三元背景及概念三元格的简化

祁建军[1] 魏 玲[2]

(西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)[1] (西北大学数学学院 西安 710127)[2]

摘 要 三元概念分析是对形式概念分析理论的扩展,三元背景作为其数据基础在实际生活中普遍存在。三元背景所反映的三元关系是形成概念三元格的基础,它比形式概念分析中的二元关系更复杂,因而在此基础上形成的三元概念以及概念三元格就更为复杂。对此,提出一种三元背景和概念三元格的信息简化方法,该方法将三元关系拆解为最本质的二元关系,并在保证所有二元关系不变的基础上,同时考虑三元背景的 3 个论域,删减其中不必要的元素,以减少数据量,简化三元背景和概念三元格的表达方式。进而,得到简化后概念三元格的一些性质以及简化前后三元概念的关系等理论结果,为进一步的算法研究与应用以及更深入的理论分析工作奠定基础。

关键词 三元概念分析,三元背景,三元概念,概念三元格,简化

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.09.010

Simplification of Triadic Contexts and Concept Trilattices

QI Jian-jun[1] WEI Ling[2]

(School of Computer Science & Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)[1]

(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)[2]

Abstract Triadic concept analysis (TCA) is an extension of formal concept analysis (FCA). As the data foundation, the triadic contexts is commonly used in the real world. The ternary relationship shown in a triadic context is the base to forming concept trilattice, it is more complicated than binary relationship shown in a formal context. It results in intrication of triadic concepts and concept trilattices. Aiming to the information simplification of a concept trilattice, an approach to simplifying a triadic context and its concept trilattice on the basis of binary relationship was proposed, since the binary relationship is essential to some extent. The main idea is to delete the redundant elements in each universe while keeping all the binary relationship of the original triadic context. Actually, three universes of a triadic context can be considered at the same time using this method. After the simplification, we obtained some properties about the simplified concept trilattice, and we also discussed the relationship between former triadic concept and later triadic concept. These conclusions are research basis for the future algorithm research and application, also the base for the deeper theoretic study.

Keywords Triadic concept analysis, Triadic context, Triadic concept, Concept trilattice, Simplification

现代社会中,人们所面对的三维数据越来越多。比如,用于社会性网络服务的 Folksonomy,用于照片分享的 Flickr 系统,书签和出版物信息共享系统 BibSonomy,以及新出现的搜索引擎 Bookmarking 系统。要从诸如此类的三维数据中获取有用的信息,使得获取的数据能真正体现其价值,就需要选择合适的数学方法和计算机手段。三元概念分析就是诸多方法之一。

概念是人类语言与思维的基本单元,概念的使用遍及我们生活的方方面面。在哲学中,概念被理解为由外延和内涵所组成的统一体。基于这一哲学理解,德国数学家 Wille R.[1-2]给出了概念的形式化描述,并于 1982 年提出了形式概念分析理论(Formal Concept Analysis, FCA)来用于概念的发现、排序和显示。目前,其已有相当丰富的研究成果。

受 Peirce C.[3] 3 个论域范畴的实用主义哲学的启发,Wille R. 等人又于 1995 年提出了一种进行信息处理的新方法:三元概念分析(Triadic Concept Analysis, TCA)[4-5]。其本质思想是把概念的二元组理解推广到三元组理解,即把形式概念分析理论扩展到三元情况。三元概念分析继承并推广了形式概念分析的方法和技巧,是处理、分析三维数据的新框架,其研究方法与结果又有其自身的独特性。

由于三元背景比形式背景复杂,基于三元背景所定义的算子也比形式背景上定义的算子更加复杂,因此其研究难度

到稿日期:2016-07-19 返修日期:2016-09-14 本文受国家自然科学基金项目(11371014,11071281),陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2014JM8306)资助。

祁建军(1970-),男,博士,副教授,主要研究方向为三支概念分析、概念格、三支决策、粒计算等,E-mail:qijj@mail.xidian.edu.cn;**魏 玲**(1972-),女,博士,教授,主要研究方向为概念格、粗糙集、三支决策等。

较形式概念分析大，现有成果不多，且主要集中在国外，国内报道极少。文献[27]从概念三元格的构造[4-7]、三元蕴含及关联规则挖掘[8-9]、三元概念聚类[10-13]、三元背景的因子分析[14-17]、模糊化[18-24]及应用[25-26]等角度对三元概念分析的研究现状进行了梳理、总结[27]。基于此，我们对三元概念分析有了较为全面的把握。

本文在回顾基于二元关系的形式概念分析相关理论的基础上，提出一种方法来简化三元背景以及相应的概念三元格刻画，该简化方法可以保持原始的所有二元关系不变。在此基础上，文中也探讨了三元概念、概念三元格的一些性质以及三元背景简化前后概念三元格的变化。

1 相关概念及基本理论

1.1 形式概念分析的基本理论

形式概念分析是一种基于概念和概念层次的数学化表达的理论。其研究基础是刻画对象与属性之间的二元关系的数据集，即形式背景，而以此为基础获取的概念格结构模型是该理论的核心数据结构，能生动且简洁地体现概念之间的泛化和特化关系[1-2]。

定义 1[1] 设(G,M,I)为一个形式背景，其中$G=\{g_1,\cdots,g_p\}$为对象集，每个$g_i(i\leqslant p)$称为一个对象；$M=\{m_1,\cdots,m_q\}$为属性集，每个$m_j(j\leqslant q)$称为一个属性；I为G和M之间的二元关系，$I\subseteq G\times M$。若$(g,m)\in I$，则表示对象g有属性m，也记为gIm。

在对象子集$X\subseteq G$和属性子集$B\subseteq M$上定义一对对偶算子：

$X^*=\{m|m\in M,\forall g\in X,gIm\}$

$B^*=\{g|g\in G,\forall m\in B,gIm\}$

X^*表示X中所有对象共同具有的属性集合，B^*表示共同具有B中所有属性的对象集合。如果一个二元组(X,B)满足$X^*=B$且$B^*=X$，则称(X,B)是一个形式概念，简称概念。其中，X称为概念的外延，B称为概念的内涵。

用$L(G,M,I)$表示形式背景(G,M,I)的全体概念，在偏序关系$(X_1,B_1)\leqslant(X_2,B_2)\Leftrightarrow X_1\subseteq X_2(\Leftrightarrow B_1\supseteq B_2)$下，可以证明$(X_1,B_1)\wedge(X_2,B_2)=(X_1\cap X_2,(B_1\cup B_2)^{**})$和$(X_1,B_1)\vee(X_2,B_2)=((X_1\cup X_2)^{**},B_1\cap B_2)$也是概念，从而$L(G,M,I)$是格，并且是完备格，称为形式背景$(G,M,I)$的概念格。

例 1 表 1 是形式背景(G,M,I)，$G=\{1,2,3,4\}$，$M=\{a,b,c,d,e\}$，其概念格如图 1 所示。

表 1 形式背景(G,M,I)

	a	b	c	d	e
1	×	×		×	×
2	×	×	×		
3				×	
4	×	×	×		

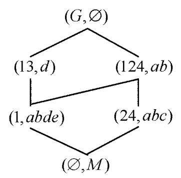

图 1 $L(G,M,I)$

1.2 三元概念分析的基本理论

三元概念分析的数据基础是三元背景，其是由 3 个集合间的三元关系形成的数据。下面首先回顾 Lehmann F. 和 Wille R. 提出的基本概念。

定义 2[4-5] 称(K_1,K_2,K_3,Y)为一个三元背景，其中$K_1=\{g_1,\cdots,g_p\}$为对象集，每个$g_i(i\leqslant p)$称为一个对象；$K_2=\{m_1,\cdots,m_q\}$为属性集，每个$m_j(j\leqslant q)$称为一个属性；$K_3=\{b_1,\cdots,b_r\}$为条件集，每个$b_k(k\leqslant r)$称为一个条件；Y为K_1，K_2和K_3之间的三元关系，即$Y\subseteq K_1\times K_2\times K_3$。若$(g,m,b)\in Y$，则表示对象$g$在条件$b$下有属性$m$。

在三元背景的基础上，可以定义两类不同的诱导算子。

例 2[4] 表 2 是一个三元背景$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$，$K_1=\{A,B,C\}$，$K_2=\{1,2,3,4,5,6\}$，$K_3=\{a,b,c,d\}$。其中每个元素的意义如下。

A：Superordinate stereotypes	B：Unspecified
C：Subtypes	
1：Physical appearance	2：Political beliefs
3：Attitudes	4：Behavior
5：Traits	6：Situations
a：Recall	b：Impression Formation
c：Behavior Prediction	d：Evaluation

表 2 三元背景$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$

	a						b						c						d					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
A	×	×					×	×					×	×				×	×	×		×		
B	×											×	×				×		×				×	
C	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×				×	×	×				×

三元背景可以看作是 3 个集合K_1，K_2，K_3中任意两两组合所对应的 3 个形式背景的一种信息合成表达方式。比如，表 2 左端条件集合中元素a下方所对应矩形内的数据可以看作是形式背景(K_1,K_2,Y_a^{12})；而形式背景(K_2,K_3,Y_A^{23})所反映的实为对象集中元素A所对应的整行信息；而每一个属性集中的元素 1 对应的 4 列数据即为形式背景(K_1,K_3,Y_1^{13})。

定义 3[4-5] 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$且$j<k$，$X\subseteq K_i$，$Z\subseteq K_j\times K_k$，定义$(i)$-诱导算子如下：

$X^{(i)}=\{(a_j,a_k)\in K_j\times K_k|(a_i,a_j,a_k)\in Y,\forall a_i\in K_i\}$

$Z^{(i)}=\{a_i\in K_i|(a_i,a_j,a_k)\in Y,\forall(a_j,a_k)\in Z\}$

这类诱导算子实为形式背景$\mathbb{K}^{(i)}=(K_i,K_j\times K_k,Y^{(i)})$上的算子，对于任意的$g\in K_i$，$m\in K_j$，$b\in K_k$，有

$gY^{(1)}(m,b)\Leftrightarrow mY^{(2)}(g,b)\Leftrightarrow bY^{(3)}(g,m)\Leftrightarrow(g,m,b)\in Y$

定义 4[4-5] 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$，$X_i\subseteq K_i$，$X_j\subseteq K_j$，$X_k\subseteq K_k$，定义$(i,j,X_k)$-诱导算子如下：

$X_i^{(i,j,X_k)}=\{a_j\in K_j|(a_i,a_j,a_k)\in Y,\forall(a_i,a_k)\in X_i\times X_k\}$

$X_j^{(i,j,X_k)}=\{a_i\in K_i|(a_i,a_j,a_k)\in Y,\forall(a_j,a_k)\in X_j\times X_k\}$

这类诱导算子相当于形式背景$\mathbb{K}_{X_k}^{ij}=(K_i,K_j,Y_{X_k}^{ij})$上的算子，其中$(a_i,a_j)\in Y_{X_k}^{ij}\Leftrightarrow\forall a_k\in X_k,(a_i,a_j,a_k)\in Y$。

定义 5[4-5] 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$\{i,j,k\}=$

$\{1,2,3\}$且$j<k$。若$X_i=(X_j\times X_k)^{(i)}$，则称$(X_i,X_j,X_k)$为三元背景$\mathbb{K}$的三元概念。其中，称$X_i$为它的外延，称$X_j$为内涵，称$X_k$为方式。

用$\mathfrak{T}(\mathbb{K})$表示三元背景$\mathbb{K}$的所有三元概念。对于任意的$(A_1,A_2,A_3),(B_1,B_2,B_3)\in\mathfrak{T}(\mathbb{K})$，可以定义预序关系$\lesssim_i$和等价关系$\sim_i$如下($\forall i\in\{1,2,3\}$)：

$(A_1,A_2,A_3)\lesssim_i(B_1,B_2,B_3)\Leftrightarrow A_i\subseteq B_i$

$(A_1,A_2,A_3)\sim_i(B_1,B_2,B_3)\Leftrightarrow A_i=B_i$

记$[(A_1,A_2,A_3)]_i$为三元概念(A_1,A_2,A_3)在等价关系$\sim_i$下的等价类，则可得一个几何结构$(\mathfrak{T}(\mathbb{K}),\sim_1,\sim_2,\sim_3)$。记$\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i$为等价关系$\sim_i$下的商集，则预序关系$\lesssim_i$在$\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i$上诱导了一个偏序关系$\leqslant_i$，即$(\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i,\leqslant_i)$。

对于任意$(A_1,A_2,A_3),(B_1,B_2,B_3)\in\mathfrak{T}(\mathbb{K})$，如果$(A_1,A_2,A_3)\lesssim_i(B_1,B_2,B_3)$，$(A_1,A_2,A_3)\lesssim_j(B_1,B_2,B_3)$，则有$(A_1,A_2,A_3)\gtrsim_k(B_1,B_2,B_3)$，其中$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。

Wille R.[5]称$\underline{\mathfrak{T}(\mathbb{K})}=(\mathfrak{T}(\mathbb{K}),\lesssim_1,\lesssim_2,\lesssim_3)$为概念三元格。它是由几何结构$(\mathfrak{T}(\mathbb{K}),\sim_1,\sim_2,\sim_3)$和序结构$(\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i,\leqslant_i)$这两部分组成。

需要注意的是：概念三元格并非由三元概念构成的数学意义上的格，它与 FCA 中的概念格有本质不同。它是由所有三元概念按照它们之间的预序关系及等价关系形成的一种特殊结构而已，其数学性质不如 FCA 中的概念格好。

例 3　给出例 2 所示三元背景的三元概念格。

表 2 的所有三元概念的集合 $T(\mathbb{K})=\{(\emptyset,123456,abcd),(C,126,abcd),(C,123456,ab),(B,15,cd),(A,124,d),(AC,12,abcd),(AC,126,c),(BC,6,b),(ABC,123456,\emptyset),(ABC,1,acd),(ABC,\emptyset,abcd)\}$，其相应的概念三元格如图 2 所示[4]。

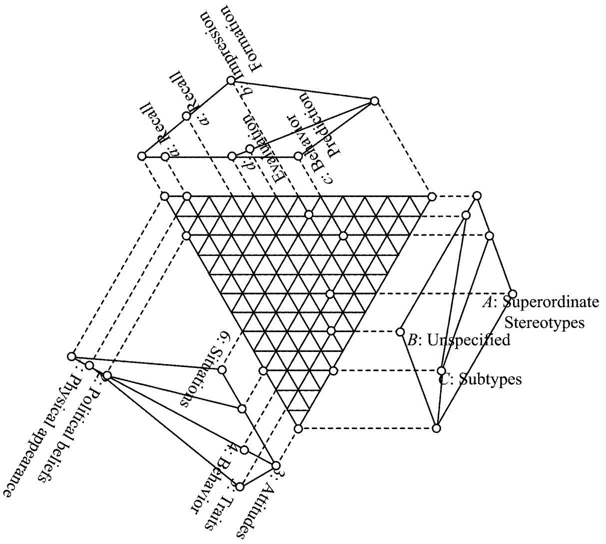

图 2　概念三元格$\mathfrak{T}(\mathbb{K})$

图 2 中间三角形上的白色小圆圈代表 11 个三元概念，同一个方向的直线代表$\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i$，即该直线上的三元概念关于第$i$维是等价的；外围的 3 个偏序集即为$(\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i,\leqslant_i)$ $(i=1,2,3)$。比如，左下方偏序结构是$(\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_2,\leqslant_2)$，即所有概念在第 2 维上的偏序结构；该结构中标记 3 的节点对应着三角形的 3 个概念：$(ABC,123456,\emptyset)$，$(\emptyset,123456,abcd)$，$(C,123456,ab)$，这 3 个概念在第 2 维上是相等的，即关于属性集K_2是等价的。

2　三元背景与概念三元格的简化

从上节的基本概念和例子可以看出，三元背景及其相关算子、运算、结构层次等的表达明显比形式背景及其相应的概念格复杂。因此，我们希望在原始的数据基础上进行简化，使得三元概念以及概念三元格得以简洁表示。

三元概念分析中最基本的两类诱导算子表明，三元背景上的三元关系实际上是 3 个二元关系(3 个论域中两两间的二元关系)的综合。而信息的这种综合表达方式也提示我们，二元关系与形式概念仍然可以作为三元概念分析的研究基础与核心。

因此，本节利用三元背景及其内含的形式背景的关系，研究以原始的二元关系为基础的三元背景的简化方法，给出可删除元素的概念和性质，进而获得概念三元格的简化结构以及约简前后三元概念的关系。

2.1　简化思想与算法

首先给出可删除元素与子背景的概念。

定义 6　设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$是一个三元背景，$N_i\subseteq K_i$，$i=1,2,3$，称：

$$\mathbb{K}_{sub}=(N_1,N_2,N_3,Y\cap(N_1\times N_2\times N_3))$$

为$\mathbb{K}$的子背景。

定义 7　设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$x,y\in K_k$，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$且$i<j$。如果$L(K_i,K_j,Y_x^{ij})=L(K_i,K_j,Y_y^{ij})$，则称$x$与$y$是等价元素，所有满足该式的$y$记为$[x]$，读作$x$的等价元素类。

定义 8　设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$x\in K_k$，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$且$i<j$。如果

$$L(K_i,K_j,Y_x^{ij})\subseteq\bigcup_{y\in K_k-\{x\}}L(K_i,K_j,Y_y^{ij})$$

则称x是可删除元素，称三元背景$\mathbb{K}$是基于二元关系可约的。

可删除元素$x\in K_k$如果满足$|[x]|>1$，则须进一步考虑$L(K_i,K_j,Y_x^{ij})$与$\bigcup_{y\in K_k-[x]}L(K_i,K_j,Y_y^{ij})$的关系。

定义 9　设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景，$x\in K_k$是可删除元素，$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$且$i<j$。如果

$$L(K_i,K_j,Y_x^{ij})\subseteq\bigcup_{y\in K_k-[x]}L(K_i,K_j,Y_y^{ij})$$

则称x是绝对可删除元素，称$[x]$为绝对可删除类。如果

$$L(K_i,K_j,Y_x^{ij})\not\subset\bigcup_{y\in K_k-[x]}L(K_i,K_j,Y_y^{ij})$$

则称x是相对可删除元素，称$[x]$为相对可删除类。

绝对可删除类意味着将$[x]$全部删除后，$[x]$所反映的二元关系仍然可以由K_k中的其他元素来反映，则在进行背景简化时可以将等价元素类$[x]$全部删除。相对可删除类则表示将$[x]$全部删除后，$[x]$所反映的二元关系将无法完全保留，即新背景所反映出的二元关系必定比原背景有所减少，造成数据信息的丢失。因此，在进行背景简化时，必须要注意保留$[x]$中的一个元素。

下面给出三元背景的简化方法。

算法 1 三元背景简化算法

输入:原始三元背景$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$

输出:简化背景$\mathbb{K}_{sub}$

Step 1 选择域 $K=K_k$,$k=1$。

Step 2 $\forall x\in K$,计算所有的 $L(K_i,K_j,Y^{ij}_x)$,并确定$[x]$。

Step 3 借助 Step 2 的结果,计算所有 $x\in K$ 的 $\bigcup_{y\in K_k-[x]} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)$。

Step 4 $\forall x\in K$,比较 $L(K_i,K_j,Y^{ij}_x)$与$\bigcup_{y\in K_k-[x]} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)$,如果

$$L(K_i,K_j,Y^{ij}_x)\subseteq\bigcup_{y\in K_k-[x]} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)$$

则 $K_k=K_k-[x]$。如果

$$L(K_i,K_j,Y^{ij}_x)\not\subset\bigcup_{y\in K_k-[x]} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)$$

则 K 中仅保留$[x]$中的一个元素,$[x]$中的其他元素全部删除,从而得到子背景$\mathbb{K}_{sub}$。

Step 5 $k=k+1$。如果 $k<4$,$K=K_k$,转 Step 2;如果 $k=4$,输出$\mathbb{K}_{sub}$。

经过上述简化以后的背景是原始背景的子背景,将其称为原背景的简化背景,记为$\mathbb{K}_R$,其相应的概念三元格记为$\mathfrak{T}(\mathbb{K}_R)$。

注:Step 4 决定了此算法输出的简化背景只有一个,但是由于等价元素类的存在,只需要把简化背景中等价元素类的元素做任意替换,就可以得到全部的简化背景。

例 4(续例 2) 对于每一个元素 $x\in K_k$,逐一计算表 2 中的所有 $L(K_i,K_j,Y^{ij}_x)$。结合例 2 的计算结果可知,$2,3\in K_2$ 和 $a\in K_3$ 均为可删除元素,且它们各自的等价元素只有自身。把这 3 个元素删除后的子背景$\mathbb{K}_R=(K_1,K_2-\{2,3\},K_3-\{a\},Y_{new})$如表 3 所列。其所有的三元概念如下:

1.$(\emptyset,1456,bcd)$ 2.$(C,16,bcd)$ 3.$(C,1456,b)$

4.$(B,15,cd)$ 5.$(A,14,d)$ 6.$(AC,1,bcd)$

7.$(AC,16,c)$ 8.$(BC,6,b)$ 9.$(ABC,1456,\emptyset)$

10.$(ABC,1,cd)$ 11.$(ABC,\emptyset,bcd)$

表 3 简化背景$(K_1,K_2-\{2,3\},K_3-\{a\},Y_{new})$

	b				c				d			
	1	4	5	6	1	4	5	6	1	4	5	6
A	×				×			×	×	×		
B				×	×		×		×		×	
C	×	×	×	×	×			×	×			×

简化背景相应的三元概念格如图 3 所示。对比图 3 与图 2 可以看出,图 3 显然比图 2 更简洁。

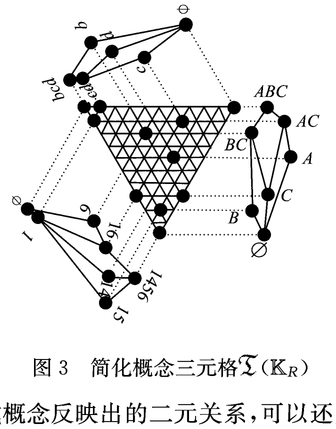

图 3 简化概念三元格$\mathfrak{T}(\mathbb{K}_R)$

按照形式概念反映出的二元关系,可以还原到三元背景上,从三元关系的角度分析获得可删除元素的性质。

2.2 可删除元素的性质

可删除元素的定义表明,任何一个可删除元素所对应的形式背景中的形式概念,皆可由该元素所在论域的其他元素来反映。因此可得可删除元素具有以下性质。

性质 1 设 a 是 $K_i(i=1,2,3)$的可删除元素,则有如下性质成立。一定$\exists b\in K_i-\{a\}$,使得:

(1)若 $i=1$,$(a,y,z)\in Y$,必有$(b,y,z)\in Y$;

(2)若 $i=2$,$(x,a,z)\in Y$,必有$(x,b,z)\in Y$;

(3)若 $i=3$,$(x,y,a)\in Y$,必有$(x,y,b)\in Y$。

从定义 7 即可证明以下结论。

定理 1 设$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$为三元背景,若 $x\in K_k$ $(k=1,2,3)$是可删除元素,$i<j$,则有

$$\bigcup_{k\in\{1,2,3\}}\bigcup_{y\in K_k} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)=\bigcup_{k\in\{1,2,3\}}\bigcup_{y\in K_k-\{x\}} L(K_i,K_j,Y^{ij}_y)$$

该结论的意义在于:删除任何一个域中的任何一个元素后,新的子背景中所有的二元关系与原始三元背景中保持一致,因此所有基于二元关系的形式概念都保持不变。性质 1 与定理 1 皆可由例 3 验证。

因此,去掉可删除元素对原三元背景进行简化的方法,实际上保存了原来的所有二元关系。

2.3 简化前后概念三元格的关系

前文的简化方法保证了三元背景中最基本的二元关系保持不变,而概念三元格有所简化。本节探讨在背景简化前后,原概念三元格结构与新结构的关系。

通过集合论知识,可以得出以下简单结论:设集合 U 关于集合 A 上的等价关系 R_A 的熵集为 U/R_A,如果 $B\subseteq A$,则有$|U/R_A|\geqslant|U/R_B|$。因此,在去掉可删除元素后,各个论域上的等价类可能进行合并,于是,可以得到以下结果。

性质 2 设三元背景$\mathbb{K}=(K_1,K_2,K_3,Y)$,$\forall i=1,2,3$,$|\mathfrak{T}(\mathbb{K})/\sim_i|\geqslant|\mathfrak{T}(\mathbb{K}_R)/\sim_i|$成立。

该性质表明,简化后新的三元背景中各个论域上等价类的个数少于或等于原背景中各个论域上等价类的个数。

例 5 从例 2 的概念三元格(见图 2)可看出,集合 K_1 上有 7 个等价类,集合 K_2 上有 8 个等价类,集合 K_3 上也有 8 个等价类。而经过背景简化后获得的概念三元格(见图 3)反映出,集合 K_1 上仍有 7 个等价类,而集合 K_2 上有 7 个等价类,集合 K_3 上有 6 个等价类。显然,该三元背景简化后有两个论域上的等价类的个数少于或等于原背景中的相应个数,实现了数据信息的压缩和直观表示。

结束语 信息简化是当今知识发现研究领域的一个重要课题,三元概念分析的研究亦不例外。作为形式概念分析的推广,三元概念分析的研究尚在起步阶段。我们针对三元背景,提出一种同时对 3 个论域进行信息简化的思想方法,直接对原始数据上的信息进行分析、压缩,得到简化的有效数据,从而得到了可视的、更为简洁的概念三元格。但是,我们必须承认三元背景数据刻画的复杂性以及概念三元格数学性质的有限性,这些都是充分研究概念三元格简化前后的关系、形式概念与三元概念的关系以及形式概念分析与三元概念分析之间的关系时面临的难题,也预示着这是一个漫长而艰辛的研究过程。

参考文献

[1] GANTER B, WILLE R. Formal Concept Analysis-Mathematical Foundations[M]. New York: Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[2] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]// Rival I. Ordered Sets. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.

[3] CH S. Peirce: Collected Papers[M]. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1931-1935.

[4] LEHMANN F, WILLE R. A triadic approach to formal concept analysis[M]// Ellis G, Levinson R, Rich W, et al. Conceptual Structures: Applications, Implementation and Theory (LNCS 954). Heidelberg: Springer, 1995: 32-43.

[5] WILLE R. The basic theorem of triadic concept analysis[J]. Order, 1995, 12(2): 149-158.

[6] BIEDERMANN K. Triadic Galois connections [M]// Denecke K, Lders. General algebra and applications in discrete mathematics. Aachen: Shaker Verlag, 1997: 23-33.

[7] BIEDERMANN K. An equational theory for trilattices [J]. Algebra Universalis, 1999(42): 253-268.

[8] GANTER B, OBIEDKOV S. Implications in triadic formal contexts [M]// Wolff K E, Pfeiffer H D, Delugach H S. Conceptual Structures at Work (LNCS3127). Heidelberg: Springer, 2004: 186-195.

[9] MISSAOUI R, KWUIDA L. Mining triadic association rules from ternary relations [M]// Valtchev P, Jaschke R. International Conference on Formal Concept Analysis (LNCS6628). Heidelberg: Springer, 2011: 204-218.

[10] JASCHKE R, HOTHO A, SCHMITZ C, et al. TRIAS-an algorithm for mining iceberg tri-lattices[C]// Proceeding of the sixth international conference on data mining (ICDM'06). Piscataway, Null, IEEE, 2006: 907-911.

[11] IGNATOV D, KUZNETSOV S, MAGIZOV R, et al. From triconcepts to triclusters [M]// Kuznetsov S O, et al. Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing, RSFDGrC 2011(LNCS6743). Heidelberg: Springer, 2011: 257-264.

[12] KAYTOUE M, KUZNETSOV S, MAGIZOV J, et al. Mining Biclusters of similar values with triadic concept analysis [C]// Napoli A, Vychodil V. Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA2011). 2011: 175-190.

[13] GNATYSHAK D, IGNATOV D, SEMENOV A, et al. Gaining insight in social networks with biclustering and triclustering [M]// Aseeva N, Babkin E, Kozyrev O. Perspectives in Business Informatics Research (LNBIP128). Heidelberg: Springer, 2012: 162-171.

[14] BELOHLAVEK R, VYCHODIL V. Optimal factorization of three-way binary data [C]// Hu X, Lin T Y, Raghavan V, et al. 2010 IEEE International Conference on Granular Computing. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 61-66.

[15] GLODEANU C. Factorization methods of binary, triadic, real and fuzzy data [J]. Studia Universitatis Babes-Bolyai Series Informatica, 2011, 56(2): 81-86.

[16] BELOHLAVEK R, GLODEANU C, VYCHODIL V. Optimal factorization of three-way binary data using triadic concepts [J]. Order, 2013, 30(2): 437-454.

[17] CYNTHIA G. Tri-ordinal factor analysis [M]// Cellie R P, Distel F, Ganter B. Formal Concept Analysis (LNCS7880). Heidelberg: Springer, 2013: 125-140.

[18] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic concept analysis of data with fuzzy attributes [C]// 2010 IEEE International Conference on Granular Computing. Piscataway, NJ: IEEE, 2010: 661-665.

[19] OSICKA P, KONECNY J. General approach to triadic concept analysis [C]// Kryszkiewicz M, Obiedkov S. Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA2010). 2010: 116-126.

[20] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic concept lattices of data with graded attributes [J]. International Journal of General System, 2012, 41(2): 93-108.

[21] KONECNY J, OSICKA P. Triadic concept lattices in the framework of aggregation structures [J]. Information Science, 2014, 279: 512-527.

[22] GLODEANU C V. Fuzzy-Valued triadic implications [C]// Napoli A, Vychodil V. Proceedings of the 7th International Conference on Concept Lattices and Their Applications (CLA2011). 2011: 159-173.

[23] BELOHLAVEK R, OSICKA P. Triadic fuzzy Galois connections as ordinary connections [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 249: 83-99.

[24] OSICKA P. Algorithms for computation of concept trilattices of triadic fuzzy context [M]// Greco S, Meunier B B, Coletti G, et al. Advances in Computational Intelligence (CCIS 299). Heidelberg: Springer, 2012: 221-230.

[25] TRABELSI C, JELASSI N, YAHIA S. Scalable mining of frequent tri-concepts from folksonomies [M]// Tan P N, Chawla S, Ho C K, et al. Advances in Knowledge Discovery and Data Mining (LNCS7302). Heidelberg: Springer, 2012: 231-244.

[26] JELASSI M N, YAHIA S B, NGUIFO E M. A scalable mining of frequent quadratic concepts in d-folksonomies[J]. Computer Science, 2012. arXiv: 1212. 0087v1 [cs. SI].

[27] WEI L, WAN Q, QIAN T, et al. An Overview of Triadic Concept Analysis[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2014, 44(5): 689-699. (in Chinese)
魏玲，万青，钱婷，等. 三元概念分析综述[J]. 西北大学学报(自然科学版)，2014，44(5)：689-699.

(上接第 39 页)

[18] PAWLAK Z. Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

[19] JU H R, YANG X B, SONG X N, et al. Dynamic updating multigranulation fuzzy rough set: Approximations and reducts[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2014, 5(6): 981-990.

[20] JU H R, YANG X B, DOU H L, et al. Variable precision multigranulation rough set and attributes reduction[M]// Peters J F, Skowron A, Li T R, et al. , eds. Transactions on Rough Set XVII. Springer Berlin Heidelberg, 2014: 52-68.

[21] CHEN D G, ZHAO S Y. Local reduction of decision system with fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 1871-1883.