

稀疏规则条件下的相似插值推理研究^{*})

王天江 卢正鼎 李凡

(华中科技大学计算机学院 武汉430074)

摘要 模糊推理本质上就是插值器。但在稀疏规则库的条件下,当输入的事实落入规则“空隙”时,采用传统的CRI方法是得不到任何推理结果的。而采用KH线性插值推理也存在着难以保证推理结果的凸性和正规性等。为了在稀疏规则条件下能有好的插值推理结果,提出了一种相似插值推理方法。该方法能较好地保证推理结果隶属函数的凸性和正规性,这为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

关键词 模糊集,相似插值,稀疏规则库,模糊推理

Research on Similarity Interpolative Reasoning for the Sparse Fuzzy Rule

WANG Tian-Jiang LU Zheng-Ding LI Fan

(College of Computer Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract Fuzzy reasoning is really equal to a interpolation. But when rule base is sparse, we can not get any reasoning result by traditional CRI method for an observation is in the gap between two neighboring antecedents. It is also difficult to keep convexity and normality using KH linear interpolative reasoning method. In order to get better result when rule base is sparse, we propose a similarity interpolative reasoning method which can keep the convexity and normality of the reasoning result better. It devotes a useful tool for fuzzy reasoning in intelligent systems.

Keywords Fuzzy set, Similarity interpolation, Sparse rule base, Fuzzy reasoning

1 引言

模糊推理^[1]是模糊控制,模糊专家系统,模糊决策支持系统等智能系统中的重要组成部分。例如模糊假言推理(FMP)我们通常将它表示成如下形式:

$$\begin{array}{l} \text{规则: IF } x \text{ is } A \quad \text{THEN } y \text{ is } B \\ \text{事实: } \quad \quad \quad x \text{ is } A^* \\ \hline \text{结论: } \quad \quad \quad y \text{ is } B^* \end{array}$$

其中 A, A^* 以及 B, B^* 都是模糊概念,它们分别是论域 U 和 V 上的模糊集。更一般地,上述推理可写成如下形式:

$$\begin{array}{l} \text{规则: } A \Rightarrow B \\ \text{事实: } A^* \\ \hline \text{结论: } B^* \end{array}$$

为了解决模糊推理的问题,Zadeh于1975年提出了合成

推理规则(CRI)^[2],其推理机制可以表示成如下形式: $B^* = A^* \circ (A \Rightarrow B)$,其中,“ \circ ”表示合成运算符。

合成推理(对模糊控制而言)对隶属函数的基本要求是:1)隶属函数必须是正规的凸模糊集;2)隶属函数在遵从语意顺序的情况下应有一定的重叠,即论域中的每个点应该属于至少一个隶属函数的区域,同时它一般应该属于至多不超过两个隶属函数的区域。要使模糊控制模块更平滑地操作,在具体设计中应慎重地选择重叠率和重叠鲁棒性的值。

只有满足上述要求,采用CRI方法才能得到满意的推理结果,如图1所示。后来有学者已经证明采用插值法也可得到与CRI方法相同的推理结果,即模糊推理本质上就是插值器^[3]。

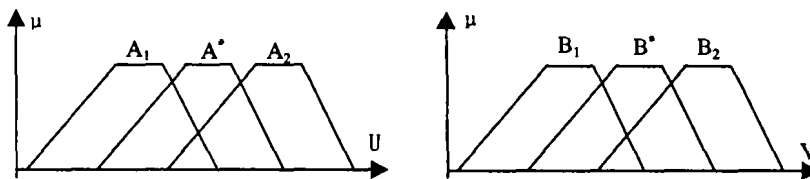


图1 模糊推理的一般表示

然而,当模糊规则库呈稀疏状态时,即规则库不能完全覆盖输入论域,两个相邻规则的前件之间就会出现“空隙”。这样,当输入事实落入规则前件的“空隙”时,采用传统的CRI方法就不能得到任何推理结果。为了解决这个问题,Koczy和Hirota在文[4,5]中提出了一种线性插值推理方法。使用这种

推理方法是为了当输入事实落在规则前件的“空隙”中时,也可以获得推理结果。但遗憾的是,在许多情况下,采用该方法所得到的推理结果的隶属函数是非凸的。所以在很多实际应用中,很难采用文[4,5]所提出的方法在稀疏规则条件下来进行插值推理。

^{*})本课题得到国家高性能计算基金(00303)和华中科技大学科学研究基金(M99015)资助。王天江 博士,副教授,主要研究领域为人工智能,面向信息网络的智能应用,模糊推理,遗传算法。卢正鼎 教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助软件工程,智能信息系统。李凡 教授,主要研究领域为人工智能,模糊信息处理,自动推理,遗传算法。

为了在稀疏规则条件下能有好的插值结果,本文提出了一种相似插值推理方法,使得在模糊规则库呈稀疏的状态时,无论模糊规则 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ 的前件与后件,以及输入事实 A^* 的隶属函数是梯形还是其他形状,采用这种相似插值推理方法所得到的插值推理结论 B^* 都将是保形的正规凸模糊集。为了讨论的方便,先定义如下几个概念。

定义1 假定 A_1, A_2 是论域 U 上的模糊集,若 $A_1 \cap A_2 = \phi$ 。则称 A_1, A_2 是不相连的。

定义2 假定 $A = \{A_i \Rightarrow B_i | 0 < i \leq n\}$ 为规则库 (A_i 为模糊规则前件),假定 $A_1 < A_2 < \dots < A_n$,若存在 $0 < i < n, A_i, A_{i+1}$ 是不相连的,则称规则库 A 是稀疏的。

定义3 假定 $A = \{A_i \Rightarrow B_i | 0 < i \leq n\}$ 为规则库 (A_i 为模糊规则前件),假设 $A_1 < A_2 < \dots < A_n$,若对于任意的 $0 < i < n, A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$,则称规则库 A 是稠密的。

2 KH 线性插值推理机制的分析

Koczy 和 Hirota 在文[4,5]中提出的线性插值推理(简称为 KH 线性插值推理)的基本机理可简述如下:

定义4 假定 A_1, A_2 是论域 U 上的模糊集,且 $A_1 < A_2$,即对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$,有 $\inf\{A_{1\alpha}\} < \inf\{A_{2\alpha}\}, \sup\{A_{1\alpha}\} < \sup\{A_{2\alpha}\}$ 则 α 截集 $A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$ 之间的下限距离和上限距离分别定义如下:

$$d_L(A_{1\alpha}, A_{2\alpha}) = d(\inf\{A_{1\alpha}\}, \inf\{A_{2\alpha}\}) \quad (1)$$

$$d_U(A_{1\alpha}, A_{2\alpha}) = d(\sup\{A_{1\alpha}\}, \sup\{A_{2\alpha}\}) \quad (2)$$

其中 d 是欧氏距离,或者更一般地可以是闵可夫斯基距离。

定义5 假定 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$, 是论域 $U \times V$ 上的不相连的两个模糊规则, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是 U 和 V 上的模糊集,假定 A^* 是论域 U 上的一个输入事实,如果 $A_1 < A^* < A_2$, 则

$$\begin{aligned} \inf\{B_{\alpha}^*\} &= y(\alpha) = \frac{[(k-k_1)\alpha + (a-a_1)](h_2\alpha + b_2) + [(k_2-k)\alpha + (a_2-a)](h_1\alpha + b_1)}{(k_2-k_1)\alpha + (a_2-a_1)} \\ &= \frac{[h_1(k_2-k) + h_2(k-k_1)]\alpha^2 + [b_1(k_2-k) + b_2(k-k_1) + h_1(a_2-a) + h_2(a-a_1)]\alpha + [b_1(a_2-a) + b_2(a-a_1)]}{(k_2-k_1)\alpha + (a_2-a_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

若在式(6)中分别代入隶属函数的右斜率和右端点,也可得到类似于式(7)的公式。图2给出了模糊规则和输入事实的

两个模糊规则之间的线性插值定义为:

$$d_L(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*) : d_L(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha}) = d_L(B_{1\alpha}, B_{\alpha}^*) : d_L(B_{\alpha}^*, B_{2\alpha}) \quad (3)$$

$$d_U(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*) : d_U(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha}) = d_U(B_{1\alpha}, B_{\alpha}^*) : d_U(B_{\alpha}^*, B_{2\alpha}) \quad (4)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$, 将式(1)和式(2)分别代入式(3)和式(4),即可得到:

$$\inf\{B_{\alpha}^*\} = \frac{d_L(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*)\inf\{B_{2\alpha}\} + d_L(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha})\inf\{B_{1\alpha}\}}{d_L(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*) + d_L(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha})} \quad (5)$$

$$\sup\{B_{\alpha}^*\} = \frac{d_U(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*)\sup\{B_{2\alpha}\} + d_U(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha})\sup\{B_{1\alpha}\}}{d_U(A_{1\alpha}, A_{\alpha}^*) + d_U(A_{\alpha}^*, A_{2\alpha})} \quad (6)$$

这种线性插值的本质是分别考虑模糊集隶属函数的左边和右边,使得输入事实 A^* 的隶属函数的左边和右边与两个相邻规则前件 A_1, A_2 的隶属函数的左边和右边对应点的水平距离,分别跟推理结论 B^* 的隶属函数的左边和右边与这两个规则后件 B_1, B_2 的对应点的水平距离成比例。

当在两个不相连的模糊规则 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ 的两个前件 A_1, A_2 之间插入一个与 A_1, A_2 不相连的输入事实 A^* 时,对于式(5),(6)给出的所有 $\inf\{B_{\alpha}^*\}$ 和 $\sup\{B_{\alpha}^*\} \alpha \in [0, 1]$,运用分解原理,可以得到推理结论 B^* 。特别当模糊规则 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ 和 A^* 是梯形(或三角形)隶属函数时,式(5)和(6)可以表示成如下的一种简单形式。

令 A_1, A^* 和 A_2 的左斜率为 $1/k_1, 1/k$ 和 $1/k_2, B_1$ 和 B_2 的左斜率为 $1/h_1$ 和 $1/h_2$, 且左端点分别为 $a_1 = \inf\{A_{1\alpha}\}, a = \inf\{A_{\alpha}^*\}, a_2 = \inf\{A_{2\alpha}\}, b_1 = \inf\{B_{1\alpha}\}, b_2 = \inf\{B_{2\alpha}\} (\alpha = 0)$, 则式(5)可写成如下形式:

隶属函数为梯形的情况时, KH 线性插值推理的几何解释。

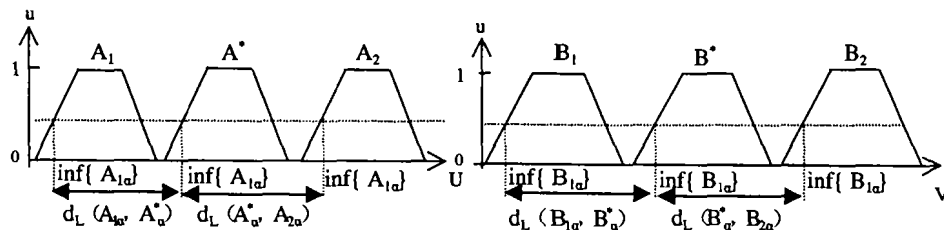


图2 梯形隶属函数下的 KH 线性插值推理

让我们仔细分析一下 Koczy 和 Hirota 的线性插值推理,式(7)一般来说是一个双曲函数,也就是说,在许多情况下,插值结果 B^* 是一个非凸的模糊集。甚至有时候 B^* 还不是模糊集。这是因为 $\inf\{B_{\alpha}^*\} < \inf\{B_{\beta}^*\}$ (或者 $\sup\{B_{\alpha}^*\} > \sup\{B_{\beta}^*\}$)

这样的极端情形在实际应用中是经常会遇到的,如图3所示。导致这一结果的原因是这种线性插值推理方法要求有无限多个对应点的水平距离成比例。这样苛刻的条件必然会导致上面所讨论的情形出现。

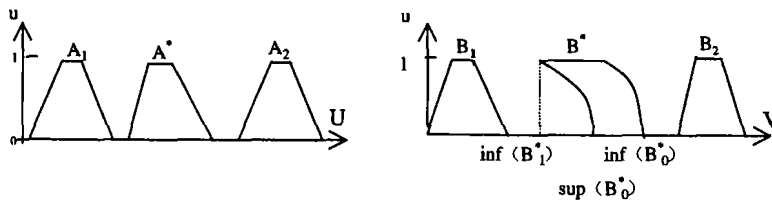


图3 KH 线性插值的插值结果

3 相似插值推理方法

为了在任何条件下都能进行插值推理,我们提出了一种相似插值推理方法。在这个方法中,综合考虑两条推理规则之间的关系,以输入事实所围成的面积与规则前件所围成的面积的比例,以及它们的重心的水平距离的比例关系为插值依据。

定义6 假定 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2$ 是论域 $U \times V$ 上的不相连的两个模糊规则,且 A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是 U 和 V 上的模糊

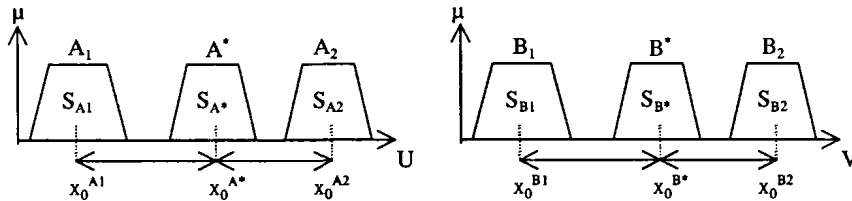


图4 相似插值方法的几何说明

根据面积的定义我们有

$$S_{A1} = \int \mu_{A1}(x) dx$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_{B2} = \int \mu_{B2}(x) dx$$

$$\dots \dots \dots$$
(10)

重心我们可按下式求出:

$$x_0^{A1} = \frac{\int x \mu_{A1}(x) dx}{\int \mu_{A1}(x) dx}$$

$$\dots \dots \dots$$
(11)

$$x_0^{B2} = \frac{\int x \mu_{B2}(x) dx}{\int \mu_{B2}(x) dx}$$

通过式(10)的计算即可得到面积 S_{A1}, \dots, S_{B2} , 然后将它们代入式(8), 则式(8)就可变成如下形式:

$$S_{B^*} = S_{A^*} \cdot (S_{B1} + S_{B2}) / (S_{A1} + S_{A2})$$
(12)

通过式(11)的计算即可得到重心 $x_0^{A1}, \dots, x_0^{B2}$, 然后将它们代入式(9), 则式(9)就可变成如下形式:

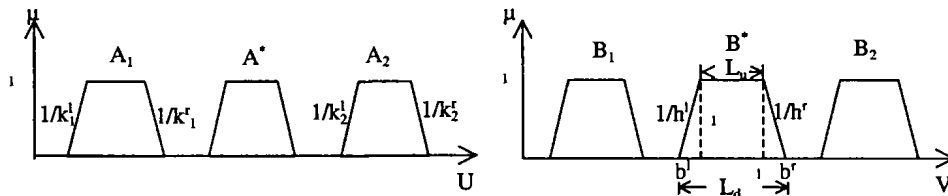


图5 B*隶属函数的构造图

(2)通过面积公式求出推理规则前件与后件隶属函数所围成的面积 $S_{A1}, S_{A2}, S_{B1}, S_{B2}$ 。

(3)通过面积求出上底与下底。由式(12)得到 S_{B^*} , 根据梯形面积公式有

$$L_u = (2S_{B^*} - h' - |h''|) / 2$$

而 $L_d = h' + L_u + |h''|$

(4)确定 B^* 的隶属函数的左右边斜率。在插值意义下,推理规则前件的隶属函数可以看作是插值的基函数,推理规则后件的隶属函数在插值中只出现其峰点^[3]。根据这个观点,设 B^* 的隶属函数的左右边斜率的初始值为 A_1, A_2 的左右边斜率的平均值,即

$$1/h' = (1/k_1' + 1/k_2') / 2$$

$$1/h'' = (1/k_1'' + 1/k_2'') / 2$$

由于 L_u 依赖于 h' 和 h'' , 为了保证 $L_u > 0$, 要进行如下的迭代过程:

集, 设 A^* 是论域 U 上的输入事实, 如果 $A_1 < A^* < A_2$ 且 $x_0^{A1}, x_0^{A^*}, x_0^{A2}, x_0^{B1}, x_0^{B^*}$ 和 x_0^{B2} 分别是 A_1, A^*, A_2, B_1, B^* 和 B_2 的重心。 $S_{A1}, S_{A^*}, S_{A2}, S_{B1}, S_{B^*}, S_{B2}$ 分别是 A_1, A^*, A_2, B_1, B^* 和 B_2 的隶属函数所围成的面积, 则两个模糊规则之间的相似插值定义为:

$$S_{A^*} : (S_{A^*} + S_{A1} + S_{A2}) = S_{B^*} : (S_{B^*} + S_{B1} + S_{B2})$$
(8)

$$(x_0^{A^*} - x_0^{A1}) : (x_0^{A2} - x_0^{A^*}) = (x_0^{B^*} - x_0^{B1}) : (x_0^{B2} - x_0^{B^*})$$
(9)

图4给出了相似插值方法的几何说明。

$$x_0^{B^*} = \frac{(x_0^{A^*} - x_0^{A1})x_0^{B2} + (x_0^{A2} - x_0^{A^*})x_0^{B1}}{x_0^{A2} - x_0^{A1}}$$
(13)

这样,相似插值推理方法的推理过程就成为了确定隶属函数所围的面积以及它的重心的过程。当隶属函数为梯形(或三角形)时,求面积和重心变得很简单,从而确定 B^* 的隶属函数的计算量很小。而在模糊控制等智能系统中的隶属函数均为梯形(或三角形),所以这种相似插值推理方法保证了在智能系统的应用中的小计算量。若隶属函数采用梯形时,则可采用如下的步骤进行插值:

(1)构造 B^* 的隶属函数的形状。为了使 B^* 保形,即 B^* 与 B_1, B_2 同形,例如 B_1, B_2 为梯形,则 B^* 也应为梯形。设 B^* 的左右边斜率分别为 $1/h', 1/h''$, 左右端点分别为 b', b'' 。 B^* 的隶属函数左边为 $x = h'\mu + b'$, 右边为 $x = h''\mu + b''$, 上底为 L_u , 下底为 L_d , 为使 B^* 是正规模糊集,则应取高为1,如图5所示。

如果 $L_u > 0$ 则退出这个迭代过程, 否则, h' 和 h'' 分别减去一个相同的比例。

(5)通过重心求出 b' 和 b'' 。首先通过式(13)可得到 $x_0^{B^*}$, 再根据重心定义有:

$$x_0^{B^*} = \frac{\int_{[b', b'']} x u_{B^*}(x) dx}{\int_{[b', b'']} u_{B^*}(x) dx}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}h'' - \frac{1}{2}h' + L_d)b' - \frac{1}{6}(h')^2 + \frac{1}{6}(h'')^2 + \frac{1}{2}h'L_d + \frac{1}{2}L_d^2}{S_{B^*}}$$

所以 B^* 的左端点 b' 为

$$b' = \frac{6x_0^{B^*} S_{B^*} + (h')^2 - (h'')^2 - 3h'L_d - 3L_d^2}{3h'' - 3h' + 6L_d}$$

而 B^* 的右端点 b'' 为

$$b^r = b^l + L_d$$

从而得到 B^* 的隶属函数:

$$\mu = \begin{cases} (1/h^l)(x-b^l) & (b^l \leq x \leq b^l + h^l) \\ 1 & (b^l + h^l \leq x \leq b^r - |h^r|) \\ (1/|h^r|)(x-b^r) & (b^r - |h^r| \leq x \leq b^r) \end{cases}$$

4 实例分析

下面给出一个实际例子。例如,假设两推理规则前件的隶属函数的左右边斜率分别为 $1/3, -1/3; 1/3, -1/3$, 输入事实的隶属函数的左右边斜率分别为 $1, -1$, 两推理规则后件的隶属函数的左右边斜率分别为 $1/2, -1/2; 1/2, -1/2$, 按照上面的计算步骤有:

根据面积公式,推理规则前件与后件以及输入事实的隶属函数所围成的面积为:

$$\begin{aligned} S_{A_1} &= ((4-3)+(7-0)) \times 1/2 = 4 \\ S_{A_2} &= ((20-19)+(23-16)) \times 1/2 = 4 \\ S_{B_1} &= ((3-2)+(5-0)) \times 1/2 = 3 \\ S_{B_2} &= ((24-22)+(26-20)) \times 1/2 = 4 \\ S_{A^*} &= ((10-9)+(11-8)) \times 1/2 = 2 \end{aligned}$$

根据式(12)可得到 B^* 的隶属函数所围成的面积:

$$S_{B^*} = 2 \times (3+4) \div (4+4) = 1.75$$

根据式(11)可得推理规则前件与后件以及输入事实隶属函数的重心:

$$\begin{aligned} x_0^{A_1} &= 3.5 \\ x_0^{A^*} &= 9.5 \\ x_0^{A_2} &= 19.5 \\ x_0^{B_1} &= 2.5 \\ x_0^{B_2} &= 23 \end{aligned}$$

根据式(12)可得 B^* 的重心:

$$\begin{aligned} x_0^{B^*} &= ((9.5-3.5) \times 23 + (19.5-9.5) \times 2.5) \div (19.5 - 3.5) \\ &= 10.1875 \end{aligned}$$

确定 B^* 的隶属函数的左右边斜率:

h^l 和 h^r 的初值分别为 3 和 -3, 设迭代减少率为 10%, 经过 5 次迭代得 h^l 和 h^r 为 1.5 和 1.5, 左右边斜率分别为: $1/h^l = 1/1.5; 1/h^r = -1/1.5$ 。

B^* 的上底与下底为:

$$\begin{aligned} L_u &= (2S_{B^*} - h^l - |h^r|) \div 2 = (2 \times 1.75 - 1.5 - 1.5) \div 2 \\ &= 0.25 \\ L_d &= h^l + L_u + |h^r| = 1.5 + 0.25 + 1.5 = 3.25 \end{aligned}$$

B^* 的 b^l 和 b^r 为:

$$\begin{aligned} b^l &= (6 \times 10.1875 \times 1.75 + 1.5^2 - 1.5^2 - 3 \times (-1.5) \times 3.25 - 3 \times 3.25^2) \div (3 \times (-1.5) - 3 \times 1.5 + 6 \times 3.25) \\ &= 8.5625 \\ b^r &= b^l + L_d = 8.5625 + 3.25 = 11.8125 \end{aligned}$$

通过以上计算得到相似插值推理的推理结果,如图6(3)所示。为了便于比较,图6(2)给出了按 KH 的线性插值推理方法所获得的推理结果,从图6(2)中可看出,采用 KH 线性插值推理方法所得到的推理结果是一个非凸模糊集。这也表明 KH 线性插值推理方法在许多情况下是不适用的。而我们提出的相似插值推理方法在任何情况下都能得到满意的推理结果。

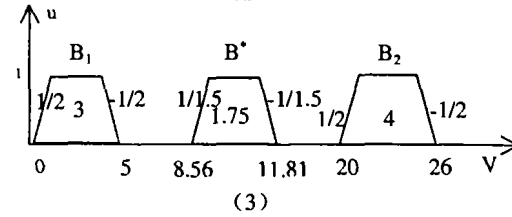
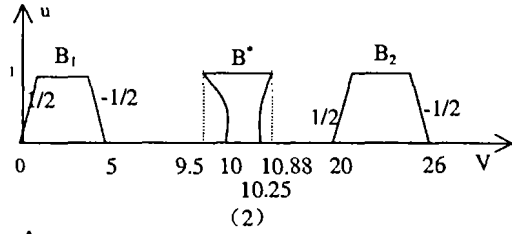
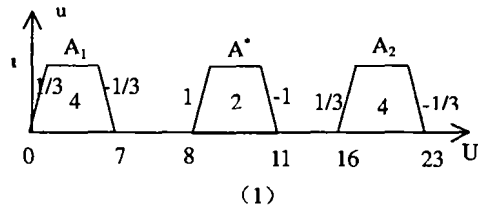


图6 插值推理的比较分析

在上面的讨论中,隶属函数均采用梯形形式,如果采用三角形时,计算方法是相同的,但计算过程将更简单一些,这是因为要确定的因素比梯形隶属函数要少。

结论 Koczy 和 Hirota 提出的线性插值推理方法的推理结果在许多情况下是非凸的,甚至不是模糊集。这就使得 KH 方法在实际应用中受到很多限制。本文在相似性原理的基础上,提出的相似插值推理方法从输入事实的隶属函数所围面积占两个推理规则前件的隶属函数所围面积之和的比入手,要求它与推理结果所围面积占两个推理规则后件的隶属函数所围面积之和的比相等,以及它们的重心的水平距离成比例,从而保证了推理结果的凸性和正规性,而且是保形的。这就使得在稀疏规则条件下,采用我们的方法可得到满意的插值推理结果。这为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

参考文献

- 1 李凡. 模糊信息处理系统. 北京: 北京大学出版社, 1998
- 2 Zadeh L A. The Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning Part I, II, III, Information Science, 1975, 8: 199~251, 301~357, 1975, 9: 43~80
- 3 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E辑), 1998, 28(3): 259~267
- 4 Koczy L T, Hirota K. Interpolative reasoning with insufficient evidence in sparse fuzzy rule bases. Information Sciences, 1993, 71(1,2): 169~201
- 5 Koczy L T, Hirota K. Approximate reasoning by linear rule interpolation and general approximation. International Journal of Approximate Reasoning, 1993, 9(3): 197~225