量化上下文无关语言的代数性质

付雯静　韩召伟

（陕西师范大学数学与信息科学学院　西安 710119）

摘　要　通过引入量化下推自动机与量化上下文无关文法的定义，研究了以两种不同方式接受语言的量化下推自动机等价性问题，证明了在可交换的双幺赋值幺半群上，量化下推自动机接受的语言与量化上下文无关文法生成的语言相同。

关键词　双幺赋值幺半群，量化下推自动机，量化上下文无关文法，量化上下文无关语言

中图法分类号　TP301.1，O159　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2017.07.010

Algebraic Properties of Quantitative Context-free Languages

FU Wen-jing　HAN Zhao-wei

(School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract　By introducing the concepts of quantitative pushdown automata and quantitative context-free grammars, this paper investigated the equivalent relation that a quantitative language can be accepted by quantitative pushdown automata in two different ways. It is showed the fact that quantitative pushdown automata can accept the same quantitative context-free languages which are generated by quantitative context-free grammars over commutative double unital valuation monoid in the meanwhile.

Keywords　Double unital valuation monoid, Quantitative pushdown automaton, Quantitative context-free grammar, Quantitative context-free language

自动机[1]是计算理论中最重要的数学模型之一，它是现代计算机科学理论的基石。自动机理论不仅应用于软件工程、人工智能、程序语言等领域，还可应用于心理学、语言学等领域。然而现实生活的自然语言往往带有一定的模糊性和不确定性，由于经典的自动机理论并不能很好地处理这种不确定性，因此模糊自动机理论成为人们研究的焦点。1969 年 Lee[2]首次提出了取值于单位区间[0,1]的模糊自动机理论。2005 年应明生[4]提出了基于量子逻辑的自动机理论。2007 年邱道文[6]等建立了基于完备剩余格值逻辑的自动机模型。2011 年李永明[8]进一步提出了取值于一般格的有穷自动机理论。随后，状态转移权重取值于半环、双半环的加权自动机理论[9]成为计算机科学、代数学研究的热点。2008 年 Chatterjee[10]等人提出了一种基于赋值函数的自动机，其可被用于解决计算平均长期最大消耗、长期最大产出等实际问题。2011 年 Droste[11-12]等人推广了赋值函数的概念，得到了赋值幺半群这一代数结构，此代数结构可囊括量子逻辑、完备剩余格、格半群、半环等代数结构；并讨论了取值于赋值幺半群的加权自动机的相关问题。下推自动机和上下文无关文法是计算理论中另外两类重要的数学模型，在编译语言、算法设计等方面有着重要的应用。本文在文献[11-12]的基础上进行探索，引入了量化下推自动机、量化上下文无关文法的定义，研究了量化下推自动机接受的语言与量化上下文无关文法生成的语言之间的关系。

1　预备知识

若 Σ 是一非空有限集合，令 $\Sigma^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Sigma^k$，其中 $\Sigma^k=\{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k \mid \sigma_i\in\Sigma, 1\leqslant k\leqslant n\}$。

定义 1[11-12]　设 $(D,+,0)$ 是可交换的幺半群，若 D 上的赋值函数 $val: D^+\to D$ 满足：

(1) $\forall d\in D, val(d)=d$；

(2)若存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $d_i=0$，则 $val(d_1,\cdots,d_n)=0$。

则称 D 是赋值幺半群，记为 $(D,+,val,0)$。

定义 2　设 $(D,+,val,0)$ 是赋值幺半群，若存在 $1\in D$，使得 $val(d_1,d_2,\cdots,d_{i-1},1,d_{i+1},\cdots,d_n)=val(d_1,d_2,\cdots,d_{i-1},d_{i+1},\cdots,d_n)$，则称 D 为双幺赋值幺半群，记为 $(D,+,val,0,1)$。

例 1　设 $(R\cup\{-\infty\}, sup, avg, -\infty)$ 是赋值幺半群，其中 $avg(a_1,\cdots,a_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，定义 $(\bar{R}, sup_1, avg_1, -\infty, +\infty)$ 如下，$\bar{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$，$sup_1(a_1,a_2)=$

到稿日期：2016-08-20　返修日期：2016-11-05　本文受国家自然科学基金资助项目(11401361，11226266，61572016)，中央高校基本科研业务费资助项目(GK201402002)资助。

付雯静(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为计算智能，E-mail：fuwenjing666@snnu.edu.cn；**韩召伟**(1981－)，男，博士，副教授，主要研究方向为计算机软件与理论、量子计算与量子逻辑，E-mail：hanzw888@snnu.edu.cn(通信作者)。

$\begin{cases}\sup(a_1,a_2), & a_1,a_2\in R\cup\{-\infty\}\\ +\infty, & \text{否则}\end{cases}$，$avg_1(a_1,a_2,\cdots,a_n)=avg(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，$a_i\in\bar{R}$，$1\leqslant i\leqslant n$，$b_j\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\setminus\{+\infty\}$，$1\leqslant j\leqslant m$，即 $b_1,\cdots,b_m$ 为 $a_1,\cdots,a_n$ 去掉 $+\infty$ 后所得子列 $avg_1(+\infty)=+\infty$，则 $(\bar{R},sup_1,avg_1,-\infty,+\infty)$ 是双幺赋值幺半群。

例2 对于伪半环 $S=(\{0,1,2\},\oplus,\Delta,0,1)$，其中 $a\oplus b=\max(a,b)$，$a\Delta b=(a\cdot b)\bmod 3$，$\forall a,b\in\{0,1,2\}$，记 S 上的 2×2 矩阵为 $S^{2\times 2}$，$\forall A,B\in S^{2\times 2}$，令 $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$，定义+和∘如下：

$$A+B=\begin{pmatrix}\max(a_1,a_2) & \max(b_1,b_2)\\ \max(c_1,c_2) & \max(d_1,d_2)\end{pmatrix}$$

$$A\circ B=\begin{pmatrix}\max(a_1\Delta a_2,b_1\Delta c_2) & \max(a_1\Delta b_2,b_1\Delta d_2)\\ \max(c_1\Delta a_2,d_1\Delta c_2) & \max(c_1\Delta b_2,d_1\Delta d_2)\end{pmatrix}$$

$\forall A_1,A_2,\cdots,A_n\in S^{2\times 2}$，令 $val(A_1,A_2,\cdots,A_n)=((\cdots(A_1\circ A_2)\circ A_3)\cdots)\circ A_n$，则 $(S^{2\times 2},+,val,\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix})$ 为双幺赋值幺半群。

2 量化下推自动机

定义3 设 $(D,+,val,0)$ 是赋值幺半群，量化下推自动机（简记为 QPDA）是七元组 $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$，其中 Q，Σ，Γ 分别是非空的有限状态集、有限输入字符集、有限栈字母表，D-值状态转移函数 $\delta:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma\rightarrow D_f(Q\times\Gamma^*)$，$D_f(Q\times\Gamma^*)$ 表示 $Q\times\Gamma^*$ 的 D-值有限子集，$Z_0\in\Gamma$ 为初始堆栈字母，$I:Q\rightarrow D$，$F:Q\rightarrow D$ 分别为量化初始状态和量化终状态。

定义4 设 $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$ 是 QPDA，三元组 $(q,w,\gamma)\in Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$ 称为 $\mathscr{M}$ 的一个瞬时描述（简记为 ID），表示 $\mathscr{M}$ 处于状态 q。w 为当前未处理的字符串，而 $\mathscr{M}$ 注视着 w 的首字符，栈中字母串为 γ。同时定义 $\vdash_M:(Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*)\times(Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*)\rightarrow D$：若 $\delta(q,\tau,X)(p,Z)=d$，则 $\vdash_M((q,\tau w,X\beta)(p,w,Z\beta))=d$，任意 $p,q\in Q$，$\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$w\in\Sigma^*$，$X\in\Gamma$，$Z,\beta\in\Gamma^*$。

对任意 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m\in\Sigma^*$，若 $\vdash_M((q_1,\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m,Z_1\gamma_1)(q_2,\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_m,Z_2\gamma_2))=d_1$，$\vdash_M((q_2,\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_m,Z_2\gamma_2)(q_3,\sigma_3\sigma_4\cdots\sigma_m,Z_3\gamma_3))=d_2$，$\cdots$，$\vdash_M((q_n,\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\sigma_m,Z_n\gamma_n)(q_{n+1},\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\cdots\sigma_m,Z_{n+1}\gamma_{n+1}))=d_n$，则定义 $\vdash_M^*((q_1,\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m,Z_1\gamma_1)(q_{n+1},\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\cdots\sigma_m,Z_{n+1}\gamma_{n+1}))=val(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，其中 $q_i\in Q$，$Z_i\in\Gamma$，$\gamma_i\in\Gamma^*$，$1\leqslant i\leqslant n+1$。在双幺赋值幺半群上，对任意 $(q,w,\gamma)\in Q\times\Sigma^*\times\Gamma^*$，定义 $\vdash_M^*((q,w,\gamma)(q,w,\gamma))=1$。

定义5 设 $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$ 是 QPDA，对任意 $w\in\Sigma^*$，$w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\in(\Sigma\cup\{\varepsilon\})$，定义 D-值成功路径 $path_M^F:\Sigma^*\rightarrow D$：$path_M^F(w)=val(I(q_0),\vdash_M((q_0,w,Z_0)(q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)),\vdash_M((q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)(q_2,\sigma_3\cdots\sigma_n,Z_2\gamma_2)),\cdots,\vdash_M((q_{n-1},\sigma_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1})(q_n,\varepsilon,Z_n\gamma_n)),F(q_n))$，其中 $q_0,q_i,q_n\in Q$，$Z_i\in\Gamma$，$Z_n\in\Gamma\cup\{\varepsilon\}$，$\gamma_i,\gamma_n\in\Gamma^*$，$1\leqslant i\leqslant n-1$。而定义 D-值成功路径 $path_M^{\varnothing}$，$\Sigma^*\rightarrow D$：$path_M^{\varnothing}(w)=val(I(q_0),\vdash_M((q_0,w,Z_0)(q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)),\vdash_M((q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)(q_2,\sigma_3\cdots\sigma_n,Z_2\gamma_2)),\cdots,\vdash_M((q_{n-1},\sigma_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1})(q_n,\varepsilon,\varepsilon)))$，其中 $q_0,q_i\in Q$，$Z_i\in\Gamma$，$\gamma_i\in\Gamma^*$，$1\leqslant i\leqslant n-1$。记 QPDA $\mathscr{M}$ 的所有 D-值成功路径集合为 $PATH(M)$。

定义6 设 $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$ 为 QPDA，对任意 $w\in\Sigma^*$，$w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$，其中 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，定义 $\|\mathscr{M}^F\|:\Sigma^*\rightarrow D$ 为以终状态方式接受的语言，$\|\mathscr{M}^F\|(w)=\sum\{path_M^F(w)\mid path_M^F\in PATH(M)\}$；定义 $\|\mathscr{M}^{\varnothing}\|:\Sigma^*\rightarrow D$ 为以空栈方式接受的语言，$\|\mathscr{M}^{\varnothing}\|(w)=\sum\{path_M^{\varnothing}(w)\mid path_M^{\varnothing}\in PATH(M)\}$。

注1：本文中的 QPDA 与文献[1,5-6]的不同之处在于：1）本文 QPDA 的初始和终止状态不是经典的，而是带有一定量化值；2）当限制 QPDA 的初始和终止状态为经典集合时，则有以下结果：若 $(D,+,val,0)$ 限制为 $\{0,1\}$ Boole 代数，即取 $val(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d_1\wedge d_2\wedge\cdots\wedge d_n$，$+=\vee$ 时，则定义3的 QPDA 即为经典 PDA；类似地，若 $(D,+,val,0)$ 限制为量子逻辑 $l=(L,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$，即取 $val(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d_1\wedge d_2\wedge\cdots\wedge d_n$，$+=\vee$ 时，QPDA 即为文献[6]的 l-VPDA；同理，若 $(D,+,val,0)$ 为完备剩余格 $\langle L,+,\cdot,\odot,\rho\rangle$ 诱导的赋值幺半群，即 $val(d_1,d_2,\cdots,d_n)=d_1\odot d_2\odot\cdots\odot d_n$，$+=+$ 时，则定义3中的 QPDA 即为文献[7]的 $\mathscr{L}$-PDA。

对 $S:\Sigma^*\rightarrow D$，若存在 QPDA $\mathscr{M}$ 使得 $S=\|\mathscr{M}^F\|$ 或 $S\|\mathscr{M}^{\varnothing}\|$，则称 S 为 Σ 上以终状态或以空栈方式接受的量化上下文无关语言。若不特别指定接受方式，S 也称为量化上下文无关语言。

为了便于区分 QPDA 以终状态和以空栈方式接受语言，以空栈方式接受语言的 QPDA 记为 $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$。

定义7 设 $\mathscr{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$ 是 QPDA，若 $|suppI|=1$，则称 $\mathscr{M}_1$ 为量化简单型下推自动机（简记为 QSPDA）。若 QPDA $\mathscr{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$ 和 $\mathscr{M}_1=(Q_1,\Sigma,\Gamma_1,\delta_1,I_1,Z_1,F_1)$ 接受相同的量化上下文无关语言，即对任意的 $w\in\Sigma^*$，$\|\mathscr{M}^F\|(w)=\|\mathscr{M}_1^F\|(w)$，则称 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}_1$ 等价，记为 $\mathscr{M}\equiv\mathscr{M}_1$。

在经典自动机理论中，以终状态方式接受语言的下推自动机与以空栈方式接受语言的下推自动机等价，研究发现量化下推自动机存在着相似的结论。所以下面将先讨论 QSPDA 与 QPDA 的关系，并借助 QSPDA 来研究以两种不同方式接受语言的量化下推自动机的等价性问题。

命题1 设 $\mathscr{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$ 为任一以空栈方式接受语言的 QPDA，若 $(D,+,val,0,1)$ 为双幺赋值幺半群，则存在 QSPDA $\mathscr{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,\varnothing)$，使得对任意的 $w\in\Sigma^*$，$\|\mathscr{M}_1^{\varnothing}\|(w)=\|\mathscr{M}_2^{\varnothing}\|(w)$。

证明：对于 QPDA $\mathscr{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$，构造 QSPDA $\mathscr{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,\varnothing)$ 如下：$Q'=Q\cup\{p_0\}$，$\Gamma'=\Gamma\cup\{X_0\}$，其中 $p_0\notin Q$，$X_0\notin\Gamma$，$I'(q)=\begin{cases}1, & q=p_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$，$D$-值状态转移函数 $\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma'\rightarrow D_f(Q'\times\Gamma'^*)$ 为：

1）$\delta'(p_0,\varepsilon,X_0)(q,Z_0)=I(q)$，$\forall q\in Q$；

2）$\delta'(q,\tau,X)(p,\gamma)=\delta(q,\tau,X)(p,\gamma)$，$\forall q,p\in Q$，$\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$X\in\Gamma$，$\gamma\in\Gamma^*$。

对任意 $w=\sigma_1\cdots\sigma_n\in\Sigma^*$，$\sigma_i\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$i=1,\cdots,n$，由定义

6 有：$\| \mathcal{M}_2^{\varnothing} \|(w)=\sum\{path_{M_2}^{\varnothing}(w) \mid path_{M_2}^{\varnothing}\in PATH(M_2)\}=\sum val(1, \vdash_{M_2}((p_0,w,X_0)(q_0,w,Z_0)), \vdash_{M_2}((q_0,w,Z_0)(q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)), \vdash_{M_2}((q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)(q_2,\sigma_3\cdots\sigma_n,Z_2\gamma_2)),\cdots, \vdash_{M_2}((q_{n-1},\sigma_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1})(q_n,\varepsilon,\varepsilon))) \mid q_0,q_j,q_n\in Q, Z_j\in\Gamma, \gamma_j\in\Gamma^*, 1\leqslant j\leqslant n-1\}=\sum\{val(I(q_0), \vdash_{M_1}((q_0,w,Z_0)(q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)), \vdash_{M_1}((q_1,\sigma_2\cdots\sigma_n,Z_1\gamma_1)(q_2,\sigma_3\cdots\sigma_n,Z_2\gamma_2)),\cdots, \vdash_{M_1}((q_{n-1},\sigma_n,Z_{n-1}\gamma_{n-1})(q_n,\varepsilon,\varepsilon))) \mid q_0,q_j,q_n\in Q, Z_j\in\Gamma, \gamma_j\in\Gamma^*, 1\leqslant j\leqslant n-1\}=\sum\{path_{M_1}^{\varnothing}(w) \mid path_{M_1}^{\varnothing}\in PATH(M_1)\}=\| \mathcal{M}_1^{\varnothing} \|(w)$。因此，对任意 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^{\varnothing} \|(w)=\| \mathcal{M}_2^{\varnothing} \|(w)$，即 $\mathcal{M}_1\equiv\mathcal{M}_2$。

定理 1　设$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，$\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$为任一以空栈方式接受语言的 QPDA，当且仅当存在 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,\varnothing)$，使得对任意 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^{\varnothing} \|(w)=\| \mathcal{M}_2^{\varnothing} \|(w)$。

命题 2　设 $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$为任一以终状态方式接受语言的 QPDA，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则存在 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,F')$，使得对任意的 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^F \|(w)=\| \mathcal{M}_2^F \|(w)$。

证明：对于 QPDA $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0F)$，构造 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,F')$：$Q'=Q\cup\{p_0\}$，$\Gamma'=\Gamma\cup\{X_0\}$，$p_0\notin Q$，$X_0\notin\Gamma$，$I'(q)=\begin{cases}1, & q=p_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$，$F'(q)=\begin{cases}F(q), & q\in Q\\ 0, & q=p_0\end{cases}$，$D$-值状态转移函数 $\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma'\to D_f(Q'\times\Gamma'^*)$为：

1)$\delta'(p_0,\varepsilon,X_0)(q,Z_0)=I(q)$，$\forall q\in Q$；

2)$\delta'(q,\tau,X)(p,\gamma)=\delta(q,\tau,X)(p,\gamma)$，$\forall q,p\in Q,\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},X\in\Gamma,\gamma\in\Gamma^*$。

类似于命题 1，易证。

定理 2　设$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，$\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$为任一以终状态方式接受语言的 QPDA，当且仅当存在 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,F')$，使得对任意 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^F \|(w)=\| \mathcal{M}_2^F \|(w)$。

命题 3　设 $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$为任一以终状态方式接受语言的 QSPDA，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则存在 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,\varnothing)$，使得对任意的 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^F \|(w)=\| \mathcal{M}_2^{\varnothing} \|(w)$。

证明：对于 QSPDA $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,F)$，$suppI=\{q_0\}$，构造 $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,\varnothing)$，其中 $Q'=Q\cup\{p_0,p_f\}$，$p_0,p_f\notin Q$，$\Gamma'=\Gamma\cup\{X_0\}$，$X_0\notin\Gamma$，$I'(q)=\begin{cases}1, & q=p_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$，$D$-值状态转移函数 $\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma'\to D_f(Q'\times\Gamma'^*)$为：

1)$\delta'(p_0,\varepsilon,X_0)(q_0,Z_0X_0)=I(q_0)$，$\delta'(q,\varepsilon,Z)(p_f,\varepsilon)=F(q)$，$\delta'(p_f,\varepsilon,Z)(p_f,\varepsilon)=1$，$\forall Z\in\Gamma',q\in Q$；

2)$\delta'(q,\tau,X)(p,\gamma)=\delta(q,\tau,X)(p,\gamma)$，$\forall q,p\in Q,\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},X\in\Gamma,\gamma\in\Gamma^*$。

类似于命题 1，易证。

命题 4　设 $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$为任一以空栈方式接受语言的 QSPDA，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则存在 QSPDA $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,F)$，使得对任意的 $w\in\Sigma^*$，$\| \mathcal{M}_1^{\varnothing} \|(w)=\| \mathcal{M}_2^F \|(w)$。

证明：对于 QSPDA $\mathcal{M}_1=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\varnothing)$，$suppI=\{q_0\}$，构造 $\mathcal{M}_2=(Q',\Sigma,\Gamma',\delta',I',X_0,F)$，其中 $Q'=Q\cup\{p_0,q_e\}$，$p_0,q_e\notin Q$，$\Gamma'=\Gamma\cup\{X_0\}$，$X_0\notin\Gamma$，$I'(q)=\begin{cases}1, & q=p_0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$，$F(q)=\begin{cases}1, & q=q_e\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$，$D$-值状态转移函数 $\delta':Q'\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})\times\Gamma'\to D_f(Q'\times\Gamma'^*)$为：

1)$\delta'(p_0,\varepsilon,X_0)(q_0,Z_0X_0)=I(q_0)$，$\delta'(q,\varepsilon,X_0)(q_e,\varepsilon)=1$，$\forall q\in Q$；

2)$\delta'(q,\tau,X)(p,\gamma)=\delta(q,\tau,X)(p,\gamma)$，$\forall q,p\in Q,\tau\in\Sigma\cup\{\varepsilon\},X\in\Gamma,\gamma\in\Gamma^*$。

类似于命题 1，易证。

由定理 1、定理 2、命题 3、命题 4 可得下述结论成立。

定理 3　设 $A:\Sigma^*\to D$，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则下列条件等价：

1)存在 QPDA $\mathcal{M}$，使得 $A=\| \mathcal{M}^{\varnothing} \|$；

2)存在 QPDA $\mathcal{M}$，使得 $A=\| \mathcal{M}^F \|$；

3)存在 QSPDA $\mathcal{M}$，使得 $A=\| \mathcal{M}^{\varnothing} \|$；

4)存在 QSPDA $\mathcal{M}$，使得 $A=\| \mathcal{M}^F \|$。

注 2：定理 3 说明以终状态方式接受语言的 QPDA 和 QSPDA 以及以空栈方式接受语言的 QPDA 和 QSPDA 彼此等价。

3　量化上下文无关文法

在经典自动机理论中，上下文无关文法与下推自动机等价。下文主要研究量化下推自动机接受的语言与量化上下文无关文法生成的语言之间的关系，为此首先将量化上下文无关文法的相关定义和性质进行讨论和说明。

定义 8　设$(D,+,val,0,1)$是赋值幺半群，量化上下文无关文法（简记为 QCFG）是四元组$\mathcal{G}(N,T,P,S)$，其中 N 为有限变量集，T 为有限终止符集，且 $N\cap T=\varnothing$，S 表示开始符号，P 是产生式的有限集合，$P=\{u\to^{d}v \mid u\in N, v\in(N\cup T)^*, d\in D\backslash\{0\}\}$。

对任意 $\alpha,\beta\in(N\cup T)^*$，若由产生式 $u\to^{\rho}v$ 得到 $\alpha u\beta\Rightarrow\alpha v\beta$，则定义 $\vartheta(\alpha u\beta\Rightarrow\alpha v\beta)=\vartheta(u\to v)=\rho$，并称 $\alpha v\beta$ 可由 $\alpha u\beta$ 直接推导出。

对任意 $u_i\in(N\cup T)^*$，$i=1,2,\cdots,n$，若 u_{i+1} 可由 u_i 直接推导出，则称 u_n 可由 u_1 推导出，记作 $u_1\overset{*}{\Rightarrow}u_n$，并称 $u_1\Rightarrow u_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow u_n$ 为 u_n 的导出链。定义 $\vartheta(u_1\overset{*}{\Rightarrow}u_n)=val(\vartheta(u_1\Rightarrow u_2),\vartheta(u_2\Rightarrow u_3),\cdots,\vartheta(u_{n-1}\Rightarrow u_n))$。在双幺赋值幺半群上，对任意 $u\in(N\cup T)^*$，定义 $u\overset{*}{\Rightarrow}u$，且 $1=\vartheta(u\overset{*}{\Rightarrow}u)$。

定义 9　设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为 QCFG，由$\mathcal{G}$生成的语言 $\|\mathcal{G}\|:T^*\to D$定义为，$\forall w=u_n\in T^*$，$n\geqslant1$，$\|\mathcal{G}\|(w)=\sum\{\vartheta(S\overset{*}{\Rightarrow}u_n)\}=\sum\{val(\vartheta(S\Rightarrow u_1),\vartheta(u_1\Rightarrow u_2),\cdots,\vartheta(u_{n-1}\Rightarrow u_n)) \mid u_1,\cdots,u_{n-1}\in(N\cup T)^*\}$。

定义 10　设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为 QCFG，在推导 $u_1\overset{*}{\Rightarrow}u_n$ 的过程中，若每一步推导都只替换最左边的变量，则称为最左推导，记作 $u_1\overset{*}{\Rightarrow}_l u_n$。QCFG $\mathcal{G}$由最左推导生成的语言 $\|\mathcal{G}^L\|$：

$T^* \to D$定义为：$\forall w=u_n\in T^*, n\geqslant 1$，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=\sum\{\vartheta(S\overset{*}{\Rightarrow}_l u_n)\}=\sum\{val(\vartheta(S\Rightarrow_l u_1),\vartheta(u_1\Rightarrow_l u_2),\cdots,\vartheta(u_{n-1}\Rightarrow_l u_n))\mid u_1,\cdots,u_{n-1}\in(N\cup T)^*\}$。

由 QCFG $\mathcal{G}(N,T,P,S)$生成的语言或由最左推导生成的语言称为量化上下文无关语言。

定义 11 设$(D,+,val,0)$是赋值幺半群，若满足对任意$d_1,d_2,\cdots,d_n\in D$，$val(d_1,d_2,\cdots,d_n)=val(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_n})$，其中$i_1,i_2,\cdots,i_n$为$1,2,\cdots,n$的任意排列，则称$D$为可交换的赋值幺半群。

例 3 对于赋值幺半群$(\bar{R},sup_1,avg_1,-\infty,+\infty)$（见例1），易知其为可交换的赋值幺半群。

类似于文献[3]的证明方法，易得下述命题成立。

命题 5 设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为任一 QCFG，若$(D,+,val,0)$是可交换的赋值幺半群，则对任意$w\in T^*$，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=\|\mathcal{G}\|(w)$。

定义 12 设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为 QCFG，若$\mathcal{G}$中的产生式都具有形式$A\to^d B_1B_2\cdots B_m$或$A\to^d a$或$A\to^d\varepsilon$，其中$A,B_2,B_3,\cdots,B_m\in N$，$B_1\in N\cup T$，$a\in T$，$d\in D$，则称$\mathcal{G}$为量化标准型上下文无关文法（简记为 QNCFG）。

命题 6 设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为任一 QCFG，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则存在 QNCFG $\mathcal{G}_1(N_1,T,P_1,S)$，使得对任意$w\in T^*$，$\|\mathcal{G}\|(w)=\|\mathcal{G}_1\|(w)$。

证明：对于P中的每个产生式$A\to^d\alpha$，若$\alpha\in(T\cup N)N^*\cup\{\varepsilon\}$，则直接将$A\to^d\alpha$放入$P_1$中；否则对$A\to^d\alpha$做如下处理：设$\alpha=X_1X_2\cdots X_m$，对每个$X_i$，$2\leqslant i\leqslant m$，若$X_i=a\in T$，则引入新变量$B_i$和产生式$B_i\to^1 a$，将它们分别放入$N_1$和$P_1$中，并用$B_i$替换$A\to^d\alpha$中的$X_i$，产生式的量化值$d$不变。这样处理后，得到文法$\mathcal{G}_1$，易证对任意$w\in\Sigma^*$，$\|\mathcal{G}\|(w)=\|\mathcal{G}_1\|(w)$。

由命题 5、命题 6 可得下述结论成立。

定理 4 设$(D,+,val,0,1)$是可交换的双幺赋值幺半群，$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为任一 QCFG，当且仅当存在 QNCFG $\mathcal{G}_1(N_1,T,P_1,S)$，使得对任意$w\in T^*$，$\|\mathcal{G}\|(w)=\|\mathcal{G}_1^L\|(w)$。

命题 7 设$\mathcal{G}(N,T,P,S)$为任一 QNCFG，若$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，则存在 QPDA $\mathcal{M}$，使得对任意$w\in\Sigma^*$，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)$。

证明：构造 QPDA $\mathcal{M}(\{q\},T,N,\delta,I,S,\emptyset)$，其中$I(q)=1$，$\delta(q,\sigma,A)(q,\gamma)=\vartheta(A\to\sigma\gamma)$，$\sigma\in T\cup\{\varepsilon\}$，$A\in N$，$\gamma\in N^*$，$A\to^d\sigma\gamma\in P$。

利用归纳法容易证明对任意$w\in T^*$，$\alpha\in N^*$，$d=\vartheta(S\overset{*}{\Rightarrow}_l w\alpha)$当且仅当$d=\vdash_M^*(q,w,s)(q,\varepsilon,\alpha)$。

特别地，取$\alpha=\varepsilon$，可得$\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)=\sum\{val(1,\vdash_M((q,\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,S)(q,\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_k,\alpha_1)),\vdash_M((q,\sigma_2\sigma_3\cdots\sigma_k,\alpha_1)(q,\sigma_3\sigma_4\cdots\sigma_k,\alpha_2)),\cdots,\vdash_M((q,\sigma_k,\alpha_{k-1})(q,\varepsilon,\varepsilon)))\}=\sum\{val(\vartheta(S\Rightarrow\sigma_1\alpha_1),\vartheta(\alpha_1\Rightarrow\sigma_2\alpha_2),\cdots,\vartheta(\alpha_{k-1}\Rightarrow\sigma_k))\}=\sum\{\vartheta(S\overset{*}{\Rightarrow}_l w)\}=\|\mathcal{G}^L\|(w)$。

命题 8 设$\mathcal{M}(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\emptyset)$是任一 QPDA，则存在 QNCFG $\mathcal{G}$，使得对任意$w\in\Sigma^*$，$\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)=\|\mathcal{G}^L\|(w)$。

证明：构造 QNCFG $\mathcal{G}(N,T,P,S)$，其中$N=\{[qXp]\mid q,p\in Q,X\in\Gamma\}\cup\{S\}$，$[qXp]$表示栈中净弹出$X$时状态由$q$变到$p$，$T=\Sigma$，$P$是下列产生式的集合：

1）$S\to^{I(q)}[qZ_0p]$，任意$q,p\in Q$。

2）$[qXp]\to^d a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{k-1}Y_kr_k]$，$d=\delta(q,a,X)(r_0,Y_1Y_2\cdots Y_k)$，$a\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}$，$r_1,r_2,\cdots,r_k=p\in Q$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k\in\Gamma$。

3）$[qZp]\to^d a$，其中$\delta(q,a,Z)(p,\varepsilon)=d$。

利用归纳法易证得$d=\vartheta([qZ_0p]\overset{*}{\Rightarrow}w)$当且仅当$d=\vdash_M^*((q,w,Z_0)(p,\varepsilon,\varepsilon))$。

因为$S\to^{I(q)}[qZ_0p]$，由定义 9 和定义 10 知，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=\sum\{val(I(q),d_0,d_{11},\cdots,d_{1m_1},d_{21},\cdots,d_{2m_2},\cdots,d_{k1},\cdots,d_{km_k})\}$，$\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)=\sum\{val(I(q),d_0,d_{11},\cdots,d_{1m_1},d_{21},\cdots,d_{2m_2},\cdots,d_{k1},\cdots,d_{km_k})\}$。故对任意$w\in\Sigma^*$，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)$。

例 4 设$(\bar{R},sup_1,avg_1,-\infty,+\infty)$是双幺赋值幺半群（见例1），已知 QPDA $\mathcal{M}=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,I,Z_0,\emptyset)$，其中$Q=\{p,q\}$，$\Sigma=\{a,b\}$，$\Gamma=\{X,Z_0\}$，$I(p)=3$，$I(q)=6$，$D$-值转移函数$\delta$为：

1）$\delta(q,a,Z_0)(q,XZ_0)=2$；2）$\delta(q,a,X)(q,XX)=3$；3）$\delta(q,b,X)(p,X)=4$；4）$\delta(q,\varepsilon,X)(q,\varepsilon)=5$；5）$\delta(p,a,X)(p,\varepsilon)=6$；6）$\delta(p,b,Z_0)(q,\varepsilon)=7$。

由命题 8 可构造 QNCFG $\mathcal{G}(N,T,P,S)$，其中$N=\{S,[pZ_0q],[pZ_0p],[qZ_0p],[qZ_0q],[pXp],[pXq],[qXp],[qXq]\}$，$T=\{a,b\}$，$P$为 1）$S\to^3[pZ_0q]$，2）$S\to^3[pZ_0p]$，3）$S\to^6[qZ_0q]$，4）$S\to^6[qZ_0p]$，5）$[qZ_0q]\to^2 a[qXq][qZ_0q]$，6）$[qZ_0q]\to^2 a[qXp][pZ_0q]$，7）$[qZ_0p]\to^2 a[qXq][qZ_0p]$，8）$[qZ_0p]\to^2 a[qXp][pZ_0p]$，9）$[qXq]\to^3 a[qXq][qXq]$，10）$[qXq]\to^3 a[qXp][pXq]$，11）$[qXp]\to^3 a[qXq][qXp]$，12）$[qXp]\to^3 a[qXp][pXp]$，13）$[qXq]\to^4 b[pXq]$，14）$[qXp]\to^4 b[pXp]$，15）$[qXq]\to^5\varepsilon$，16）$[pXp]\to^6 a$，17）$[pZ_0q]\to^7 b$。

令$w=aabab$，$\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)=sup_1\{avg_1(\vdash((q,aabab,Z_0)(q,abab,XZ_0)),\vdash((q,abab,XZ_0)(q,bab,XXZ_0)),\vdash((q,bab,XXZ_0)(q,bab,XZ_0)),\vdash((q,bab,XZ_0)(p,ab,XZ_0)),\vdash((p,ab,XZ_0)(p,b,Z_0)),\vdash((p,b,Z_0)(q,\varepsilon,\varepsilon))),avg_1(\vdash((q,aabab,Z_0)(q,abab,XZ_0)),\vdash((q,abab,XZ_0)(q,abab,Z_0)),\vdash((q,abab,Z_0)(q,bab,XZ_0)),\vdash((q,bab,XZ_0)(p,ab,XZ_0)),\vdash((p,ab,XZ_0)(p,b,Z_0)),\vdash((p,b,Z_0)(q,\varepsilon,\varepsilon)))\}=\frac{9}{2}$，$\|\mathcal{G}^L\|(w)=sup_1(\vartheta(S\overset{*}{\Rightarrow}aabab))=sup_1\{avg_1(\vartheta(S\Rightarrow[qZ_0q]),\vartheta([qZ_0q]\Rightarrow a[qXp][pZ_0q]),\vartheta(a[qXp][pZ_0q]\Rightarrow aa[qXq][qXp][pZ_0q]),\vartheta(aa[qXq][qXp][pZ_0q]\Rightarrow aa[qXp][pZ_0q]),\vartheta(aa[qXp][pZ_0q]\Rightarrow aab[pXp][pZ_0q]),\vartheta(aab[pXp][pZ_0q]\Rightarrow aaba[pZ_0q]),\vartheta(aaba[pZ_0q]\Rightarrow aabab)),avg_1(\vartheta(S\Rightarrow[qZ_0q]),\vartheta([qZ_0q]\Rightarrow a[qXq][qZ_0q]),\vartheta(a[qXq][qZ_0q]\Rightarrow a[qZ_0q]),\vartheta(a[qZ_0q]\Rightarrow aa[qXp][pZ_0q]),\vartheta(aa[qXp][pZ_0q]\Rightarrow aab[pXp][pZ_0q]),\vartheta(aab[pXp][pZ_0q]\Rightarrow aaba[pZ_0q]),\vartheta(aaba[pZ_0q]\Rightarrow aabab]\}=\frac{9}{2}=\|\mathcal{M}^\emptyset\|(w)$。

定理 5 设$(D,+,val,0,1)$为双幺赋值幺半群，$\mathcal{G}(N,T,$

（下转第 88 页）

[7] BLASZCYSZYN B, MUHLETHALER P, TOOR Y. Performance of MAC protocols in linear VANETs under different attenuation and fading conditions[C]// Proc. 2009 12th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ISIT). 2009:1-6.

[8] PU C C, JAYA P, OOI P C, et al. Analysis of path loss exponent error in ranging and localization of wireless sensor network[C]// Proc. International Conference on Frontiers of Communications, Networks and Applications (ICFCNA 2014-Malaysia). 2014:1-6.

[9] SHAYOKH M A, ALKASI U, PARTAL H P. Performance improvement techniques for RSSI based localization methods[C]// Proc. International Conference on Electrical Information and Communication Technology (EICT). 2014:1-6.

[10] HAO X C, DOU J J, LIU B. Path-Loss Based Distributed Topology Control Algorithm for Wireless Sensor Networks[J]. Journal of Software, 2009, 20(12):3213-3222. (in Chinese)
郝晓辰,窦晶晶,刘彬. 基于路径损耗的无线传感器网络分布式拓扑控制算法[J]. 软件学报, 2009, 20(12):3213-3222.

[11] REN X L, CHENG Y L, XU Z M. Coverage Control and Node-scheduling for Three-dimensional Wireless Sensor Networks [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2012, 33(8):1681-1684. (in Chinese)
任秀丽,程艳蕾,徐泽明. 无线传感网中三维覆盖控制和节点调度的研究[J]. 小型微型计算机系统, 2012, 33(8):1681-1684.

[12] The Network Simulator-NS-3 [EB/OL]. https://www.nsnam.org.

[13] M G, XU K X, BAE S. How Effective is the IEEE 802.11 RTS/CTS Handshake in Ad Hoc Networks[C]// Proc. IEEE GLOBECOM. 2002:72-76.

[14] BRODSKY M Z, MORRIS R T. In Defense of Wireless Carrier sense[C]// Proc. ACM SIGCOMM. 2009:147-158.

(上接第 60 页)

$P,S)$为任一 QNCFG,当且仅当存在 QPDA $\mathcal{M}$,使得对任意 $w\in T^*$, $\|\mathcal{M}^{\emptyset}\|(w)=\|\mathcal{G}^L\|(w)$。

由定理 3—定理 5 可得以下结论成立。

定理 6 设 $A:\Sigma^*\rightarrow D$,若$(D,+,val,0,1)$为可交换的双幺赋值幺半群,则下列条件等价:

1)存在 QPDA $\mathcal{M}$,使得 $A=\|\mathcal{M}^{\emptyset}\|$;

2)存在 QPDA $\mathcal{M}$,使得 $A=\|\mathcal{M}^F\|$;

3)存在 QSPDA $\mathcal{M}$,使得 $A=\|\mathcal{M}^{\emptyset}\|$;

4)存在 QSPDA $\mathcal{M}$,使得 $A=\|\mathcal{M}^F\|$;

5)存在 QNCFG $\mathcal{G}$,使得 $A=\|\mathcal{G}^L\|$;

6)存在 QNCFG $\mathcal{G}$,使得 $A=\|\mathcal{G}\|$;

7)存在 QCFG $\mathcal{G}$,使得 $A=\|\mathcal{G}^L\|$;

8)存在 QCFG $\mathcal{G}$,使得 $A=\|\mathcal{G}\|$。

注 3:此结论说明在可交换的双幺赋值幺半群框架下,QPDA 和 QSPDA 接受的语言与 QNCFG 和 QCFG 生成的语言彼此相同。

结束语 本文主要研究了量化上下文无关语言的代数性质。本文第 1 节定义了双幺赋值幺半群;第 2 节证明了在双幺赋值幺半群上以两种不同方式接受语言的 QPDA 等价(定理 3),并给出了构造等价 QPDA 的方法;第 3 节证明了在可交换的双幺赋值幺半群上,QPDA 接受的语言与 QCFG 生成的语言相同(定理 6)。本文只给出了 QPDA 接受的语言与 QCFG 生成的语言相同成立的充分条件,今后将致力于对此结论成立的必要条件进行研究。

参 考 文 献

[1] HOPCROFT J E, MOTWANI R, ULLMAN J D. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation (3rd)[M]. New Jersey: Pearson Addision Wesley, 2007:171-314.

[2] LEE E T, ZADEH L A. Note on fuzzy languages[J]. Information Science, 1969, 1(4):321-434.

[3] 李永明. 模糊系统分析[M]. 北京:科学出版社, 2005:218-228.

[4] YING M S. A theory of computation based on quantum logic(I)[J]. Theoretical Computer Science, 2005, 344(2/3):134-207.

[5] LI Y M, PEDRYCZ W. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 156(1):68-92.

[6] QIU D W. Automata theory based on quantum logic: Reversibilities and pushdown automata [J]. Theoretical Computer Science, 2007, 386(1):38-56.

[7] XING H Y, QIU D W, LIU F C. Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic: Pushdown automata [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(8):1125-1140.

[8] LI Y M. Finite automata theory with membership value in lattices [J]. Information Science, 2011, 181(5):1003-1017.

[9] DROSTE M, STÜBER T, VOGLER H. Weighted finite automata over strong bimonoids[J]. Information Science, 2010, 180(1):156-166.

[10] CHATTERJEE K, DOYEN L, HENZINGER T A. Quantitative languages [M]// Computer Science Logic. Springer, 2008:385-400.

[11] DROSTE M, MEINECKE I. Weighted automata and regular expressions over valuation monoid [J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 2011, 22(8):1829-1844.

[12] DROSTE M, MEINECKE I. Weighted automata and Weighted MSO logics for average and long-time behaviors[J]. Information and Computation, 2012, 220-221(2):44-59.

[13] HAN Z W, LI Y M. Pushdown automata and context-free grammars based on quantum logic[J]. Journal of software, 2010, 21(9):2107-2117. (in Chinese)
韩召伟,李永明. 基于量子逻辑的下推自动机与上下文无关文法[J]. 软件学报, 2010, 21(9):2107-2117.

[14] SONG X Z, HAN Z W, LI Y N. Algebraic properties of context-free grammar based on quantum logic[J]. Computer Engineering and Applications, 2011, 47(4):42-46. (in Chinese)
宋小震,韩召伟,李永明. 量子上下文无关文法的代数性质[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(4):42-46.