# 分区加权 Voronoi 图的生成及其应用

马立玲 张有会 高荣华 曹清洁

(河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050016)

摘 要 分区加权 Voronoi 图是 Voronoi 图和加权 Voronoi 图的推广,它可以用来模拟移动通信当中基站发射天线 分扇区以不同功率向周围发射时所覆盖区域的形状。本文给出了分区加权 Voronoi 图的定义和它的离散生成算 法,以及由此算法生成的分区加权 Voronoi 图的实例。

关键词 移动通信,基站,加权 Voronoi 图,分区加权 Voronoi 图

## 1 引言

蜂窝移动通信系统<sup>[1]</sup>的出现,是移动通信的一 次革命,它为人们带来了通信方面的自由和便捷。 理想的蜂窝模型是基站等距均匀分布,每个基站覆 盖区域均为正六边形单元。但现实中移动台的分布 为泊松点的随机过程<sup>[2]</sup>,加上受地理环境等条件限 制,使得基站的布局不可能等距均匀分布,基站覆盖 区也就不可能成为规则的蜂窝状,从而容易产生信 号覆盖的盲区和重复覆盖区等不理想现象。于是在 具体施工中,往往采取使用定向天线,使各天线可发 射不同功率信号,以期改善通信质量,但由于这方面 的理论研究相对滞后,致使目前的效果还不尽如人 意。

为了从理论上解决基站位置选取等相关问题, 人们把 Voronoi 图理论应用到了移动通信当中, Voronoi 图是计算几何的一个重要分支,在计算几何 理论和应用中发挥着重要作用。在计算几何中, Voronoi 图理论成功地解决了寻找最近点,求最大空 圆, 求 n 个点的凸包, 求最小树等问题。在将 Voronoi 图用于移动通信的研究中,文[4]给出了由 平面上互相独立的泊松 Voronoi 图 V1 和 V2 叠加形 成的 Voronoi 图,它的 Voronoi 区域由 V<sub>1</sub>和 V<sub>2</sub>的 交集产生,这种模型被用来模拟有两个相互竞争的 电信集团的区域分割。文[5]根据多级基站的服务 系统,提出了一种用 Voronoi 图来划分 Voronoi 区域 的多级模型,即在平面 Voronoi 图的各个 Voronoi 区 域内再进行 Voronoi 分割,以模拟微蜂窝、微微蜂窝 等移动通信系统。本文在加权 Voronoi 图的基础上 提出了一种适用于定向天线的结构模型——分区加 权 Voronoi 图,并给出了相关概念和生成算法。

## 2 基本概念

2.1 Voronoi 🗷

Voronoi 图是根据已知点集对平面施行的一种 分割。其数学定义如下:

**定义 1** 给定平面上 n 个点构成的集合 S = {p<sub>1</sub>, p<sub>1</sub>, ..., p<sub>n</sub>}, 由

$$V(p_i) = \bigcap \{p | d(p, p_i) < d(p, p_j)\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

所给出的对平面的分割,称为以  $p_i(i = 1, 2, ..., n)$ 为 生成元(或母点)的 Voronoi 图,其中  $d(p, p_i)$ 为 p和  $p_i$ 间的 Euclid 距离,区域  $V(p_i)$ 称为  $p_i$ 的 Voronoi 区 域。显然,区域  $V(p_i)$ 是由平面上所有到  $p_i$ 的距离





比到 S 中其它点的距离都小的点组成的集合。

图 1 给出了一个 Voronoi 图的实例,图中黑点 为生成元,折线为 Voronoi 边。

Voronoi 图可视为以基站位置为生成元,各基站 为全向天线且功率足够大时的覆盖区域模型。

为方便,以下将"Voronoi 图"简记为 V 图,类似的用"V 边(点,区域)"表示"Voronoi 边(点,区域)" 等。

2.2 加权 V 图

定义 2 给定平面上 n 个点的集合 S = {p<sub>1</sub>,p<sub>2</sub>, …,p<sub>n</sub>},对每个生成元 p<sub>i</sub>(i = 1,2,…,n),赋以非负 实数权重 v<sub>i</sub>(i = 1,2,…,n),称 D(p,p<sub>i</sub>) = d(p - p<sub>i</sub>)/ v<sub>i</sub>为p和p<sub>i</sub>间的加权距离。称 V(p<sub>i</sub>,v<sub>i</sub>) = <u>∩</u> {p|D

马立玲 在读硕士研究生,主要研究方向是计算几何与优化设计、移动通信。张有会 教授,硕士生导师,主要研究方向是计算几何、计算机图 形学、图像处理、分形、数据库原理与应用。高荣华 在读硕士研究生,主要研究方向是计算几何与图像处理。曹清洁 在读硕士研究生,主要 研究方向是计算几何与图像处理。

(p,p<sub>i</sub>) < D(p,p<sub>j</sub>) 为点 p<sub>i</sub> 的权重为 λ<sub>i</sub> 的 V 区域。
 将 V(p<sub>i</sub>,v<sub>i</sub>)(i=1,2,…,n)及其边界,称为以 p<sub>i</sub>(i=1,2,…,n)为生成元(或母点),v<sub>i</sub>(i=1,2,…,n)为权
 重的点上加权的 V 图,通常简称为加权 V 图<sup>[7]</sup>。



图 2

图 2 给出了一个加权 V 图的实例。由定义可见, V 图是加权 V 图当所有生成元的权重均相等时的特例。

将基站位置作为生成元,基站天线为全向天线, 如取与基站发射功率相关的值作为权重,由此构造 的加权 V 图,可作为此情形下各基站覆盖区域的模 拟。

2.3 分区加权 V 图

分区加权 V 图是在加权 V 图的基础上扩展而 成的。加权 V 图是给每个生成元赋以一个权重值, 而分区加权 V 图则是把每个生成元的周围分为若 干个扇区,并给每个扇区赋以实数权重值(同一生成 元的不同扇区的权重值可以相同,也可以不同)。该 图可用来模拟定向天线情况下的基站覆盖区域的分 割。下面给出它的定义:

定义3 给定平面上 n 个点的集合  $S = \{p_1, p_2, p_3\}$ …, p<sub>n</sub>},对每个生成元 p<sub>i</sub>,以 p<sub>i</sub>为原点,水平向右为 坐标轴的正向,建立极坐标系,将生成元 pi 周围区 域分为  $m_i$  个扇区,以  $\theta = \alpha_{ij}(j = 1, 2, \dots, m_i)$ 为扇区 分界线,其中,0 < α<sub>i1</sub> < α<sub>i2</sub> < … < α<sub>imi</sub> < = 2π,并给每 个扇区赋以权重 v<sub>ii</sub>(j=1,2,…,m<sub>i</sub>)(如图 3)。称 V  $(p_i, \alpha_{ij}, v_{ij}) = \bigcap_{i \neq j} \{p | D(p, p_i) < D(p, p_j), \\ \leq j \neq m_i$ 时, p 在射线  $\theta = \alpha_{ij} = \theta = \alpha_{i(i+1)}$ 之间; 当 j = mi 时, p 在射线  $θ = α_{i1} = θ = α_{im_i} \ge 0$ ) 为点  $p_i$  的在第 j 扇区的权重为  $v_{ii}$ 的 V 区域(或称为  $p_i$  的第 j 加权扇区)。将 V( $p_i$ , a<sub>ij</sub>, v<sub>ij</sub>)(j=1,2,…,m<sub>i</sub>)(i=1,2,…,n)及其边界称为 以 p<sub>i</sub>(i=1,2,…,n)为生成元(或母点),以(V<sub>i1</sub>,V<sub>i2</sub>, ····, V<sub>im.</sub>)(i = 1, 2, ···, n)为相关联扇区权重的分扇区 加权 V 图,简称分区加权 V 图。如图 4 所示,其中 n=5,m1=m2=…=m5=3 且每个扇区的圆心角均 为2π。

## 3 分区加权 V 图的生成算法

分区加权V图是Voronoi图的扩展,其距离已



图 4

不是欧氏距离而是加权距离。下面由分区加权 V 图的定义出发,利用离散构造法思想<sup>[8]</sup>来生成分区 加权 V 图。

#### 3.1 算法的基本思想

首先介绍分区加权 V 图的离散生成算法的基 本思想。由定义3可知,分区加权 V 图的边界由两 部分组成,一部分是由距相邻两生成元的加权距离 相等的点构成(即这部分的点接收相邻两个基站的 信号相同),另一部分是由同一生成元的相邻扇区间 的分界线组成。对平面上给定的 n 个生成元,如果 分别以这 n个生成元为圆心,在各自的扇区以指定 的速率向外逐点扩展画弧,则 🚊 m<sub>i</sub> 个扇区中同一 生成元的相邻两扇区之间的分界线和不同生成元之 间的相邻两扇区相交形成的交线,即为分区加权 V 图的边界。在程序的具体执行过程中,将每一生成 元的 m<sub>i</sub> 个扇区赋以不同的颜色值 {(color<sub>il</sub>, color<sub>i2</sub>, …,color<sub>im</sub>) (i = 1,2,…,n),且使不同生成元各个 扇区的颜色也互不相同,这样,以每个生成元 p; 为 圆心,按自己各个扇区不同的权重(即速率)以指定 颜色向外扩展逐点画弧。在逐点画弧过程中,每画 一个点前要先进行检查:若该点已有颜色(即已被涂 过),则越过;否则,便以指定的颜色画点。当屏幕上 的所有象素都被涂上色时,结束。此时不同颜色区 域的边界即为分区加权 V 图的边界,将其抽出即 可。图 5 给出了当 n = 10, m<sub>1</sub> = m<sub>2</sub> = … = m<sub>10</sub> = 3 且 每个生成元三个扇区的圆心角均为2π时平面上分 区加权 V 图的离散生成过程。

#### 3.2 需注意的几个问题

3.2.1 扇区的划分 扇区的划分随生成元的不同而不同,对于生成元 P<sub>i</sub>,以 m<sub>i</sub>个不同的颜色和速



图 5

率在 m<sub>i</sub> 个扇区内向周围扩展,不能越过扇区边界。 P<sub>i</sub> 的扇区划分由给定的非负实数  $\alpha_{ij} \in [0, 2\pi], (j = 1, 2, \dots, m_i)$ (i = 1, 2, …, n)来决定,其扇区边界为 (以生成元为端点的 m<sub>i</sub> 条射线) $\theta = \alpha_{i1}, \theta = \alpha_{i2}, \dots, \theta$ =  $\alpha_{im_i}$ 。

3.2.2 分区加权 V 图边界的近似抽出 算法中 给出的是以不同的颜色来填充相应的 V 区域,而实 际应用中往往只需将 V 边抽出,具体做法如下:

先对以不同颜色区分 V 区域的分区加权 V 图

进行横向(如从左向右)和纵向(如从上向下)扫描, 在扫描过程中,如果某像素点与其后继像素点颜色 不同,就将其(或后继像素点,或二者)置为指定的颜 色(假定为黑色)。扫描完成后,分区加权 V 图的区 域边界便以指定的颜色(黑色)画了出来。最后进行 全屏幕扫描,只保留黑色像素点,其它颜色的像素点 全部置为背景色(如白色)。这样,分区加权 V 图的 边界就被以黑色线段或曲线的形式提取了出来。扫 描过程如图 6 所示。



图 6

3.2.3 V 区域涂满与否的判定 在分区加权 V 图的生成过程中,为了提高算法的运行速度,当某生 成元的 m<sub>i</sub> 个扇区都被涂满时,应将该生成元从需处 理的生成元集合中除去,不再对其进行处理。为此 需判断分区加权 V 区域是否被涂满,方法如下:

在轮流对 n 个生成元的不同扇区逐层向周围填 涂时,如果某一生成元的扇形圆弧上有未被填涂的 点,就继续填涂下去;如果某个生成元的 m; 个扇区的 圆弧上的所有像素点都已被填涂,说明该母点 m; 个 方向上的 V 区域均已确定,即可将该生成元从需处 理的生成元集中除去。图 7 为判断 V 区域是否涂满 的过程。 • 70 •



3.3 **算法的实现** 输入:生成元(母点)集合 S = {p<sub>1</sub>,p<sub>2</sub>,…,p<sub>n</sub>}, 各母点扇区方向参数的集合 A = {(a<sub>i1</sub>,a<sub>2</sub>,…,

 $\alpha_{im}$ ) { (i = 1, 2, ..., n),

母点各扇区权重的集合 V = {(v<sub>i1</sub>, v<sub>i2</sub>, …, v<sub>im</sub>)}(i=1,2,…,n)。

其中 $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im_i})$ 用来标记  $p_i$  的  $m_i$  个不同 扇区的分界线,  $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im_i})$ 是  $p_i$  的  $m_i$  个 不同扇区的权重。

输出:以S为生成元集,A为扇区分界线参数,V为 权重的分区加权 V图。

步一:建立链表 lian,用来存放生成元 p<sub>i</sub>(i=1,2, …,n)的数据,包括生成元的横坐标,纵坐标,扇区分 界线参数 q<sub>i</sub>,以及生成元的权重值(v<sub>i1</sub>,v<sub>2</sub>,…,v<sub>im</sub>)。

步二:将屏幕初始化为白色(背景色)。

步三:对每一生成元  $p_i$  生成各自的加权扇区, 并对生成元的  $m_i$  个扇区赋以不同的颜色值(color<sub>i1</sub>, color<sub>i2</sub>,…,color<sub>im<sub>i</sub></sub>),使所有生成元的各个扇区颜色 互不相同。

步四:当 lian 不空时,循环执行下面的操作:

使指针变量 p 指向 lian 的头结点;

```
当 p 不为空指针时,执行如下循环:
```

1

- h=0; //h 为整形变量,用来控制是否从链表中 删除 p 指针所指的结点
- { for(m<sub>0</sub> = 1; m<sub>0</sub> < = m<sub>i</sub>; m<sub>0</sub> + +) //m<sub>0</sub> 为整形变量 {在第 m<sub>0</sub> 个扇区内,以半径 r = r × p - > v<sub>im<sub>0</sub></sub>,以颜 色值 p - > color<sub>im</sub>, 画弧;

在画弧的过程当中,如果有未被填涂过的点,则



(a): 10 个生成元的分区加权 V 图

图 8

结论 本文是在一般加权 V 图的基础上来生成分区加权 V 图的,分区加权 V 图的,分区加权 V 图是 Voronoi 图的扩展,有很广泛的应用价值和发展前景。这种分区加权 V 图的结构模型可用来描述移动通信网络当中,当基站天线分方向以不同的功率向周围发射时,基站所覆盖的服务区范围及形状。

#### 参考文献

1 韦惠民,李白萍.蜂窝移动通信技术[M]. 西安电子科技

```
h = h + 1;

if (h 等于 0) then 删去该结点,令指针 p 指向下

一个结点;

else 此结点还需继续填充,令指针指向下一个结点;

}

r = r + 1; //r 为半径
```

步五:横向及纵向两次扫描全屏幕,如果某一像 素点与其后继像素点颜色不同,便将其置为黑色;

步六:横向(或纵向)扫描全屏幕,将非黑色像 素点置为白色;

结束。

# 4 算法分析

本文给出的算法已在 Visual C<sup>++</sup>环境下编程 实现,图 8 为由该算法得到的分区加权 V 图的实 例,其中 m<sub>i</sub>=3,(i=1,2,…,n)且每个生成元三个不 同扇区的圆心角均为 $\frac{2}{3}\pi$ 。本算法调用了正弦和余 弦函数进行画点,计算量较大,当生成元数目增多以 后,生成分区加权 V 图的速度较慢。所以,在算法 的速度上,还应该进一步改进。在程序中当生成元 三个扇区的颜色值相等,以及所有生成元的权重均 相等时,所生成的图形为一般 V 图;当生成元三个 扇区的颜色值相等,权重也相等,但生成元与生成元 之间权重不完全相等时,生成的是加权 V 图。



8

大学出版社,2002

- 2 Foss S, Zuyev S. On a Voronoi aggregative process related to a bivariate Poisson process [J]. Adv. in Appl. Probab, 1996, 28:965 ~ 981
- 3 Edelsbrunner H. Smooth surfaces for multi scale shape representation [A]. In: proc. 15<sup>th</sup> Conf. Found. Softw. Tech. Theoret. Comput. Sci.. volum 1026 of Lecture Notes Comput. Sci.. 1995.391 ~ 412
- 4 Baccelli F, Gloaguen C, Zuyev S. Superposition of planar voronoi tessellations [J]. Comm. Statist. Stoch. Models,

2000,16(1):69~98

- 5 Baccelli F, Zuyev S. Poisson Voronoi spanning trees with applications to the optimization of communication networks [J]. Oper. Res, 1999, 47(4)
- 6 尚志恩,徐宁. Voronoi 图在蜂窝制移动通信系统中的应用 [J].电子技术,2002,1:37~39

(上接第 67 页)

波段图像,并经过重采样后的遥感库中的图像的灰 度范围为0至255,共256个灰度级,因此它的灰度 共生矩阵为256×256的矩阵,计算量比较大。因此 我们在计算灰度共生矩阵以前将图像的灰度转化为 0至63。

(4) 图像分块。因为图像在较小区域中往往有较相似的纹理特征,子块中的纹理特征比较均匀,所以我们将遥感数据库中的图像分块,使其子块的大小为8×8,然后计算每一子块的四个方向的共生矩阵,及每个矩阵的6个特征。

3.3 纹理特征提取结果

同样我们也通过用所提取的纹理特征对多源遥 感图像进行提取实验,用提取效果来评价使用共生 矩阵描述图像纹理表达图像区域特征的效果。

两幅图像之间的匹配采用如下方法<sup>[5]</sup>:

设两幅图像 A 和 B,其每一子块纹理特征间的 差异定义为:

$$D_{r}(A,B) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} |f_{ij}(A) - f_{ij}(B)| \qquad (1)$$

式中 i=1,2,3,4,表示每个纹理的 4 个共生矩阵;j =1,2,…,6,表示每个共生矩阵的 6 个参量;f 是共 生矩阵的每个参量的参量值。

设每幅图像被分割成 M×N个子块,图像纹理 特征间的差异,定义如下:

$$D_{ST} = \sum_{y=1}^{N} \sum_{x=1}^{M} D_r(A_{xy}, B_{xy}) / (MN)$$
(2)

式中, x 和 y 表示块的位置。

两幅图像越相似, D<sub>ST</sub>越小。设 S(A,B) = -D<sub>ST</sub>,在进行图像检索时,将数据库中的每幅图像与 待检索图像的 S 计算出来,并对其进行归一化。

经过大量的试验,证明该提取过程查全率达 95%以上。

大多遥感图像都具有比较明显的纹理特征,基 于纹理特征对多源遥感数据进行提取与基于形状轮 廓进行多源遥感数据进行提取相比较,适用性更广。

- 7 张有会.线段加权的 V 图[J].计算机学报,1995,11:822~ 829
- 8 Waranabe T, Murashima S. A method to construct a voronoi diagram on 2 ~ D digitized space O(1) computing time[J].
  Faculty of Engineering, Kagoshima University, Kagoshimashi, 1996, J79 D I(3): 114 ~ 122

在纹理特征描述的各种方法中,用共生矩阵的各个统计特征对遥感图像纹理特征进行描述,方法比较简单,速度比较快,而且效果也比较理想。因此,利用共生矩阵的各个特征描述的纹理特征进行多源遥感图像区域提取是可行的。

### 4 实验结果分析比较

通过以上两个实验,我们对两种多源遥感图像 区域提取方法进行比较,得出如下结论

 利用基于矩特征的形状轮廓特征进行多源 遥感图像提取只适用于有明显区域轮廓的遥感图 像,适用范围比较窄。使用纹理特征对多源遥感图 像进行提取使用范围比较宽,也可以提取有明显区 域轮廓遥感图像,效果也比较理想。

2. 当待提取图像和遥感数据库中的图像包含的是同一地区,但区域范围大小不同时,使用矩特征表示形状轮廓容易造成漏选。但使用纹理特征时,我们采用分块搜索技术,此时提取效果要比基于形状特征的搜索效果要好。

 基于矩特征进行多源遥感图像区域分析时 不受图像分辨率大小的影响,但分辨率直接决定纹 理的粗细程度,需要通过降低分辨率来提高提取效 果。

使用矩特征表示的形状轮廓和共生矩阵描述纹 理特征进行多源遥感图像提取各有利弊,两者之间 可以互相补充,共同用于多源遥感图像的提取。

#### 参考文献

1 中国优秀博硕士学位论文全文数据库

- 2 章毓晋.基于内容的视觉信息检索.科学出版社,2003.88 ~89
- 3 彭望琭.遥感数据的计算机处理与地理信息系统.北京师 范大学出版社,1991.50~56
- 4 章毓晋.基于内容的视觉信息检索.科学出版社,2003.98 ~99
- 5 黄学军,杨恒新,王伟.利用图像纹理特征的图像检索.红 外与激光工程,2002,31(6):497