantum Control in Nanostructures: Theory and Application to a Generic Three-level System [J]. Physical Review A,2002,66

[11] Ohtsuki Y, Turinici G, Rabitz H. Generalized monotonically convergent algorithms for solving Quantum Optimal Control Problems[J]. Journal of Chemical Physics,2004,120:5509-5517

[12] Zhu W S, Rabitz H. A rapid monotonically convergent iteration algorithm for quantum optimal control over the expectation value of a positive definite operator [J]. Journal of Chemical Physics,1998,109:385-391

[13] Ho T-S, Rabitz H. Accelerated monotonic convergence of optimal control over quantum dynamics [J]. Physical Review E,2010,82(2)

[14] Kumar P, Malinovskaya S A, Malinovskiy V S. Optimal control of population and coherence in three-level  $\Lambda$  systems[J]. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics,2011,44(15):154010-154023

[15] Yang W F, Gong S Q, Niu Y P, et al. Coherent population transfer with chirped few-cycle laser pulses in an excited-doublet four-level system [J]. Chinese Optics Letters,2005,3:435-437