基于一种新的核函数的模糊粗糙集

叶秋萍　张红英

（西安交通大学数学与统计学院　西安 710049）

摘　要　模糊粗糙集作为模糊集与粗糙集的结合体，能够有效处理数据的复杂性和不确定性。由模糊相似关系产生的模糊粒结构可以对模糊粗糙集中不确定性的概念进行近似。核函数和模糊相似关系分别是机器学习和模糊粗糙集的核心因素，因此借助模糊相似关系和核函数之间的关系，构造了一种新的核函数，并定义了相应的核模糊粗糙集。最后通过实例说明新构造的核函数具有一定的推广性。

关键词　模糊粗糙集，核函数，模糊相似关系

中图法分类号　O159　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2017.09.014

Fuzzy Rough Sets Based on New Kernel Functions

YE Qiu-ping　ZHANG Hong-ying

(School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract　Fuzzy rough sets, as a combination of fuzzy sets and rough sets, can deal with the complexity and uncertainty of data sets effectively. Fuzzy granule structures derived by fuzzy similarity relations are used to study the quantitative fuzzy rough sets. Kernel functions and fuzzy similarity relations are the key factors of machine learning and fuzzy rough sets. With the relationship between the fuzzy similarity relation and the kernel function, this paper presented a new approach to construct kernel function and gave the corresponding fuzzy rough sets. Moreover, this paper gave a comparative experimental analysis, and the results show that the new kernel function has generality.

Keywords　Fuzzy rough sets, Kernel functions, Fuzzy similarity relations

1　介绍

模糊粗糙集理论与方法是由 Dubois 和 Prade[1] 于 1990 年提出的处理数值型数据中存在的不一致性的数学理论。模糊粗糙集理论将处理分类不确定性的粗糙集[2]和边界不确定性的模糊集结合起来处理实值、区间值和集值数据表，已经获得了较多研究成果并得到成功应用。这些属性通常具有各种不确定性和复杂性，经典粗糙集中的“完全包含”与“完全不包含”关系已经不能概括这些属性之间的关系，而模糊集合的出现使得复杂数据属性之间的不确定性关系描述得以改进，避免了粗糙集将复杂属性值离散化从而导致重要信息丢失的不足。

对于模糊粗糙集模型，主要从构造性方法和公理化方法两种不同的角度[1,3-6]展开研究。一类非常典型的模糊粗糙集是由三角模 T、三角余模 S、T-剩余蕴含和基于 S 的蕴含所定义的。例如，Wu 等人[3]讨论了基于最小的三角模 T 与最大的三角余模 S 构造的模糊粗糙算子的性质；利用三角模 T 和三角余模 S，Wu[7] 和 Mi[8] 等人研究了对应的上、下近似算子；Yeung等人[6]利用三角模 T、三角余模 S、T-剩余蕴含和基于 S 的蕴含，结合其他有关研究总结了模糊粗糙集的 4 种近似算子。模糊粗糙集的理论研究主要涉及两大问题[9]：1）对象之间模糊关系的形成；2）通过模糊关系产生模糊粒结构。根据模糊关系对论域进行划分，从而产生模糊粒结构，利用模糊粒结构对模糊粗糙集中的不确定性概念进行近似。文献[10]基于模糊关系研究了模糊粒计算，并讨论了粒环境下模糊集的上、下近似算子。

核方法[11-12]通过非线性映射将低维空间线性不可分的特征变换到高维空间从而实现线性可分，并且将高维空间的内积运算转化为低维输入空间的核函数计算问题，巧妙地解决了高维特征空间计算复杂和低维空间难于分类的问题。核函数的这个突出特点，奠定了它被广泛应用的基础。在核方法的研究中，利用核函数度量对象之间的相似性是一种常见的方法。随着核方法研究的不断深入，核函数也被引入到模糊粗糙集中来描述对象之间的模糊相似关系。文献[13-14]研究了核函数和模糊相似关系的联系，Mercer 定理[14]指出任意满足自反、对称的核至少是满足 $T_{\cos}$-传递的。Hu[9] 和陈德刚[11]利用传递的核函数替换传统定义下的模糊相似关系来研究模糊粗糙集理论与方法，试图建立粗糙集研究方法与基于核函数的机器学习方法之间的联系。模糊粗糙集研究中通常使用的核函数[15]包括：高斯核、指数核、有理二次核、圆核

到稿日期：2016-08-04　返修日期：2016-09-24

叶秋萍（1991－），女，硕士生，主要研究方向为基于模糊集和粗糙集的不确定知识表示与获取；**张红英**（1979－），女，副教授，硕士生导师，主要研究方向为基于模糊集和粗糙集的不确定知识表示与获取。

和球形核等，这些核函数满足自反性、对称性和 T-传递性。文献[9,11]验证了核函数在模糊粗糙集中的较好应用。但是以上的核函数都是一些比较特殊的核函数，能否给出一个简洁有效的方法，利用已有数据集直接构造满足自反性、对称性和 T-传递性的核函数，将是一个非常有意义的工作。本文在已有相关研究[13-14,16-17]的基础上应用对象之间的模糊相似关系，给出一种新的基于对象间相似矩阵的核函数生成方法，并通过实例将其与高斯核函数以及文献[18]中的实验进行比较，结果显示本文中新定义的核函数具有一定的推广性。

2　预备知识

本节主要介绍模糊集、模糊逻辑算子、模糊关系和模糊近似算子等相关基本理论知识。

2.1　模糊集及其基本运算

定义 1[11]　设 U 为一非空论域，$X:U\to[0,1]$，则称 X 为 U 上的一个模糊集合，$X(x)$ 称为模糊集合 X 的隶属函数。

论域 U 上全体模糊集的集合记为 $F(U)$。

定义 2[11]　设 U 为一非空论域，则对于任意的模糊集 $X,X_1,X_2,X_t\in F(U)$（$\forall x\in U$），模糊集的相关运算定义如下：

$X_1\subseteq X_2$ 当且仅当 $X_1(x)\leqslant X_2(x)$

$(X_1\cup X_2)(x)=X_1(x)\vee X_2(x)$

$(X_1\cap X_2)(x)=X_1(x)\wedge X_2(x)$

$\sim X(x)=1-X(x)$

$(\bigcup_{t\in T}X_t)(x)=\sup_{t\in T}X_t(x)$

$(\bigcap_{t\in T}X_t)(x)=\inf_{t\in T}X_t(x)$

2.2　模糊逻辑算子

定义 3[11]　设 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$，如果 T 满足条件：

(1)交换律：$T(\alpha,\beta)=T(\beta,\alpha)$；

(2)结合律：$T(\alpha,T(\beta,\gamma))=T(T(\alpha,\beta),\gamma)$；

(3)单调性：如果 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1,0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant1$，则 $T(\alpha_1,\beta_1)\leqslant T(\alpha_2,\beta_2)$；

(4)边界条件：$\forall\alpha\in[0,1],T(\alpha,1)=\alpha$。

则称 T 为三角模，简称 t-模。

常用的 t-模有：

$T_M(\alpha,\beta)=\min\{\alpha,\beta\}$

$T_P(\alpha,\beta)=\alpha*\beta$

$T_L(\alpha,\beta)=\max\{0,\alpha+\beta-1\}$

$T_{\cos}(\alpha,\beta)=\max\{0,\alpha\beta-\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\}$

定义 4[11]　设 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$，如果 S 满足条件：

(1)交换律：$S(\alpha,\beta)=S(\beta,\alpha)$；

(2)结合律：$S(\alpha,S(\beta,\gamma))=S(S(\alpha,\beta),\gamma)$；

(3)单调性：如果 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant1,0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant1$，则 $S(\alpha_1,\beta_1)\leqslant S(\alpha_2,\beta_2)$；

(4)边界条件：$\forall\alpha\in[0,1],S(\alpha,0)=\alpha$。

则称 S 为三角余模，简称 t-余模。

常用的 t-余模有：

$S_M(\alpha,\beta)=\max\{\alpha,\beta\}$；

$S_P(\alpha,\beta)=\alpha+\beta-\alpha*\beta$；

$S_L(\alpha,\beta)=\min\{1,\alpha+\beta\}$；

$S_{\cos}(\alpha,\beta)=\min\{1,\alpha+\beta-\alpha\beta+\sqrt{(2\alpha-\alpha^2)(2\beta-\beta^2)}\}$

映射 $N:[0,1]\to[0,1]$，如果它单调递减且满足 $N(0)=1$ 和 $N(1)=0$，则称 N 为一个非门算子，$N_S(x)=1-x$ 称为标准非门算子。N 称为回旋的当且仅当 $N(N(x))=x(\forall x\in[0,1])$，一个回旋的非门算子是连续且单调递减的。

称 t-模 T 和 t-余模 S 为相对于非门算子 N 是对偶的当且仅当德摩根律成立，即：

$T(N(\alpha),N(\beta))=N(S(\alpha,\beta)),\alpha,\beta\in[0,1]$

$S(N(\alpha),N(\beta))=N(T(\alpha,\beta)),\alpha,\beta\in[0,1]$

上文定义的 T_M 和 S_M、T_P 和 S_P、T_L 和 S_L、$T_{\cos}$ 和 $S_{\cos}$ 分别关于标准非门算子 N 对偶。

定义 5[11,19]　设 T 是三角模，在[0,1]上定义一个二元运算 $\theta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$\theta(\alpha,\beta)=\sup\{b\in[0,1]:T(\alpha,b)\leqslant\beta\},\alpha,\beta\in[0,1]$，称 θ 为基于三角模 T 的蕴含算子。如果 T 是下半连续的，则称 θ 为 T-剩余蕴含。

常用的 T-剩余蕴含有：

$$\theta_M(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant\beta\\ \beta, & \alpha>\beta\end{cases}$$

$$\theta_P(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha=0\\ \min(1,\beta/\alpha), & \text{其他}\end{cases}$$

$$\theta_L(\alpha,\beta)=\min\{1,1-\alpha+\beta\}$$

$$\theta_{\cos}(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha\leqslant\beta\\ \alpha\beta+\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}, & \alpha>\beta\end{cases}$$

定义 6[11,19]　设 S 是三角余模，在[0,1]上定义一个二元运算 $\sigma:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$\sigma(\alpha,\beta)=\inf\{c\in[0,1]:S(\alpha,c)\geqslant\beta\},\alpha,\beta\in[0,1]$，称 σ 为基于三角余模 S 的蕴含算子。

如果 t-模 T 和 t-余模 S 相对于回旋非门算子 N 是对偶的，则 θ 和 σ 相对于回旋非门算子 N 也是对偶的，即：

$\sigma(N(\alpha),N(\beta))=N(\theta(\alpha,\beta)),\alpha,\beta\in[0,1]$

$\theta(N(\alpha),N(\beta))=N(\sigma(\alpha,\beta)),\alpha,\beta\in[0,1]$

常用的基于 S-蕴含有：

$$\sigma_M(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & \alpha\geqslant\beta\\ \beta, & \alpha<\beta\end{cases}$$

$$\sigma_L(\alpha,\beta)=\max\{0,\beta-\alpha\}$$

$$\sigma_P(\alpha,\beta)=\begin{cases}1, & \alpha=0\\ \max(0,(\beta-\alpha)/(1-\alpha)), & \text{其他}\end{cases}$$

$$\sigma_{\cos}(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & \alpha\geqslant\beta\\ \alpha+\beta-\alpha\beta-\sqrt{(2\alpha-\alpha^2)(2\beta-\beta^2)}, & \alpha<\beta\end{cases}$$

2.3　模糊粗糙集

定义 7[11]　设 U 是一个论域，A 是一个非空实值属性集合，称 (U,A) 是一个模糊信息系统。如果把 A 中的属性分成条件属性和决策属性，则称模糊信息系统 (U,A,D) 为模糊决策系统。

定义 8[11]　设 U 是一个论域，$R\in F(U\times U)$ 称为 U 上的

一个模糊关系，如果 R 满足：

(1)自反性：$R(x,x)=1$；

(2)对称性：$R(x,y)=R(y,x)$；

(3)T-传递性：$T(R(x,y),R(y,z))\leqslant R(x,z)$。

则称 R 是 U 上的一个模糊 T-相似关系；如果 $T=T_M$，则称 R 是 U 上的一个模糊等价关系。

给定模糊决策系统 (U,A,D) 和模糊等价关系 R，模糊集合 X 的下、上近似[1]定义为：

$$\underline{R_{\max}}X(x)=\inf_{y\in U}\max(1-R(x,y),X(y))$$

$$\overline{R_{\min}}X(x)=\sup_{y\in U}\min(R(x,y),X(y))$$

给定模糊决策系统 (U,A,D)、模糊 T-等价关系、剩余蕴含 θ 和对偶算子 σ，模糊集合 X 的下、上近似[20]定义为：

$$\underline{R_\theta}X(x)=\inf_{y\in U}\theta(R(x,y),X(y))$$

$$\overline{R_\sigma}X(x)=\sup_{y\in U}\sigma(N(R(x,y)),X(y))$$

更一般地，基于一般模糊关系，模糊集合 X 的下、上近似[6]定义为：

$$\underline{R_S}X(x)=\inf_{y\in U}S(N(R(x,y)),X(y))$$

$$\overline{R_T}X(x)=\sup_{y\in U}T(R(x,y),X(y))$$

3 基于新的核函数的模糊粗糙集

3.1 基于模糊相似关系的核函数

定义 9[12] 给定非空论域 U，实值函数 $k:U\times U\rightarrow R$ 被称为核函数，如果对于任意的 $x,y\in U$，它满足对称性和半正定性。

定义 10[16] 映射 $R:X\times X\rightarrow[0,1]$ 被称作 F-不可辨识算子，如果对于 $\forall x,y,z\in X$，下列条件满足：

(1)自反性：$R(x,x)=1$；

(2)对称性：$R(x,y)=R(y,x)$；

(3)F-传递性：$F(R(x,y),R(y,z))\leqslant R(x,z)$。

定理 1[16] 给定映射 $R:X\times X\rightarrow[0,1]$ 和连续 t-模 F，映射 R 是一个 F-不可辨识算子，当且仅当存在模糊子集 X 的集合 $\{h_j\}_{j\in J}$ 使得：

$$R(x,y)=\inf_{j\in J}F^{\wedge}(\mathrm{Max}(h_j(x),h_j(y))\,|\,\mathrm{Min}(h_j(x),h_j(y)))$$

对于所有的 $x,y\in X$ 成立，其中，$F^{\wedge}(x|y)=\sup\{\alpha\in[0,1]\,|\,F(\alpha,x)\leqslant y\}$，$h_j(x)$ 代表对象 x 对标准 j 的相似性度量评价。

特殊地，当 F 取为 $F(x,y)=\min(x,y)$ 时，有：

$$R(x,y)=\begin{cases}\inf\limits_{j\in J_{xy}}(\min(h_j(x),h_j(y))), & J_{xy}\neq\varnothing\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$J_{xy}=\{j\in J\,|\,h_j(x)\neq h_j(y)\}$。

文献[13]利用双蕴含算子构造 T-模糊相似关系，其中 T 代表常用的左连续 t-模。

T 的剩余蕴含：

$$\vec{T}(\alpha,\beta)=\sup\{c\in[0,1]\,|\,T(\alpha,c)\leqslant\beta\}$$

T 的诱导双蕴含：

$$\overleftrightarrow{T}(\alpha,\beta)=\min\{\vec{T}(\alpha,\beta),\vec{T}(\beta,\alpha)\}$$

定理 2[13] 给定左连续 t-模 T，$\overleftrightarrow{T}$ 为其诱导双蕴含算子，映射：$\mu_i:X\rightarrow[0,1]$，$i\in I$，I 非空，令映射 $E:X\times X\rightarrow[0,1]$，其中，$E(x,y)=\inf\limits_{i\in I}\overleftrightarrow{T}(\mu_i(x),\mu_i(y))$，则映射 E 为 T-模糊相似关系。

特殊地，当 t-模 T 给定为 $T_M(a,b)=\min(a,b)$ 时，有 $E(x,y)=\inf\limits_{i\in I}\min(\mu_i(x),\mu_i(y))$。

定理 3[13] 设 X 为非空论域，映射：$\mu_i:X\rightarrow[0,1]$，$i\in I$，I 非空，给定模糊等价关系 $E_M:X\times X\rightarrow[0,1]$，$E_M(x,y)=\inf\limits_{i\in I}\overleftrightarrow{T}_M(\mu_i(x),\mu_i(y))$，则模糊等价关系 E_M 是半正定的。

定理 4[14] T_M-等价关系是核函数。

定理 5[13] 对于任意的核函数 $k:U\times U\rightarrow R$，当它满足自反性，即 $k(x,x)=1$ 时，核函数至少满足 $T_{\cos}$-传递性，这里：

$$T_{\cos}(\alpha,\beta)=\max(\alpha\beta-\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2},0)$$

3.2 基于一种新的核函数的模糊粗糙集

定义 11 给定模糊决策系统：(U,A,F,D,G)，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，A 为条件属性集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，F 为 U 和 A 的关系集，D 为决策属性集，G 为 U 和 D 的关系集，在此系统中定义对象的相容关系矩阵：

$$r(x_i,x_j)=1-\left(\sum_{l=1}^{m}(f(x_i,a_l)-f(x_j,a_l))^2\right)/p$$
$$i,j\in\{1,\cdots,n\}$$

定理 6 对于任意的 $x_i,x_j\in U$，令

$$K_R(x_i,x_j)=\begin{cases}\inf\limits_{i,j\neq k,i,j,k\in\{1,\cdots,n\}}\min(r(x_i,x_k),r(x_j,x_k)), & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

则 K_R 为核函数。

证明：根据定理 1 和定理 4，得证。

注意：1)定义 11 中的相容关系矩阵可以根据不同的距离生成，相应地，借助定理 6 可以构造不同的核函数。

2)当对象的各个属性值具有不同的单位和较大的相异程度时，为了消除量纲和属性数值大小的影响，可以将对象的所有属性值进行标准化处理。如需标准化，这里采用离差标准化处理，使得处理后的对象各属性值都在[0,1]之间，并且是没有单位的纯数量。

3)定义 11 中 p 的取值依相似关系矩阵元素而定：

若 $r(x_i,x_j)=1-\left(\sum\limits_{l=1}^{m}(f(x_i,a_l)-f(x_j,a_l))^2\right)\geqslant0$ 成立，则 p 取 1；

若 $r(x_i,x_j)=1-\left(\sum\limits_{l=1}^{m}(f(x_i,a_l)-f(x_j,a_l))^2\right)\geqslant0$ 不恒成立，则 p 取数据集中对象的属性个数 m。

4)将 F-不可辨识算子中的相似性度量评价 $h_j(x)$ 替换为 $\{r_{i,j}\}_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$，令 t-模 F 恰好取为 $F(x,y)=\min(x,y)$，化简后，有：

$$K_R(x_i,x_j)=\begin{cases}\inf\limits_{i,j\neq k,i,j,k\in\{1,\cdots,n\}}\min(r(x_i,x_k),r(x_j,x_k)), & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

此时，根据文献[9]将新定义的核函数用于模糊粗糙集中

作为模糊相似关系，则新的模糊粗糙集形式如下。

定义 12　给定非空论域 U 以及满足自反、对称和 $T_{\cos}$-传递性的核函数 K_R，对于任意的模糊集合 $X\in F(U)$，它的下近似和上近似分别如下：

S-核模糊下近似：

$$\underline{(K_R)_S}X(x)=\inf_{y\in U}S(N(K_R(x,y)),X(y))$$

θ-核模糊下近似：

$$\underline{(K_R)_\theta}X(x)=\inf_{y\in U}\theta(K_R(x,y),X(y))$$

T-核模糊上近似：

$$\overline{(K_R)_T}X(x)=\sup_{y\in U}T(K_R(x,y),X(y))$$

σ-核模糊上近似：

$$\overline{(K_R)_\sigma}X(x)=\sup_{y\in U}\sigma(N(K_R(x,y)),X(y))$$

给定模糊决策系统 (U,A,F,D,G)，决策属性集 D 将论域划分为 $\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$，对于 $\forall x\in U,d_i(x)=\begin{cases}0, & x\notin d_i\\ 1, & x\in d_i\end{cases}$，因为核函数是满足 $T_{\cos}$-传递性的，所以本文参见文献[9]，进一步得到上述下、上近似的简化形式：

$$\underline{(K_R)_S}d_i(x)=\inf_{y\notin d_i}(1-K_R(x,y))$$

$$\underline{(K_R)_\theta}d_i(x)=\inf_{y\notin d_i}(\sqrt{1-K_R^2(x,y)})$$

$$\overline{(K_R)_T}d_i(x)=\sup_{y\in d_i}K_R(x,y)$$

$$\overline{(K_R)_\sigma}d_i(x)=\sup_{y\in d_i}(1-\sqrt{1-K_R^2(x,y)})$$

3.3　实验分析

本节列举两个关于新的核函数 K_R 对对象之间相似性进行描述的比较实验。

(1)关于模糊信息表(见表 1)[18]的相似性度量比较

表 1　模糊信息表

U	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	0.6299	0.6299	0.3780	0.2520
x_2	0.2520	0.3780	0.5040	0.6299
x_3	0.6299	0.6299	0.2520	0.3780
x_4	0.1260	0.6299	0.3780	0.1260
x_5	0.2520	0.5040	0.6299	0.1260
x_6	0.3780	0.2520	0.1260	0.5040
x_7	0.6299	0.3780	0.2520	0.1260

实验结果如下：

原文中获得的相似关系矩阵：

$R=$

$$\begin{bmatrix}1.0000 & 0.6608 & 0.6979 & 0.6788 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6608\\ 0.6608 & 1.0000 & 0.6608 & 0.6608 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6608\\ 0.6979 & 0.6608 & 1.0000 & 0.6788 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6608\\ 0.6788 & 0.6608 & 0.6788 & 1.0000 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6608\\ 0.6550 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6550 & 1.0000 & 0.6550 & 0.6550\\ 0.6550 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6550 & 0.6550 & 1.0000 & 0.6550\\ 0.6608 & 0.6608 & 0.6608 & 0.6608 & 0.6550 & 0.6550 & 1.0000\end{bmatrix}$$

新的核函数 K_R 度量对象相似关系矩阵(由于此信息表中只涉及 4 个数值属性且相互之间的差异不明显，因此在该相似关系矩阵计算过程中没有对数据进行标准化处理，同时取 $p=1$)：

$K_R=$

$$\begin{bmatrix}1.0000 & 0.5398 & 0.6350 & 0.5873 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5398\\ 0.5398 & 1.0000 & 0.5398 & 0.5398 & 0.5238 & 0.5238 & 0.6351\\ 0.6350 & 0.5398 & 1.0000 & 0.5873 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5398\\ 0.5873 & 0.5398 & 0.5873 & 1.0000 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5398\\ 0.5238 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5238 & 1.0000 & 0.5873 & 0.5238\\ 0.5238 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5238 & 0.5873 & 1.0000 & 0.5238\\ 0.5398 & 0.6351 & 0.5398 & 0.5398 & 0.5238 & 0.5238 & 1.0000\end{bmatrix}$$

实验比较分析：与 R 相比，K_R 虽然整体减小，但矩阵元素的变化趋势相同，说明对象间相似程度的变化一致；更进一步可以看出，K_R 矩阵元素之间的变化率比 R 大，使得元素相近或远离的程度更加分明，以 $R(1,2)=0.6608,R(1,3)=0.6979$和 $K_R(1,2)=0.5398,K_R(1,3)=0.6350$ 为例，K_R 的增加率比 R 大，这与信息表的信息一致，与 x_2 相比，x_3 与 x_1 更相近；同理，当关系值减小时，K_R 以更大的减少率明确地表明了相离的程度。因此，K_R 对表明元素间相近或远离的程度更有说服力。

(2)IRIS 数据集上的实验比较

说明：1)特殊的核函数取为 Gauss 核：

$$k_G(x,y)=\exp(-\frac{\|x-y\|^2}{\delta}),\delta\text{ 取为 }0.2;$$

2)鉴于数据集数据相异性较大，对数据进行离差标准化处理：

$$f(x_i,a_l)=\frac{IRIS(i,l)-\min(IRIS(:,l))}{\max(IRIS(:,l))-\min(IRIS(:,l))}$$

其中，$IRIS(,)$表示 IRIS 数据集构成的矩阵。

为了保证相似关系矩阵的半正定性，p 取属性的个数 4。

实验结果的处理办法：1)由于 IRIS 数据集有 150 个对象，最终得到的对象间相互关系的矩阵为 150 * 150 阶矩阵，矩阵元素众多不便逐一列出，在此只截取第 100 个对象与各个对象在两种核函数定义下的相似程度的比较，比较结果如图 1 所示。

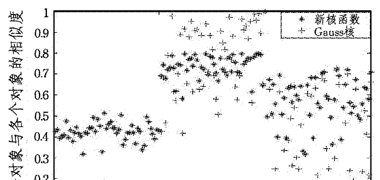

图 1　两种核函数下的对象相似关系比较

2)为便于统计，规定：若新定义的核函数矩阵元素比相应位置的 Gauss 核矩阵元素大，则矩阵元素的相应位置记为“1”，最终采取统计“1”个数的办法来得到实验的比较结果。

实验结果比较分析如下：

经统计，“1”的个数为 16640，占矩阵元素总数目的 73.96%，说明新定义的相似关系矩阵 K_R 中有 73.96%的元素大于 Gauss 核矩阵中的元素，因此采用新定义的 K_R 比用 Gauss 核能更有效地说明属性集对对象的描述能力。

同时可知，粗糙集、模糊粗糙集等理论对对象的分类是建

(下转第 87 页)

matical concept analysis[J]. ACM Transaction on Software Engineering and Methodology，1996，5(2)：146-189.
[7] SAMPATH S，SPRENKLE S，GIBSON E，et al. Applying concept analysis to user-session-based testing of web applications [J]. IEEE Transactions on Software Engineering，2007，33(10)：643-658.
[8] 张文修，仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京：清华大学出版社，2005.
[9] ZHANG W X，WEI L，QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science China Series F-Information Science，2005，48(6)：713-726.
[10] WANG J H，LIANG J Y，QIAN Y H. A heuristic method to attribute reduction for concept lattice[C]// Proceedings of the Ninth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Qingdao，2010：483-487.
[11] WEI L，QI J J，ZHANG W X. Attribute reduction ofconcept lattice in the form of decision making [J]. Science China Series F-Information Science，2008，38(2)：195-208. (in Chinese)
魏玲，祁建军，张文修. 决策形式背景的概念格属性约简[J]. 中国科学(E 辑)：信息科学，2008，38(2)：195-208.
[12] LI J H，MEI C L，LV Y J. A heuristic knowledge-reduction method for decision formal contexts[J]. Computers and Mathematics with Applications，2011，61(4)：1096-1106.
[13] LI J H，LV Y J. Attribute reduction and rule extraction in decision form based on concept lattice[J]. Mathematics in Practice and Theory，2009，39(7)：182-188. (in Chinese)
李金海，吕跃进. 基于概念格的决策形式背景属性约简及规则提取[J]. 数学的实践与认识，2009，39(7)：182-188.
[14] GANTER B，WILLE R. Formal concept analysis，mathematical foundations[M]. New York：Springer，1999.
[15] BURMEISTER P，HOLZER R. On the treatment of incomplete knowledge in formalconcept analysis[C]// Conceptual Structures：Logical，Linguistic，and Computational Issues. Berlin，Heidelberg：Springer-Verlag，2000：385-398.

(上接第 73 页)

立在相似关系上的，相似关系构成了对论域的划分，如果相似关系过小，可能会出现过分类的现象，这样的划分是没有任何意义的，因此较大的相似程度对模糊分类有一定益处；而且，由定义 12 得知，当相似关系增大时，模糊集合的下近似程度会降低，使得分划的泛化能力增强，也即基于相似关系训练的分划方法对新样本的输入会有合理的响应能力。

综合(1)、(2)的实验结果，新定义的核函数的效果在一定程度上优于特殊的核函数，具有一定的实用性。

结束语　本文从数据表的相似矩阵出发构造了一种新的核函数，建立了基于此核函数的核模糊粗糙集；同时尝试将新提出的核函数用于两个数据集中对象间的相似性度量实验，并与常用方法进行比较分析，结果表明，新定义的核函数在刻画对象的相近程度和属性对对象的描述能力方面具有更好的效果，有一定的推广性。由于篇幅有限，将在以后的文章中探索新的核函数在基于模糊粗糙集的粒化、属性约简和变精度模糊粗糙集等方面的应用。

参 考 文 献

[1] DUBOIS D，PRADE H. Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets[J]. International Journal of General Systems，1990，17(2/3)：191-209.
[2] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社，2003.
[3] WU W Z，ZHANG W X. Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences，2004，159(3/4)：233-254.
[4] WU W Z，LEUNG Y，MI J S. On characterizations of (I，T)-fuzzy rough approximation operators[J]. Fuzzy Sets and Systems，2005，154(1)：76-102.
[5] WU W I，MI J S，ZHANG W X. Generalized fuzzy rough sets [J]. Information Sciences，2003，151(3)：263-282.
[6] YEUNG D S，CHEN D G，TSANG E C C，et al. On the generalization of fuzzy rough sets[J]. IEEE Transactins on Fuzzy Systems，2005，13(3)：343-361.
[7] WU W Z. On some mathematical structures of T-fuzzy rough set algebras in infinite universes of discourse[J]. Fundamenta Informaticae，2011，108(3/4)：337-369.
[8] MI J S，LEUNG Y，ZHAO H Y，et al. Generalized fuzzy rough sets determined by a triangular norm [J]. Information Sciences，2008，178(16)：3203-3213.
[9] HU Q H，YU D，WITOLD P，et al. Kernelized fuzzy rough sets and their applications [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering，2011，23(11)：1649-1667.
[10] CHEN D G，YANG Y P，WANG H. Granular computing based on fuzzy similarity relations[J]. Soft Computing，2011，15(6)：1161-1172.
[11] 陈德刚. 模糊粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2013.
[12] CORINNA C，VLADIMIR V. Support-Vector Networks[J]. Machine Learning，1995，20(2)：273-297.
[13] MOSER B. On representing and generating kernels by fuzzy equivalence relations [J]. Journal of Machine Learning Research，2006，7(6)：2603-2620.
[14] MOSER B. On the T-transitivity of kernels[J]. Fuzzy Sets and Systems，2006，157(13)：1787-1796.
[15] GENTON M G. Class of kernels for machine learning：A statistics prospective [J]. Journal of Machine Learning Research，2001，2(2)：299-312.
[16] VALVERDE L. On the structure of F-indistinguishability operators[J]. Fuzzy Sets and Systems，1985，17(3)：313-328.
[17] PINKUS A，FITZGERALD C H，MICCHELLI C A. Functions that preserve families of positive semidefinite metrics [J]. Linear algebra and Application，1995，221(93)：83-102.
[18] ZHANG H Y，ZHANG W X，DONG M G. Representations of interval-valued fuzzy T-equivalence relations[J]. Information-An International Interdisciplinary Journal，2011，14(1)：51-63.
[19] BELOHLAVEK R. Fuzzy Relational Systems：Foundations and Principles[M]. Kluwer Academic Publishers Norwell，MA，USA，2002.
[20] MI J S，ZHANG W X. An Axiomatic Characterization of a Fuzzy Generalization of Rough Sets[J]. Information Sciences，2004，160(1)：235-249.