第40卷 第1期
2013年1月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 40 No. 1
Jan 2013

# [0,∞)值柔性逻辑中平均运算模型的研究

杨志晓[1] 范艳峰[1] 何华灿[2]
(河南工业大学信息科学与工程学院 郑州 450001)[1] (西北工业大学计算机学院 西安 710072)[2]

**摘 要** 在柔性逻辑中,不仅命题真值的连续可变性对命题连接词运算模型有影响,而且命题间关系的连续可变性对命题连接词运算模型也有影响。柔性逻辑中的逻辑算子是在其定义域上随广义自相关系数 $k$ 和广义相关系数 $h$ 连续变化的算子簇。详细研究了柔性逻辑平均算子,定义了[0,∞)值零级和一级柔性逻辑平均运算模型。为保证逻辑运算模型的零级完整性,该模型在其定义域内,从最大算子经过概率算子和中心算子,到最小算子单调连续变化,证明了该区间上的4个特殊算子形式。

**关键词** 柔性逻辑,广义自相关性,广义相关性,平均运算模型,[0,∞)值

**中图法分类号** TP18 **文献标识码** A

## Research of [0,∞) Value Flexible Logic Average Operation Model

YANG Zhi-xiao[1] FAN Yan-feng[1] HE Hua-can[2]
(College of Information Science and Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)[1]
(College of Computer, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)[2]

**Abstract** Not only the continuous changeability of propositional truth value, but also the continuous changeability of relations among propositions influence the operation models of propositional connectives in flexible logics. Flexible logic operators are continuously variable operator cluster along with both generalized self-correlation coefficient $k$ and generalized correlation coefficient $h$. This paper studied the flexible average operators, and presented the definition of 0-level and 1-level [0,∞) value logic average operation models. To ensure the 0-level integrity of the model, the average operator cluster in its existential domain, continuously and monotonously transforms from the maximal average operator, passing through probability average operator and central average operator to the minimal average operator, and the four special operators on [0,∞) are proved.

**Keywords** Flexible logic, Generalized self-correlation coefficient, Generalized correlation coefficient, Average operation model, [0,∞) value

## 1 引言

经典逻辑采用非0即1的刚性判断,排除了一切可能存在的不确定性,无法客观描述千姿百态的现实世界。模糊逻辑[1]认为命题的逻辑真值不再是非0即1,而是[0,1]区间里的一个实数。尽管人们在对模糊算子的研究中发现了算子的不唯一性,但人们常常为了某种具体需要定义某个模糊命题连接词运算模型,用实际应用效果来证明它的正确性。这直接影响了模糊逻辑理论上的完善和应用中的效果。

柔性逻辑学认为,逻辑算子不是确定状态下的孤立形态,而是在其定义域上最大算子和最小算子之间连续分布的算子簇。命题间关系的连续可变性,也即关系柔性,是引起算子连续可变的客观原因[2]。

在柔性逻辑学中,关系柔性由两种不同的因素引起。一是命题真值的测量误差,它通过影响非命题的真值计算,从而影响到所有的逻辑运算。这种命题和其非命题之间的相关性称为广义自相关性。另一个是命题和命题之间的关联性,它影响到二元复合命题的真值计算。这种关联性被称为广义相关性。例如:Zadeh算子(最大算子)只适用于命题间关系为最大相吸的情况;概率算子只适用于命题间关系为独立相关的情况;有界算子只适用于命题间关系为最大相斥的情况;突变算子(最小算子)只适用于命题间关系为最大相克的情况。

在柔性逻辑中,真值误差状态的不确定性对柔性命题逻辑运算模型的影响完全反映在N性生成元完整簇上,因此需要N性生成元完整簇来修正广义自相关性(测度误差)对命题真值的影响。命题间的关联性对逻辑运算真值计算的影响全部反映在T/S性生成元完整簇上,因此需要T性生成元完整簇或S性生成元完整簇来修正广义相关性对命题之间关系

到稿日期:2012-03-29 返修日期:2012-08-10 本文受河南省重点科技攻关计划(082102210096),河南省高校青年骨干教师计划(2009GGJS-056),河南工业大学高层次人才基金(2010BS027)资助。

**杨志晓**(1974-),男,博士,副教授,主要研究方向为不确定智能理论、技术与应用;**范艳峰**(1973-),女,博士,副教授,主要研究方向为人工智能,E-mail:yanfengfan@126.com;**何华灿**(1938-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为人工智能。

的影响。这在2.1节中将作进一步的解释。在柔性逻辑运算模型中,误差状态的不确定性用广义自相关系数$k(k\in[0,1])$来刻画,$k$的逻辑意义是通过命题的真值$x$来估计非命题的真值$N(x,k)$时的风险程度。而两个命题之间相关关系的不确定性用广义相关系数$h(h\in[0,1])$来刻画。如果模糊测度没有误差(即$k=0.5$时),则在柔性逻辑学中称其为零级不确定性问题,否则(测量有误差,$k\neq0.5$时)称其为一级不确定性问题。

平均运算一般只存在于数值分析和决策分析中[3],在传统逻辑学中并没有定义过平均运算模型。受到二值逻辑的影响,人们习惯于认为命题只有真假两种,真值相同的两个命题均值不变,不同真假的两个命题求平均运算,结果无定义。所以传统逻辑学认为没有平均命题连接词存在的必要。

但是在连续值逻辑中,均值运算必不可少。因为真值是在定义域中连续变化的,是值域中的一个中间值。而基本算子中运算的结果不大于最小值,或运算的结果不小于最大值,这两种运算都无法表达在最大值和最小值之间的一种折中[3]。所以应该有一种运算来映射出结果在命题最大值和最小值之间的变化,这就是平均运算。

平均运算的物理意义是:对同一事物进行两次观察或测试,结果一般是不同的,其逻辑折中的结果应该是在两次观察结果之间取值。有许多不同的平均计算方法,如算术平均、几何平均、调和平均和指数平均等,其中还有等权和不等权之分。由于在柔性逻辑学中,逻辑算子是在其最大算子和最小算子之间连续分布的算子簇,因此柔性平均运算模型应该可生成所有上述平均模型。同时,为了保证柔性命题连接词运算模型零级完整性,其从最大算子经过概率算子和中心算子到最小算子单调连续变化,算子簇中存在几个特殊算子。例如,在测量无误差状态($k=0.5$),当$h=1$时,柔性平均算子簇模型对应的是Zadeh平均算子(最大平均算子);当$h=0.75$时,对应的是概率平均算子;当$h=0.5$时,对应的是有界(中心)平均算子;当$h=0$时,对应的是突变平均算子(最小平均算子)。

在[0,1]基空间,柔性平均运算模型零级完整簇的变化如图1所示[2]。

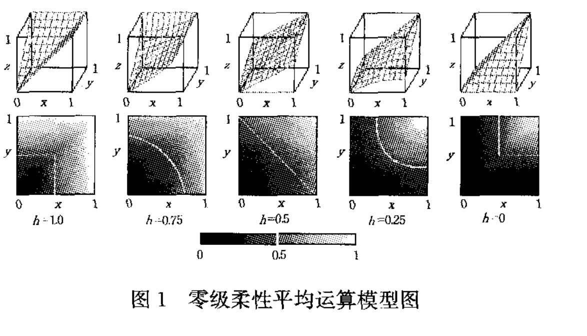


图1 零级柔性平均运算模型图

由于在逻辑学的理论研究中,人们习惯于用1表示绝对的真,用0表示绝对的假,因此目前柔性逻辑学的研究基本上还是针对[0,1]基空间。然而,在当今日益重要的各种复杂巨系统的学科中,许多问题域难以转换到[0,1]区间。因为复杂非线性系统中的许多参变量存在交互作用,很难找到合适的隶属度函数;而且每个人对同一个模糊概念的认识和理解都有差异,在定义隶属函数时均带有很强的主观性。这些都不利于将问题域转化到[0,1]基空间。

并且,从理论上讲,测度的范围可以任意定义。在许多应用场合,用自然的方式表达满足的程度,其物理意义和运算法则更加清晰,信息也更加完整。例如:用[0,100]表示学生对知识的掌握程度;在确定性理论中,用[−1,1]表示确定程度;在没有上限的问题中,用[0,∞)表示程度最直观。

对于不同定义域上的逻辑模型,很多问题的性质将发生很大的变化,特别是在N/T/S性生成元的构造以及对应范数的生成方法上存在很大不同。例如,已有研究者对有限确定值$[a,b]$空间的柔性逻辑运算模型进行过深入的研究[4],其中T/S性生成元分为自守增型和极限减型。根据我们对[0,∞)区间上生成元类型的研究,T性生成元有自守增型和扩展增型,S性生成元有自守增型和有界减型。

针对上述问题以及对以自然方式表达满足程度的需要,亟需解决[0,1]区间以外问题域的逻辑推理问题。篇幅所限,本文对于[0,∞)值柔性逻辑运算模型的理论基础建立不再赘述,部分研究成果已发表在相关文献中[5,6]。

实际的推理决策中如何综合计算各因素的影响,文献[3]对集成算子在多属性决策中的研究展开了深入的讨论。本文将着重研究[0,∞)区间上的平均算子模型,并且证明其4个特殊算子形式——Zadeh算子(最大算子)、概率算子、有界算子(中心算子)和突变算子(最小算子)。

## 2 预备知识

### 2.1 柔性逻辑运算模型的生成规则

[0,∞)值柔性逻辑运算模型的建立方法与在其它区间上的模型建立方法一样,以三角范数理论为数学工具,都可以通过以下两类规则建立柔性逻辑运算模型[2]。

(1) 生成基规则

柔性逻辑中每个命题连接词都有自己的生成基,它是在命题的真值没有误差且命题之间的相关性是最大相斥时,也即$k=0.5,h=0.5$时,该命题连接词的运算模型(中心运算模型)。按照基空间变换规则,可以将[0,1]基空间中的基模型变化到各种变种中去。

(2) 生成元规则

基模型只能在没有误差且广义相关性为中性的理想世界中使用。为了处理现实世界中的实际问题,必须先用生成元把它变换到理想世界,经过基模型处理后,再反变换到现实世界中去。由于引起各种命题连接词运算模型不确定性的客观原因是模糊测度之间的广义相关性和广义自相关性,因此在建立柔性命题连接词运算模型时,需要确定两种生成元完整簇,即修正广义自相关性(测度误差)对命题真值影响的N性生成元完整簇,以及修正广义相关性对命题间关系影响的T性生成元完整簇或S性生成元完整簇。

以柔性逻辑学[0,1]基空间中的与运算为例进行说明。与运算的中心基模型如式(1)所示:

$$T(x,y)=\max(0,x+y-1) \quad (1)$$

在柔性逻辑学中，当广义相关系数 $h$ 偏离 0.5 时，$x,y$ 之间相容或相克，或者当广义自相关系数 $k$ 偏离 0.5 时，需要用连续的严格单调一元函数 $f(x)$ 按式(2)、式(3)来双向修正它们对逻辑运算的影响：

$$f(T(x,y))=\max(f(0),f(x)+f(y)-1) \quad (2)$$

$$T(x,y)=f^{-1}(\max(f(0),f(x)+f(y)-1)) \quad (3)$$

经 $f(x)$ 修正之后的 T 范数是阿基米德型 T 范数，这就是 T 性生成元的物理意义。式(3)也可以表示为式(4)的形式：

$$T(x,y,h,k)=F^{-1}(\max(F(0,h,k),F(x,h,k)+F(y,h,k)-1),h,k) \quad (4)$$

式中，$F(x,h,k)$ 称为 T 性生成元完整簇，$F(x,h,k)=F(\Phi(x,k),h)$，$\Phi(x,k)$ 是 N 性生成元完整簇，$k\in[0,1]$，$h\in[0,1]$ 为广义自相关系数和广义相关系数。当无测量误差存在时，也即 $k=0.5$ 时，T 性生成元完整簇表示为 $F_0(x,h)$。由此可见，有测量误差时，柔性与运算模型是一个随 $k$ 和 $h$ 连续变化的算子超簇，此时为一级运算模型；无测量误差时，柔性与运算模型是一个随 $h$ 连续变化的算子簇，此时为零级运算模型。其中，$k$ 是对命题的否定进行估计时的风险程度，$h$ 刻画命题间的关联性。

### 2.2 [0,∞)值柔性逻辑运算基模型

利用[0,∞)区间的 N 性生成元完整簇 $\phi(x,k)$ 和[0,∞)区间的零级 T 性生成元完整簇 $F_0(x,h)$（或 S 性生成元完整簇 $G_0(x,h)$），直接代入各二元命题连接词的基模型，就可以得到各二元命题连接词的运算模型，包括零级完整簇和一级完整超簇，从而实现对各二元命题连接词的定义。

同一个基模型有两种不同的表达：非与表达和非或表达。表达不同，要求代入的生成元完整簇不同。非与表达的基模型要求代入 N 性生成元完整簇和 T 性生成元完整簇；非或表达的基模型要求代入 N 性生成元完整簇和 S 性生成元完整簇。

(1) 非与基模型[2]（NT 性基模型）用中心与运算基模型确定 T 性生成元完整簇 $F_0(x,h)$，生成零级与运算模型，利用中心非运算和零级与运算模型直接定义其它二元运算模型。

(2) 非或基模型[2]（NS 性基模型）用中心或运算基模型确定 S 性生成元完整簇 $G_0(x,h)$，生成零级或运算模型，利用中心非运算和零级或运算模型直接定义其它二元运算模型。

NT 模型和 NS 模型在表达形式上虽然不同，但由于二者之间存在弱对偶关系，因此所描述的运算模型的变化形式是一致的，这从理论上和实际仿真中都得到了证实[7]。

在[0,∞)值柔性逻辑运算模型中，平均算子的 NT 基模型如式(5)所示：

$$M(x,y)=(x+y+2xy)/(2+x+y) \quad (5)$$

在[0,∞)区间，1 是真假的分界点，此时，当模糊测度没有误差时，$N(x)=1/x$[5,6]。

### 2.3 [0,∞)区间幂型 NT 模型完整簇的基本集

根据对[0,∞)值柔性逻辑运算模型的研究，本文采用幂型生成元完整簇来建立平均运算模型。NT 模型完整簇的基本集是指 NT 模型中零级和一级 N/T 性生成元完整簇、N/T 范数完整簇的集合。这些基本的完整簇可以直接代入非、与、或、蕴涵、等价、平均、组合或其它自定义的逻辑连接词运算基模型，从而得到相应的零级和一级运算模型。

[0,∞)值幂型 NT 模型完整簇的基本集包括如下完整簇：

(1) 零级 N 性生成元完整簇：$\phi(x)=x$（一级 N 性生成元完整簇当 $k=0.5$，即 $n=1$ 时退化而成）

(2) 零级 N 范数完整簇：$N(x)=1/x$（退化成中心 N 范数）

(3) 零级 T 性生成元完整簇：$F_0(x,h)=x^m/((1+x)^m-x^m)$

(4) 零级 T 范数完整簇：

$$T(x,y,h)=F_0^{-1}(\max(F_0(0,h),(F_0(x,h)F_0(y,h)-1)/(2+F_0(x,h)+F_0(y,h))),h)$$

(5) 一级 N 性生成元完整簇：$\phi_2(x,k)=x^n/((1+x)^n-x^n)$

(6) 一级 N 范数完整簇：

$$N(x,k)=((1+x)^n-x^n)^{1/n}/((1+x)-((1+x)^n-x^n)^{1/n})$$

(7) 一级 T 性生成元完整簇：

$$F(x,h,k)=F_0(\phi_2(x,k),h)=x^{nm}/((1+x)m^n-x^{nm})$$

(8) 一级 T 范数完整簇：

$$T(x,y,h,k)=F^{-1}(\max(F(0,h,k),(F(x,h,k)F(y,h,k)-1)/(2+F(x,h,k)+F(y,h,k))),h,k)$$

几个重要参数说明及关系[2]：$n$：N 性生成元函数簇位置标志；$k$：广义自相关系数；$m$：T 性生成元函数簇位置标志；$h$：广义相关系数。

这里 $n$ 和 $k$，$m$ 和 $h$ 的关系是：

$n=-1/\log_2 k, k\in[0,1]$；

$k=2^{-1/n}, n\in \mathbf{R}_+$；

$m=(3-4h)/4h(1-h), h\in[0,1]$；

$h=((1+m)-((1+m)^2-3m)^{1/2})/(2m), m\in R$

在[0,∞)区间使用严格单调一元函数 $f(x)$ 按式(6)、式(7)来双向修正它们对逻辑运算的影响：

$$f(T(x,y))=\max(f(0),(f(x)f(y)-1)/(2+f(x)+f(y))) \quad (6)$$

$$T(x,y)=f^{-1}(\max(f(0),(f(x)f(y)-1)/(2+f(x)+f(y)))) \quad (7)$$

[0,∞)值幂型 T 性生成元完整簇（零级和一级）可以满足经式(7)修正后的 T 范数为阿基米德型 T 范数，即可以保证该 T 范数满足[0,∞)区间上 T 范数的边界条件、单调性、连续性、结合律、交换律以及幂小性的条件。

## 3 [0,∞)值柔性逻辑平均命题连接词

这节给出我们自己的研究结果。

### 3.1 $[0,\infty)$值柔性平均命题连接词的定义

在模糊逻辑中，平均运算反映对同一个命题的两个不同真值 $x,y$ 进行逻辑上的折中，要求折中的结果在 $x,y$ 之间。根据我们对$[0,\infty)$值柔性平均运算模型的研究，给出零级和一级柔性平均运算模型的定义。

**定义 1** 由零级 T 性生成元完整簇

$$F_0(x,h)=x^m/((1+x)^m-x^m)$$

代入平均运算的基模型生成的零级 M 范数完整簇

$$M(x,y,h)=N(F^{-1}(\frac{F(N(x),h)+F(N(y),h)+2F(N(x),h)F(N(y),h)}{2+F(N(x),h)+F(N(y),h)},h))$$

实现的逻辑运算叫零级柔性平均运算，用柔性平均命题连接词Ⓟ$_h$表示。

它的 4 个特殊算子如下。

Zadeh 平均算子(最大平均)：

$M(x,y,1)=\mathbf{M}_3=\max(x,y)$

概率平均算子(中极平均)：

$M(x,y,0.75)=\mathbf{M}_2=((1+x)(1+y))^{1/2}-1$

有界平均算子(中心平均)：

$M(x,y,0.5)=\mathbf{M}_1=(x+y+2xy)/(2+x+y)$

突变平均算子(最小平均)：

$M(x,y,0)=\mathbf{M}_0=\min(x,y)$

**定义 2** 由一级 T 性生成元完整簇

$$F(x,h,k)=F_0(\phi_2(x,k),h)=x^{nm}/((1+x)^{nm}-x^{nm})$$

代入平均运算的基模型生成的一级 M 范数完整簇

$$M(x,y,h,k)=N(F^{-1}(\frac{A+B+2AB}{2+A+B},h,k),k)$$

实现的逻辑运算叫一级柔性平均运算，用柔性平均命题连接词Ⓟ$_{h,k}$表示。其中 $A=F(N(x,k),h,k)$，$B=F(N(y,k),h,k)$。

将 T 性生成元完整簇 $F_0(x,h)$ 及其逆代入零级平均 NT 基模型，整理后可以得到零级柔性平均算子：

$$M(x,y,h)=(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}-1 \quad (8)$$

式中，$x,y\in[0,\infty)$，$m=(3-4h)/4h(1-h)$，$h\in[0,1]$，$m\in R$。

在零级不确定性问题中，模糊测度没有误差，由于存在广义相关性，柔性平均运算是一组受广义相关系数 $h$ 控制的、可连续变化的公式簇。给定一个具体广义相关系数 $h$ 值，就给定了一个具体的运算公式。在一级不确定性问题中，模糊测度有误差，由于存在广义自相关性，柔性平均运算是一组受广义自相关系数 $k$ 和广义相关系数 $h$ 共同控制的、可连续变化的公式簇，简称为超簇。给定一个具体广义自相关系数 $k$ 值，就给定了一个具体的运算公式簇，再给定一个具体的系数 $h$ 值，就给定了一个具体的运算公式(算子)，反之亦然。

### 3.2 $[0,\infty)$值柔性平均命题连接词运算模型中的特殊算子

在零级不确定问题中，模糊测度没有误差，模糊非运算是单一的公式。但是由于存在广义相关性，柔性平均运算模型不再是单一的公式，而是一组受广义相关系数 $h$ 控制的、可连续变化的公式簇。因此，这种可在最大算子和最小算子之间连续变化的完整运算公式簇表示的运算为柔性运算，它可以精确地描述命题之间关系的不确定性。

在$[0,1]$基空间零级不确定问题中，模糊非运算为确定的 $N(x)=1-x$，0.5 是偏真和偏假的分界线，其零级柔性平均算子是：

$$M(x,y,h)=1-((1-x)^m+(1-y)^m)/2)^{1/m}$$

式中，$m=(3-4h)/4h(1-h)$，$h\in[0,1]$；

$h=((1+m)-((1+m)^2-3m)^{1/2})/(2m)$，$m\in R$

它的 4 个特殊算子是：

Zadeh 平均：$M(x,y,1)=\max(x,y)$；

概率平均：$M(x,y,0.75)=1-((1-x)(1-y))^{1/2}$；

有界平均：$M(x,y,0.5)=(x+y)/2$；

突变平均：$M(x,y,0)=\min(x,y)$。

在$[0,\infty)$值零级不确定问题中，模糊测度没有误差，模糊非运算是单一的公式 $N(x)=1/x$。$[0,\infty)$值柔性平均运算模型也是一组受广义相关系数 $h$ 控制的、可连续变化的公式簇。为了保证$[0,\infty)$值柔性平均命题连接词运算模型零级完整性，使之在其存在域内，从 Zadeh 平均算子(最大平均算子)经过概率平均算子和中心平均算子到突变平均算子(最小平均算子)单调连续变化，在$[0,\infty)$区间，也存在 4 个特殊算子。也即平均运算模型在 $k=0.5$(无测量误差时的零级模型)，$h$ 分别取 1，0.75，0.5，0 时，算子簇分别对应 4 个特殊算子——Zadeh 平均算子、概率平均算子、有界平均算子和突变平均算子。

**定理 1** 当 $h=1$ 时，$m\to-\infty$，二元零级柔性平均运算为最大平均算子，也称 Zadeh 平均算子：

$$M(x,y,1)=\max(x,y)$$

证明：因为

$$M(x,y,1)=(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}-1$$

$$\lim_{m\to-\infty}(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}$$
$$=\lim_{m\to-\infty}e^{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}}$$
$$=\lim_{m\to-\infty}e^{\frac{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))}{m}}$$
$$=e^{\lim\limits_{m\to-\infty}\frac{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))}{m}}$$

由洛必达法则，得：

$$\lim_{m\to-\infty}\frac{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))'}{m'}$$
$$=\lim_{m\to-\infty}\frac{(1+y)^m\ln(1+x)+(1+x)^m\ln(1+y)}{(1+x)^m+(1+y)^m}$$
$$=\lim_{m\to-\infty}((\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1+y})^m})\ln(1+x)+(\frac{1}{1+(\frac{1+y}{1+x})^m})\ln(1+y)) \quad (9)$$

1) 设 $x=y$，则式(9)为 $\ln(1+x)=\ln(1+y)$，$M(x,y,1)=x=y$；

2) 设 $x>y$，有 $1+x>1+y$，则式(9)为 $\ln(1+x)$，$M(x,y,1)=x$；

3) 设 $x<y$，有 $1+x<1+y$，则式(9)为 $\ln(1+y)$，$M(x,$

$y,1)=y$。

故 $M(x,y,1)=\max(x,y)$。

**定理 2** 当 $h=0.75$ 时,$m\to 0$,二元零级柔性平均运算为概率平均算子:

$$M(x,y,0.75)=((1+x)(1+y))^{1/2}-1$$

证明:因为

$$M(x,y,0.75)=(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}-1$$

$$\lim_{m\to 0}(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}$$

$$=e^{\lim\limits_{m\to 0}\frac{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))}{m}}$$

$$\lim_{m\to 0}\frac{\ln(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))'}{m'}$$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{(1+y)^m\ln(1+x)+(1+x)^m\ln(1+y)}{(1+x)^m+(1+y)^m}$$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+y)}{2}$$

$$=\lim_{m\to 0}\ln(1+x)^{1/2}(1+y)^{1/2}$$

因此 $M(x,y,0.75)=((1+x)(1+y))^{1/2}-1$。

**定理 3** 当 $h=0.5$ 时,$m=1$,二元零级柔性平均运算为有界平均算子,即算术平均算子:

$$M(x,y,0.5)=(x+y+2xy)/(2+x+y)$$

证明:因为

$$M(x,y,0.5)=(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}-1$$
$$=(x+y+2xy)/(2+x+y)$$

**定理 4** 当 $h=0$ 时,$m\to\infty$,二元零级柔性平均运算为突变平均算子:

$$M(x,y,0)=\min(x,y)$$

证明:因为

$M(x,y,0)=(2(1+x)^m(1+y)^m/((1+x)^m+(1+y)^m))^{1/m}-1$,同定理 1,

1) 设 $x=y$,则式(9)为 $\ln(1+x)=\ln(1+y)$,$M(x,y,0)=x=y$;

2) 设 $x>y$,有 $1+x>1+y$,则式(9)为 $\ln(1+y)$,$M(x,y,0)=y$;

3) 设 $x<y$,有 $1+x<1+y$,则式(9)为 $\ln(1+x)$,$M(x,y,0)=x$。

故 $M(x,y,0)=\min(x,y)$。

柔性平均运算与广义相关性有关:(i)当 $h=1$ 时两事件最大相关,小测度事件应完全包含在大测度事件中,均值是最大值;(ii)当 $h=0.75$ 时两事件独立相关,均值是几何平均的对偶;(iii)当 $h=0.5$ 时两事件最大相斥,双方有平等的贡献,均值是算术平均;(iv)当 $h=0$ 时两事件最大相克,两次观察相互矛盾,均值是两事件的共同部分即最小值。由于在[0,∞)区间的不动点为 1,也即 1 是[0,∞)值域中命题偏真还是偏假的分界线[5,6],因此这里几何平均和算术平均与[0,1]基空间上的传统表达形式不同。

**结束语** 在柔性逻辑学中,关系柔性使得逻辑运算模型在其定义域上是随广义自相关系数 $k$ 和广义相关系数 $h$ 连续变化的算子超簇。在实际应用中,如何根据具体问题确定模型中的参数?对于广义自相关系数 $k$,如果已知分布函数,那么根据常规计算方法或者 $Nlk$ 方法[5,8],可以确定 $k$ 的取值。对于广义相关系数 $h$ 的确定,具体问题不同,参数的确定方法也不一样。文献[9]针对时间序列组合预测的需要,建立了基于[0,1]基空间上的零级柔性平均算子的时间序列组合预测模型。我们也采用[0,∞]值柔性平均算子实现了拟支持向量的选择,篇幅所限,将在其它文章中详细论述。这些应用中都对模型中广义相关系数 $h$ 的估计算法进行了详细的讨论。当然,未来我们也将对其它几个基本逻辑算子进行深入的研究,并将其用于实际应用中的推理控制。

同时,在复杂系统中,由于各因素之间的不确定性,必然要考虑到其间的不等权性,这就需要研究如何建立各种柔性逻辑加权运算模型,从而满足实际应用中推理、决策的要求。所以,为实际工程应用提供更可靠的推理控制模型,建立变量的线性加权、指数加权,以及生成元加权运算模型[10,11],也是下一步的研究重点。

## 参 考 文 献


[1] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems,1978,1(1):3-28

[2] 何华灿,王华,刘永怀,等. 泛逻辑学原理[M]. 北京:科学出版社,2001

[3] Luo Xu-dong,Jennings N R. A spectrum of compromise aggregation operators for multi-attribute decision making[J]. Artificial Intelligence,2007,171(2/3):161-184

[4] Mao Ming-yi,Chen Zhi-cheng,He Hua-can. A new uniform neuron model of generalized logic operators based on [a,b][J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2006,20(2):159-171

[5] 范艳峰,何华灿. [0,∞)区间的 N 范数及广义自相关系数 k 的计算方法[J]. 西北工业大学学报,2010,28(2):270-275

[6] 范艳峰,何华灿. [0,∞)区间 N 范数的定义及生成定理[J]. 计算机科学,2010,37(5):190-193

[7] 何华灿,刘永怀,白振兴,等. 一级泛非运算研究[J]. 计算机学报(增刊),1998,21:24-28

[8] 陈志成. 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究[D]. 西安:西北工业大学,2004

[9] 贾澎涛. 基于柔性逻辑的时间序列数据挖掘[D]. 西安:西北工业大学,2008

[10] Luo Xu-dong,Lee J H-M,Leung H-f,et al. Prioritised fuzzy constraint satisfaction problems:axioms,instantiation and validation[J]. Fuzzy Sets and Systems,2003,136(2):151-188

[11] Luo Xu-dong,Zhang Cheng-qi,Cai Jing-qiu. The Weighting Issue in Fuzzy Logic[J]. Informatica:An International Journal of Computing and Informatics,1997,21(2):255-262