第45卷 第6期
2018年6月
计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE
Vol.45 No.6
June 2018

决策系统基于不可区分关系及区分关系的约简

秦克云 敬思惠

(西南交通大学数学学院 成都 610031)

摘 要 信息系统中的知识约简和知识发现是粗糙集理论的重要研究方向。针对决策系统中的不可区分关系及区分关系,给出相应的协调集判定定理,进而借助区分矩阵及区分函数给出属性约简方法,并借助实例将其与已有的相关研究工作进行了对比分析。

关键词 粗糙集,不可区分关系,区分关系,属性约简

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.044

Attribute Reduction of Decision Systems Based on Indiscernibility Relation and Discernibility Relation

QIN Ke-yun JING Si-hui

(College of Mathematics,Southwest Jiaotong University,Chengdu 610031,China)

Abstract Knowledge reduction and knowledge discovery in the information systems are important topics of rough set theory. Based on the indiscernibility relation and discernibility relation of decision systems,the judgement theorems for relative indiscernibility consistent set and relative discernibility consistent set were provided. This paper gave the attribute reduction method by discernibility matrices and discernibility functions,and analyzed it and relevant research work by means of examples.

Keywords Rough set,Indiscernibility relation,Discernibility relation,Attribute reduction

1 引言

粗糙集理论是一种处理不确定性问题的数学工具,由波兰学者 Pawlak[1]于 1982 年首次提出,已经在理论和应用方面取得了长足的发展,受到了学术界的广泛关注。目前,粗糙集理论已经在人工智能、知识与数据发现、模式识别与分类、故障检测等方面得到了广泛的应用。

信息系统理论研究是粗糙集理论的一个重要方向,其中的约简问题是粗糙集理论和应用研究的热点问题。不可区分关系[1-2]是粗糙集理论的基础,其实质指出这样一个事实:由于我们认识问题的深入程度有限,或者可获得的数据样本不完备,使得我们缺乏足够的知识去区分论域中的某些数据对象。基于不可区分关系,人们从相关实际问题的研究背景出发,提出了多种信息系统知识约简标准及约简理论,如正域约简[2]、分配约简[3]、分布约简[3]、最大分布约简[4-5]、基于信息熵的约简[6]、M 约简[7]、基于关系的约简[8]等。相关约简理论还被应用于不完备决策系统[9]。目前,基于决策粗糙集理论的决策系统约简是热门研究方向,受到了学术界的广泛关注[10-11]。以上约简大多可以通过 Skowron 等[12]提出的区分矩阵与区分函数获得,但其中涉及的布尔合取范式到布尔析取范式的转换是 NP-难问题。因此,人们分别从属性依赖度、属性信息熵、属性在区分矩阵中出现的频率等角度提出了属性重要度,进而基于属性重要度设计了一些计算约简的启发式算法[13-17]。不可区分关系用于刻画信息系统中对象的相似性,具有明确的语义解释,即具有相同描述的对象之间不可区分。目前,完备信息系统属性约简主要针对不可区分关系进行讨论。Zhao 等[18]认为,作为不可区分关系的对偶关系,区分关系的研究同样具有重要的理论意义,进一步提出了弱不可区分关系、区分关系、弱区分关系的概念,讨论了它们的基本性质及相互关系。本文在文献[18]相关研究工作的基础上,进一步讨论了基于不可区分关系以及区分关系的决策系统约简方法。

2 Pawlak 粗糙集模型

Pawlak 粗糙集模型[1]将知识理解为对对象进行分类的能力,形式化的知识通过论域(即所讨论对象构成的集合)上的等价关系进行刻画。论域的子集从外延角度理解为概念。如果某子集恰为若干等价类的并集,则它表示一个精确概念,否则表示不确定性概念。在粗糙集模型中,不确定性概念借助上、下近似算子通过精确概念进行逼近。

到稿日期:2017-03-01 返修日期:2017-06-05 本文受国家自然科学基金(61473239,61372187),西华大学省部级学科平台开放课题(szjj2014-052)资助。

秦克云(1962-),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑,E-mail:keyunqin@263.net(通信作者);**敬思惠**(1993-),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论。

定义 1[1] 设U是非空集合,称为论域,R是U上的一个等价关系,称(U,R)为一个近似空间。对于任意的$X\subseteq U$,X关于(U,R)的上、下近似分别定义为:

$$\overline{R}(X)=\{x\in U;[x]_R\cap X\neq\emptyset\} \tag{1}$$

$$\underline{R}(X)=\{x\in U;[x]_R\subseteq X\} \tag{2}$$

其中,$[x]_R=\{y\in U;(x,y)\in R\}$为$x$关于$R$的等价类。

信息系统属性约简和知识获取是粗糙集理论的重要研究方向。一个信息系统是一个四元组$T=(U,A,V,f)$,其中U是非空有限集合,称为论域,其中的元素被称为对象;A是非空有限集合,其中的元素被称为属性;$V=\bigcup_{a\in A}V_a$,V_a是属性a的取值构成的集合,被称为a的值域;$f:U\times A\to V$被称为信息函数,它为每个对象关于每个属性赋予一个信息值,且对于任意的$x\in U,a\in A$,有$f(x,a)\in V_a$。

一个决策表是一个信息系统$S=(U,A,V,F)$,其中属性分为条件属性和决策属性,即$A=C\cup D,C\cap D=\emptyset$,$C$和$D$分别为条件属性和决策属性构成的集合。本文仅考虑只有一个决策属性d的决策表$S=(U,C\cup\{d\},V,F)$。

设$S=(U,A,V,f)$是信息系统。对于任意的$B\subseteq A$,由B确定的不可区分关系$Ind(B)$可定义为:对于任意的$x,y\in U$,$(x,y)\in Ind(B)$,当且仅当对于任意$a\in B,f(x,a)=f(y,a)$。

显然,不可区分关系$Ind(B)$是一个等价关系,由$Ind(B)$可以决定对象集合U的一个划分$\{[x]_B;x\in U\}$,其中$[x]_B$是x关于$Ind(B)$的等价类。对于任意的$a\in A$,将$Ind(\{a\})$简记为$Ind(a)$,显然有$Ind(B)=\bigcap_{a\in B}Ind(a)$。因此,当$B\subseteq C\subseteq A$时,有$Ind(C)\subseteq Ind(B)$。

设$S=(U,A,V,f)$是信息系统,$B\subseteq A$。Zhao 等[18]提出了如下关系:

1)由B确定的弱不可区分关系$WInd(B)$定义为:对于任意的$x,y\in U$,$(x,y)\in WInd(B)$,当且仅当存在$a\in B$,使得$f(x,a)=f(y,a)$。

2)由B确定的区分关系$Dis(B)$定义为:对于任意的$x,y\in U$,$(x,y)\in Dis(B)$,当且仅当对于任意的$a\in B,f(x,a)\neq f(y,a)$。

3)由B确定的弱区分关系$WDis(B)$定义为:对于任意的$x,y\in U$,$(x,y)\in WDis(B)$,当且仅当存在$a\in B$,使得$f(x,a)\neq f(y,a)$。

显然,$WInd(B)$是自反、对称关系,而$Dis(B)$与$WDis(B)$是反自反(即对于任意的$x\in U$,有$(x,x)\notin Dis(B)$,$(x,x)\notin WDis(B)$)、对称关系。一般情况下,$WInd(B)$,$Dis(B)$与$WDis(B)$都不具有传递性。对于任意的$a\in A,B\subseteq A$,下列性质显然成立[18]:

1)$Ind(a)=WInd(a),Dis(a)=WDis(a)$;

2)$Ind(B)=\bigcap_{a\in B}Ind(a),Dis(B)=\bigcap_{a\in B}Dis(a)$;

3)$WInd(B)=\bigcup_{a\in B}WInd(a),WDis(B)=\bigcup_{a\in B}WDis(a)$;

4)$WDis(B)=U\times U-Ind(B)$;

5)$WInd(B)=U\times U-Dis(B)$。

由性质5)可知,$WDis(B)$与$Ind(B)$、$WInd(B)$与$Dis(B)$分别互为关于U的补关系。因此,仅需讨论关于$Ind(B)$与$Dis(B)$的约简问题。Zhao 等[18]针对以上关系分别提出了不可区分约简和区分约简、不可区分-区分约简的概念,并借助区分矩阵与区分函数给出了约简计算方法。

不可区分关系与区分关系可以推广至决策系统。设$S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表。对于任意的$B\subseteq C$,相对于决策属性d而言,由B确定的相对不可区分关系$Ind_B(d)$和相对区分关系$Dis_B(d)$可分别定义为[18]:

$$Ind_B(d)=\{(x,y)\in U\times U;\forall b\in B(f(x,b)=f(y,b))\wedge f(x,d)=f(y,d)\} \tag{3}$$

$$Dis_B(d)=\{(x,y)\in U\times U;\forall b\in B(f(x,b)\neq f(y,b))\wedge f(x,d)\neq f(y,d)\} \tag{4}$$

Zhao 等[18]对$Ind_B(d)$与$Dis_B(d)$的相关特性进行了系统的分析并提出了相对约简的概念。本文进一步讨论基于$Ind_B(d)$与$Dis_B(d)$的决策系统属性约简问题,并借助区分函数给出约简方法。

3 决策表基于相对不可区分关系的约简

定义 2 设$S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表,$B\subseteq C$。如果$Ind_B(d)=Ind_C(d)$,则称B为S的相对不可区分协调集。如果B为S的相对不可区分协调集,且对于任意$b\in B$,$B-\{b\}$不是S的相对不可区分协调集,则称B为S的相对不可区分约简。

对于任意$x,y\in U$,令

$$Dm_d(x,y)=\begin{cases}\{a\in C;f(x,a)\neq f(y,a)\}, & 若\ f(x,d)=f(y,d)\\ \emptyset, & 若\ f(x,d)\neq f(y,d)\end{cases}$$

基于$Dm_d(x,y)$,给出如下的关于相对不可区分协调集的判定定理。

定理 1 设$S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表,$B\subseteq C$。$Ind_B(d)=Ind_C(d)$的充分必要条件是:对于任意$x,y\in U$,若$Dm_d(x,y)\neq\emptyset$,则$B\cap Dm_d(x,y)\neq\emptyset$。

证明如下。

必要性:假设$Ind_B(d)=Ind_C(d)$,且$x,y\in U$使得$Dm_d(x,y)\neq\emptyset$。于是$f(x,d)=f(y,d)$,且存在$a\in C$使得$f(x,a)\neq f(y,a)$,从而$(x,y)\notin Ind_C(d)$,故有$(x,y)\notin Ind_B(d)$。又有$f(x,d)=f(y,d)$,因此存在$a\in B$使得$f(x,a)\neq f(y,a)$,故$B\cap Dm_d(x,y)\neq\emptyset$。

充分性:假设对于任意$x,y\in U$,当$Dm_d(x,y)\neq\emptyset$时,有$B\cap Dm_d(x,y)\neq\emptyset$。$Ind_B(d)\supseteq Ind_C(d)$显然成立。对于任意$x,y\in U$,若$(x,y)\notin Ind_C(d)$,则$f(x,d)\neq f(y,d)$,或存在$a\in C$使得$f(x,a)\neq f(y,a)$。若$f(x,d)\neq f(y,d)$,则由定义可得$(x,y)\notin Ind_B(d)$;若$f(x,d)=f(y,d)$,则存在$a\in C$使得$f(x,a)\neq f(y,a)$,从而$Dm_d(x,y)\neq\emptyset$。由假设可得$B\cap Dm_d(x,y)\neq\emptyset$,即存在$b\in B$使得$f(x,b)\neq f(y,b)$,因此有$(x,y)\notin Ind_B(d)$。故$Ind_B(d)\subseteq Ind_C(d)$。

令$F_{Dm}=\wedge\{\vee Dm_d(x,y);Dm_d(x,y)\neq\emptyset\}$,称$F_{Dm}$为$S$的相对不可区分函数。基于 Skowron 等[12]的区分函数可以得到如下约简方法。

推论 1 设$S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表,$B\subseteq C$。B为S的相对不可区分约简的充分必要条件是:$\wedge B$为F_{Dm}的一个主蕴涵。

例 1　考虑如表 1 所列的决策表[18]。

表 1　决策表

Table 1　Decision table

	a	b	c	d	e	f	D
o_1	1	1	1	1	1	1	+
o_2	1	0	1	0	1	1	+
o_3	0	0	1	1	0	0	+
o_4	1	1	1	0	0	1	−
o_5	1	0	1	0	1	1	−
o_6	0	0	0	1	1	0	−
o_7	1	0	1	1	1	1	−
o_8	0	0	0	0	1	1	−
o_9	1	0	0	1	0	0	−

其中，$U=\{o_i;1\leqslant i\leqslant 9\}$为对象集，$C=\{a,b,c,d,e,f\}$为条件属性集，$D$ 为决策属性。由定义 2，$Dm_d(x,y)$的具体情况如表 2 所列。

表 2　相对不可区分约简的区分矩阵

Table 2　Discernibility matrix of relative indiscernibility reduction

	o_1	o_2	o_3	o_4	o_5	o_6	o_7	o_8
o_1	∅							
o_2	bd	∅						
o_3	$abef$	$adef$	∅					
o_4				∅				
o_5				be	∅			
o_6				$abcdef$	$acdf$	∅		
o_7				bde	d	acf	∅	
o_8				$abce$	ac	df	acd	∅
o_9				$bcdf$	$cdef$	ae	cef	$adef$

因此，有：

$$\begin{aligned}F_{Dm}&=\wedge\{\vee Dm_d(x,y);Dm_d(x,y)\neq\varnothing\}\\&=d\wedge(a\vee e)\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee e)\wedge(c\vee e\vee f)\\&=(a\wedge d\wedge e)\vee(c\wedge d\wedge e)\\&\quad\vee(a\wedge b\wedge c\wedge d)\vee(a\wedge b\wedge d\wedge f)\end{aligned}$$

故其相对不可区分约简为$\{a,d,e\}$，$\{c,d,e\}$，$\{a,b,c,d\}$和$\{a,b,d,f\}$。

注：此例中的相对不可区分关系 $Ind_C(D)=\{(x,x);x\in U\}$为论域 U 上的恒等关系。Zhao 等[18]针对该决策表得到的相对不可区分约简为$\{a,b,d,e\}$，$\{b,c,d,e\}$，$\{a,b,c,d\}$和$\{b,c,d,f\}$。事实上，$B=\{b,c,d,f\}$并不是相对不可区分约简，因为显然有$(o_6,o_9)\in Ind_B(D)$，$(o_6,o_9)\notin Ind_C(D)$，所以可得 $Ind_B(D)\neq Ind_C(D)$，即 $B=\{b,c,d,f\}$不是相对不可区分协调集。另外，$E=\{a,b,d,e\}$也不是相对不可区分约简，因为从 $E=\{a,b,d,e\}$中删除属性 b 后得到的$\{a,d,e\}$仍然为相对不可区分协调集。对于对象 $x,y\in U$，当它们的决策属性值相同，即 $f(x,d)=f(y,d)$时，需要进行区分；而当它们的决策属性值不同时无须区分。因此，文献[18]将区分属性定义为：

$$Dm_d(x,y)=\begin{cases}\{a\in C;f(x,a)\neq f(y,a)\}, & 若\ f(x,d)\neq f(y,d)\\ \varnothing, & 若\ f(x,d)=f(y,d)\end{cases}$$

是错误的。

4　决策表基于相对区分关系的约简

定义 3　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表，$B\subseteq C$。如果 $Dis_B(d)=Dis_C(d)$，则称 B 为 S 的相对区分协调集。如果 B 为 S 的相对区分协调集，则称 B 为 S 的相对区分约简，且对于任意的 $b\in B$，$B-\{b\}$不是 S 的相对区分协调集。

对于任意的 $x,y\in U$，令

$$Im_d(x,y)=\begin{cases}\{a\in C;f(x,a)=f(y,a)\}, & 若\ f(x,d)\neq f(y,d)\\ \varnothing, & 若\ f(x,d)=f(y,d)\end{cases}$$

定理 2　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表，$B\subseteq C$。$Dis_B(d)=Dis_C(d)$的充分必要条件是：对于任意的 $x,y\in U$，若 $Im_d(x,y)\neq\varnothing$，则 $B\cap Im_d(x,y)\neq\varnothing$。

证明如下。

必要性：假设 $Dis_B(d)=Dis_C(d)$，且 $x,y\in U$ 使得 $Im_d(x,y)\neq\varnothing$。于是 $f(x,d)\neq f(y,d)$且存在 $a\in C$ 使得 $f(x,a)=f(y,a)$，从而$(x,y)\notin Dis_C(d)$，故有$(x,y)\notin Dis_B(d)$。又由于 $f(x,d)\neq f(y,d)$，因此存在 $a\in B$ 使得 $f(x,a)=f(y,a)$，于是 $a\in Im_d(x,y)$。故 $B\cap Im_d(x,y)\neq\varnothing$。

充分性：假设对于任意的 $x,y\in U$，当 $Im_d(x,y)\neq\varnothing$ 时，有 $B\cap Im_d(x,y)\neq\varnothing$。$Dis_B(d)\supseteq Dis_C(d)$显然成立。对于任意的 $x,y\in U$，若$(x,y)\notin Dis_C(d)$，则 $f(x,d)=f(y,d)$，或存在 $a\in C$ 使得 $f(x,a)=f(y,a)$。若 $f(x,d)=f(y,d)$，则由定义可得$(x,y)\notin Dis_B(d)$；若 $f(x,d)\neq f(y,d)$，则存在 $a\in C$ 使得 $f(x,a)=f(y,a)$，从而 $Im_d(x,y)\neq\varnothing$。由假设可得 $B\cap Im_d(x,y)\neq\varnothing$，即存在 $b\in B$ 使得 $f(x,b)=f(y,b)$，因此有$(x,y)\notin Dis_B(d)$。故 $Dis_B(d)\subseteq Dis_C(d)$。

令 $F_{Im}=\wedge\{\vee Im_d(x,y);Im_d(x,y)\neq\varnothing\}$，称 F_{Im} 为 S 的相对区分函数。

推论 2　设 $S=(U,C\cup\{d\},V,F)$是一个决策表，$B\subseteq C$。B 为 S 的相对区分约简的充分必要条件是：$\wedge B$ 为 F_{Im} 的一个主蕴涵。

例 2　考虑例 1 中的决策表。由定义 3，$Im_d(x,y)$如表 3 所列。

表 3　相对区分约简的区分矩阵

Table 3　Discernibility matrix of relative discernibility reduction

	o_1	o_2	o_3
o_4	$abcf$	$acdf$	ce
o_5	$acef$	$abcdef$	bc
o_6	de	be	$abdf$
o_7	$acdef$	$abcef$	bcd
o_8	ef	$bdef$	ab
o_9	ad	ab	$bdef$

因此，有：

$$\begin{aligned}F_{Im}&=\wedge\{\vee Im_d(x,y);Im_d(x,y)\neq\varnothing\}\\&=(a\vee b)\wedge(a\vee d)\wedge(b\vee e)\wedge(b\vee c)\\&\quad\wedge(c\vee e)\wedge(d\vee e)\wedge(e\vee f)\\&=(a\wedge b\wedge e)\vee(a\wedge c\wedge e)\\&\quad\vee(b\wedge d\wedge e)\vee(b\wedge c\wedge d\wedge f)\end{aligned}$$

故其相对区分约简为$\{a,b,e\}$，$\{a,c,e\}$，$\{b,d,e\}$和$\{b,c,d,f\}$。

注：容易验证，此例中相对区分关系 $Dis_C(D)=\varnothing$。Zhao 等[18]分别针对决策属性值＋和－计算属性约简，得到的相对区分约简为：

$$f(im_+)=c\vee(a\wedge b\wedge d)\vee(b\wedge d\wedge e)\vee(b\wedge d\wedge f)$$

$$f(im_-)=(a\wedge b\wedge d)\vee(a\wedge c\wedge d\wedge e)\vee(a\wedge c\wedge e\wedge f)\vee(b\wedge c\wedge d)$$

因此，$B=\{a,b,d\}$是相对区分＋约简，也是相对区分－约简。事实上，经计算可得：

$$Did_B(D)=\{(o_1,o_8),(o_8,o_1),(o_3,o_4),(o_4,o_3)\}$$

因此，$Did_B(D)\neq Did_C(D)$，即 B 不能保持相对区分关系不变，故 B 不是相对区分约简。对于对象 $x,y\in U$，在相对区分约简的标准下，当它们的决策属性值不同(即 $f(x,d)\neq f(y,d)$)时，需要区分；而当它们的决策属性值相同时无须区分。因此，文献[18]将区分属性定义为：

$$Im_d(x,y)=\begin{cases}\{a\in C:f(x,a)=f(y,a)\}, & 若\ f(x,d)=f(y,d)\\ \varnothing, & 若\ f(x,d)\neq f(y,d)\end{cases}$$

是错误的。另外，相对区分约简应针对所有决策属性值统一计算。

结束语 信息系统中的知识约简和规则获取是粗糙集理论的重要研究方向。针对完备信息系统，相关文献大多基于不可区分关系讨论其约简问题，基于区分关系的约简问题研究较少。本文针对完备决策系统中的相对不可区分关系及相对区分关系，给出了协调集判定定理，进而借助区分矩阵与区分函数给出了相对不可区分约简及相对区分约简的计算方法。本文给出的约简与已有约简(如正域约简、分配约简等)之间的关系需要进一步研究。另外，高效约简算法的研究也具有重要意义。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough set [J]. International Journal of Computer and Information Science，1982，11(5)：341-356.

[2] PAWLAK Z，SOWINSKI R. Rough set approach to multi-attribute decision analysis[J]. European Journal of Operational Research，1993，72(3)：443-459.

[3] KRYSZKIEWICZ M. Comparative studies of alternative type of knowledge reduction in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems，2001，16(1)：105-120.

[4] ZHANG W X，MI J S，WU W Z. Knowledge reduction in inconsistent information systems[J]. Chinese Journal of Computers，2003，26(1)：12-18. (in Chinese)
张文修，米据生，吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报，2003，26(1)：12-18.

[5] ZHANG W X，MI J S，WU W Z. Approaches to knowledge reductions in inconsistent systems[J]. International Journal of Intelligent Systems，2003，18(9)：989-1000.

[6] WANG G Y，YU H，YANG D C. Decision table reduction based on conditional information entropy[J]. Chinese Journal of Computers，2002，25(7)：759-766. (in Chinese)
王国胤，于洪，杨大春. 基于条件信息熵的决策表约简[J]. 计算机学报，2002，25(7)：759-766.

[7] YE D Y，CHEN Z J. A new type of attribute reduction for inconsistent decision tables and its computation[J]. International Journal of Uncertainty，Fuzziness and Knowledge-Based Systems，2010，18(2)：209-222.

[8] MIAO D Q，ZHAO Y，YAO Y Y，et al. Relative reducts in consistent and inconsistent decision tables of the Pawlak rough set model[J]. Information Sciences，2009，179(24)：4140-4150.

[9] MENG Z Q，SHI Z Z. Extended rough set-based attribute reduction in inconsistent incomplete decision systems[J]. Information Sciences，2012，204(20)：44-66.

[10] YAO Y Y，ZHAO Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences，2008，178(17)：3356-3373.

[11] YAO Y Y. The superiority of three-way decision in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences，2011，181(6)：1080-1096.

[12] SKOWRON A，RAUSZER C. The discernibility matrices and functions in information systems[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1992：331-362.

[13] WANG J，WANG R，MIAO D Q，et al. Data enriching based on rough set theory[J]. Chinese Journal of Computers，1998，21(5)：393-400. (in Chinese)
王珏，王任，苗夺谦，等. 基于 Rough Set 理论的数据浓缩[J]. 计算机学报，1998，21(5)：393-400.

[14] MIAO D Q，HU G R. A heuristic algorithm for reduction of knowledge[J]. Journal of Computer Research and Development，1999，36(6)：681-684. (in Chinese)
苗夺谦，胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究与发展，1999，36(6)：681-684.

[15] JIA P，DAI J H，PAN Y H，et al. Novel algorithm for attribute reduction based on mutual-information gain ratio[J]. Journal of Zhejiang University，2006，40(6)：1041-1045. (in Chinese)
贾平，代建华，潘云鹤，等. 一种基于互信息增益率的新属性约简算法[J]. 浙江大学学报，2006，40(6)：1041-1045.

[16] LI M，SHANG C X，FENG S Z，et al. Quick attribute reduction in inconsistent decision tables[J]. Information Sciences，2014，254(1)：155-180.

[17] LI B，CHWO T W S，TANG P. Analyzing rough set based attribute reductions by extension rule[J]. Neurocomputing，2014，123(123)：185-196.

[18] ZHAO Y，YAO Y Y，LUO F. Data analysis based on discernibility and indiscernibility[J]. Information Sciences，2007，177(22)：4959-4976.