

基于变换域中数字网络计算机快速设计算法的研究

张维玺 张 俐

(江苏技术师范学院 常州 213001)

摘 要 本文提出用数字平移理论,从已知理想数字低通的系统直接得到所需数字系统的原理和方法。节省了计算机内存,提高了运算速度,并用算例说明了其正确性。

关键词 数字平移,变换,系统,数字滤波器

1 原理

设理想的数字低通网络的传输函数为:

$$H(Z') = \frac{a_0 z'^n + a_1 z'^{n-1} + a_2 z'^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n}{b_0 z'^n + b_1 z'^{n-1} + b_2 z'^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z' + b_n} \quad (1)$$

如果把上式中用(2)、(3)、(4)、(5)式代替就会得到我们所需的数字低通、高通、带通、带阻滤波器的传输函数 $H(Z)$ 。

$$Z' = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad a = \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}}{\sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \quad (2)$$

ω_1 为低通原型的截止频率, ω_2 变换后所要求低通网络截止频率。

$$Z' = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \quad a = -\frac{\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}}{\cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}} \quad (3)$$

ω_1 为低通原型的截止频率, ω_2 变换后所要求高通网络截止频率。

从数字低通到数字带通:

$$Z' = -\frac{z^{-2} + bz^{-1} + a}{az^{-2} + bz^{-1} + 1} \quad (4)$$

$$a = \frac{k-1}{k+1} \quad b = \frac{2\alpha k}{k+1}$$

$$a = \frac{\cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}}{\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \quad k = c \tan \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} \tan \frac{\theta_c}{2}$$

ω_2, ω_1 为变换后数字带通网络上、下截止频率, θ_c 是低通原形的截止频率。

从数字低通到数字带通:

$$Z' = -\frac{z^{-2} + bz^{-1} + a}{az^{-2} + bz^{-1} + 1} \quad (5)$$

$$a = \frac{-k+1}{k+1} \quad b = -\frac{2\alpha}{k+1}$$

$$a = \frac{\cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)}{2}}{\cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}} \quad k = c \tan \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} \tan \frac{\theta_c}{2}$$

这种变换如果系统函数的阶数大于两阶,人工计算十分麻烦或者是不可能的。

下面用平移算法就可解决这个问题。具体方法是:

本文定义 $Z' = c[(z+u)/(z-u)]$

设 Z' 域传递函数为:

$$H(Z') = \frac{a_0 z'^n + a_1 z'^{n-1} + a_2 z'^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n}{b_0 z'^n + b_1 z'^{n-1} + b_2 z'^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z' + b_n} \quad (6)$$

把 $Z' = c[(z+u)/(z-u)]$ 代入(1)式得

$$H(z) = H(z')_{z' \rightarrow c \frac{z+u}{z-u}} =$$

$$\frac{(z-u)^n \sum_{i=0}^n c^{n-i} a_i [z+u/z-u]^{n-i}}{(z-u)^n \sum_{i=0}^n c^{n-i} b_i [z+u/z-u]^{n-i}} = \frac{D(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^n d_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n e_i z^{n-i}}$$

因此以下只要讨论

$$H(z) = \sum_{i=0}^n a_i z'^{n-i} \quad (7)$$

在 $Z' = c(z+u)/(z-u)$ 下 $H(z) = (z-u)^n$

$\sum_{i=0}^n a_i c^{n-i} (z+u/z-u)^{n-i}$ 的展开式就可以了。

$H(z)$ 可通过下列步骤展开。

(1) 把 $H(z)$ 平移 -1 个单位, 得 $H'(z') =$

$$\sum_{i=0}^n c_i z'^{n-i}$$

(2) 令 $H''(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}$, 并把 $H''(z)$ 平移 c 个

单位, 即得 $H^*(z)$ 的展开式 $H(z) = \sum_{i=0}^n d_i z^{n-i}$

其中 $b_i = (2c)^i c_{n-i} (i=0, 1, 2, \cdots, n)$

现证明如下:

令 $x = z - c$, 则 $s = (x+2c)/x$ 代入(13)得

$$f'(x) = H^*\left(\frac{z+c}{z-c}\right) = x^n \sum_{i=0}^n \left(1 + \frac{2c}{x}\right)^{n-i} = x^n$$

$$\sum_{i=0}^n c_{n-i} \left(\frac{2c}{x}\right)^i$$

其中 $c_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 是 $G(s)$ 平移 -1 个单位求得。

令 $b_i = (2c)^i c_{n-1}$, 则 $f'(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$, 因 $x = z - c$

$$\text{故 } H^*(z) = f'(z - c) = \sum_{i=0}^n b_i (z - c)^{n-i} =$$

$$\sum_{i=0}^n d_i z^{n-i}$$

其中 d_i 是 $f'(x)$ 平移 c 个单位求得的。

现举例说明设计过程:

$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$, 将它变换为数字低通滤波器。

解: 由 $H(s)$ 知分母 $F(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$

①将 $F(s)$ 平移 -1 个单位。

所以 $c_0 = 1$ $c_1 = 5$ $c_2 = 9$ $c_3 = 6$
($c_i (i=0, 1, 2, 3)$)

$$b_i = 2^i c_{n-i} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n)$$

则 $b_0 = c_3 = 6$ $b_1 = 2c_2 = 18$ $b_2 = 4c_1 = 20$ $b_3 = 8c_0 = 8$

得中间多项式 $F'(x)$, $F'(x) = 6x^3 + 18x^2 + 20x + 8$

②将 $F'(x)$ 再平移 -1 个单位就得到了数字滤波器 $H(Z)$ 的分母多项式 $F(Z)$ 。

于是 $F(z) = 6z^3 + 36z^2 + 74z + 52$

③由 $H(s)$ 知分子 $E(s) = 1$, 用同样的方法算出 $H(Z)$ 分子多项式 $E(Z)$ 是:

$$E(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

④变换后的数字低通滤波器的传输函数是:

$$H(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{6z^3 + 36z^2 + 74z + 52}$$

从上面分析看出:

(1) 它非常实用于手算。

(2) 整个过程只要加法运算, 占计算机内存少。因此, 该算法运算速度高。

(3) 程序编写规范。

2 设计

从数字低通到数字低通、高通、带通、带阻的转变, 平移算法设计如下:

1. 从数字低通到数字低通

由(2)式得:

$$Z' = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{\frac{1}{a} - a}{Z - \frac{1}{a}} \right]$$

将它代入(1)式用平移算就可得到所需的数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。具体步骤如下:

(1) 令 $a'_i = a_i(-1/a)$ $b'_i = b_i(-1/a)$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(2) 对 a'_i, b'_i 平移一个单位, 得 a''_i, b''_i

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(3) 令 $a'''_i = a''_{n-i}(1/a - a)^i$ $b'''_i = b''_{n-i}(1/a - a)^i$ $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(4) 对 a'''_i, b'''_i 平移 $-1/a$ 个单位, 得到的即为所求系数。

2. 从数字低通到数字高通

由公式(3)可得到下式:

$$Z' = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{a - \frac{1}{a}}{z + \frac{1}{a}} \right]$$

将它代入(1)式用平移算就可得到所需的数字高通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。具体步骤如下:

(1) 令 $a'_i = a_i(-1/a)$ $b'_i = b_i(-1/a)$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(2) 对 a'_i, b'_i 平移一个单位, 得 a''_i, b''_i

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(3) 令 $a'''_i = a''_{n-i}(a - 1/a)^i$ $b'''_i = b''_{n-i}(a - 1/a)^i$ $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(4) 对 a'''_i, b'''_i 平移 $1/a$ 个单位, 得到的即为所求系数。

算例:

$$H(Z') = \frac{z'^2 + 2z' + 1}{4z'^2}$$

令 $\alpha = 2$ 得数字高通函数 $H(z)$

$$H(Z) = \frac{0.25z^4 - 0.5z^2 + 0.25}{z^4 + 4z^3 + 8z + 4}$$

2 从数字低通到数字带通的转变:

由(4)式可得到下式:

$$Z' = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{(b - \frac{b}{a})z + a - \frac{1}{a}}{z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{1}{a}} \right] = -\frac{1}{a}$$

$$\left[1 + \frac{(\frac{(a-1)b}{a})(z + \frac{a+1}{b})}{z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{1}{a}} \right]$$

我们令

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{1}{a} = (z + \frac{a+1}{b})^2 + x(z + \frac{a+1}{b}) + y$$

我们可得到:

$$Z' = -\frac{z^2 + bz + a}{az^2 + bz + 1}$$

$$x = -\frac{b^2 - 2a(a+1)}{ab}$$

$$y = \frac{(a+1)^2}{b^2 - 1}$$

我们令 $t = \frac{m+y}{m+x}$

这样就得到了式

$$Z' = -\frac{1}{a} \left[1 + \frac{b(a-1)}{t} \right]$$

将它代入(1)式用平移算就可得到所需的数字高通 $i = 1, 2, \dots, n_0$ 。

我们就求得了 t 的函数,对 t 进行操作我们可得 m 的函数。

最后对 m 的函数平移 $(a+1)/b$ 个单位即可。

算例 通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。具体步骤如下:

$$(1) \text{ 令 } a'_i = a_i(-1/a) \quad b'_i = b_i(-1/a)$$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(2) 对 a'_i, b'_i 平移一个单位,得 $a''_i, b''_i \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

(3) 令 $a'''_i = a''_{n-i}(b(a-1)/a)^i \quad b'''_i = b''_{n-i}(b(a-1)/a)$

$$H(Z') = \frac{z'^2 + 2z' + 1}{4z'^2}$$

令 $\alpha = 2, b = 2$ 得带通函数 $H(z)$

$$H(Z) = \frac{0.25z^4 - 0.5z^2 + 0.25}{z^4 + 4z^3 + 8z + 4}$$

3 从数字低通到数字带阻的转变

与低通到带通基本相同,只要令 $a = (1-k)/(1+k) \quad b = 2\alpha/(1+k) \quad p_0 = 1/a$ 就可完成从数字域到数字域的变换,这里不再赘述。

算例

$$H(Z') = \frac{z'^2 + 2z' + 1}{4z'^2}$$

令 $a = 2, b = 2$ 得带阻函数 $H(Z)$

$$H(Z) = \frac{2.25z^4 + 3z^3 + 8.5z^2 + 6z + 2.25}{z^4 + 4z^3 + 8z + 4}$$

3 特点

1. 运算速度快。低通到低通普通算法的乘法次数是 $(n+2)2^n - 2$, 而用数字平移算法的乘法次数是 n^2 ; 低通到高通普通算法的乘法次数是 $(n+2)2^n - 2$, 而用数字平移算法的乘法次数是 n^2 ; 低通到带通普通算法的乘法次数是 $(3^n - 1)/2 + 2n3^n$, 而用数字平移算法的乘法次数是 $32^{n-1} + 4n^2 + 4n$;

低通到带阻普通算法的乘法次数是 $(3^n - 1)/2 + 2n3^n$, 而用数字平移算法的乘法次数是 $32^{n-1} + 4n^2 + 4n$;

从上面的比较清楚地看出数字平移算法的运算速度远快于普通算法。

2. 节约计算机内存。由于平移不需要中间结果,因此计算机内存就可节约许多,更有利于运算平台大众化。

3. 运算精度高。算法本身主要用的是平移和加法运算,各种误差的积累和传输机会小。

参考文献

- [1] 哈里 Y-F 拉姆著. 模拟和数字滤波器设计与实现. 人民邮电出版社, 1985. 313 ~ 334
- [2] 李师正. 多项式代数. 山东人民出版社, 1981

(上接第 105 页)

人和各个方面。其中主要的是形态和功能两大方面。

3) 基于组织学切片的三维重构图像在其它方面也被广泛地应用,如一定程度上应用到计算机辅助外科学(CAS)上,帮助医生制订手术计划。另外三维重构还在手术规划与模拟,解剖学教育和医学研究中发挥着重要的作用。

结论 综上所述,可视化技术在医学应用中具有广阔的发展和应用前景,并对提高医学手术规模和医疗水平提供技术保障和支持。未来的医学图像可视化将与虚拟现实技术相结合,创造一个虚拟的环境,让操作者像置身于真实世界一样。在医学实践中,医生可通过三维输入设备直接对病人的模型实施各种手术方案,整个模拟过程和实际的手术过程非常接近,这将会帮助医生制定最有效、最安全的

手术方案,最大程度上减轻患者的痛苦,治愈好患者。

参考文献

- [1] 万里洲. 人脑图谱中图像三维重建方法的研究与实现:[学位论文]
- [2] 石教英,蔡文立. 科学计算可视化算法与系统. 科学出版社
- [3] 罗述谦,周果宏. 医学图像处理与分析. 科学出版社
- [4] DeMarino D P, et al. Three - dimensional computed tomography in maxillofacial trauma. Arch. Otolaryngol. Head Neck Surg.
- [5] Purdy JA. Advances in three - dimensional treatment planning and conformal dose delivery. Semin Oncol, 1997, 24(6)
- [6] Task AAPM Group 25. Report on stereotactic radiosurgery:[Tech Rep 54]. 1995
- [7] 沈海戈,柯有安. 医学体数据三维可视化方法的分类与评价. 中国图像图形学报