

多 Agent 系统的排队模型研究(2)^{*}

——模型理论

李凡长¹ 余玉梅²

(苏州大学计算机科学与技术学院 苏州215006)¹ (云南民族大学数学与计算机学院 昆明650031)²

摘要 多 Agent 系统是人工智能、软件领域等研究的热点问题,在这个问题的研究中,人们普遍关注的问题是如何组织协调 Agent 之间的关系,让各个 Agent 充分发挥作用,使系统处于最佳状态,本文抓住多 Agent 之间的这个关键问题。给出了多 Agent 系统的排队模型的基本概念,为进一步研究多 Agent 系统奠定了理论基础。

关键词 生灭过程,排队模型,多 Agent 系统

Research on a Queuing Model of Multi-Agent(二)

——Model Theories

LI Fan-Zhang¹ SHE Yu-Mei²

(College of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006)¹

(College of mathematics and computer, Yunnan University of the Nationalities, Kunming 650031)²

Abstract Multi-agent system research has attracted increasing attention on artificial intelligence field, software field, etc. In research on this problem, the people universally concern following questions: how to organize and coordinate relations among agents, which bring agent into full play and make system to be the best state. In this paper, the concept of queuing model of multi-agent is proposed. By the research of this model theory, this paper has abundantated the content of multi-agent.

Keywords Birth and death processes, Queuing model, Multi-agent system

文[1~5]从不同的角度研究了多 Agent 的一些基本理论及应用成果。从目前的研究及应用情况来看,专家们一致认为: Agent 系统之所以没有取得重大突破,其关键的问题是 Agent 系统中还缺乏理论基础,有许多本质问题还未得到满意的结果。如在多 Agent 系统中的协调机制等问题,基于这些客观事实,文[9]建立了多 Agent 系统的排队模型的基本概念。本文作进一步研究,主要研究多 Agent 系统同步、异步、部分服务台同步和部分服务台异步的 M/M/c 排队。

1. 同步休假 M/M/c 排队

在参数 λ 和 μ 的经典 M/M/c 排队中,引入下列同步多重休假策略:一旦系统变成空的,所有 c 个服务台同时进入随机长度 V 的休假期。如果休假结束时系统内仍有 Agent 顾客, c 个服务台同步开始另一次独立同分布的休假,直到某次休假结束遇到有 $j \geq 1$ 个 Agent 顾客等待, c 个服务台同时返回主系统。若 $1 \leq j \leq c-1$, 返回的服务台中有 j 个开始接待 Agent 顾客,另外 $c-j$ 个处在通常的空闲状态;若遇 $j \geq c$, 返回的所有服务台同时开始为 Agent 顾客服务。同步休假策略适用于多个服务台由一个 Agent 操作员统一看管的情况。例如,若把每一个终端看成是一个 Agent 服务台,中心 Agent 的停顿相当于所有终端同步休假;多台机器(Agent)共用一个配电装置,配电设备的中断相当于所有机器同步休假;对一个多泊位的港口,因大雾或台风中断所有码头的作业,也可看成所有泊位同步休假。多 Agent 同步休假排队模型有着明确的应用背景。

设休假时间 V 服从参数 θ 的指数分布,休假时间独立于到达间隔和服务时间,FCFS 排队规则。 $L_v(t)$ 表示时刻 t 系统中 Agent 顾客数, $J(t)$ 定义如下:

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处在非休假状态,} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 服务台处在休假状态.} \end{cases}$$

$\{(L_v(t), J(t))\}$ 是一个 QBD 过程,有状态空间 $\Omega = \{0, 1\} \cup \{(k, j); k \geq 1, j = 0, 1\}$.

过程的状态转移机制如图1所示。其生成元形如文[9]中的(1.2.2),其中 $A_0 = -\lambda, C_0 = (0, \lambda), B_1 = (\mu, 0)^T, C_1 = C_2 = \dots = C_{c-1} = C = \lambda I, I$ 是二阶单位阵,并且

$$A_k = \begin{bmatrix} -(\lambda + k\mu) & 0 \\ \theta & -(\lambda + \theta) \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq c-1;$$

$$B_k = \begin{bmatrix} k\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2 \leq k \leq c;$$

$$A = \begin{bmatrix} -(\lambda + C\mu) & 0 \\ \theta & -(\lambda + \theta) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

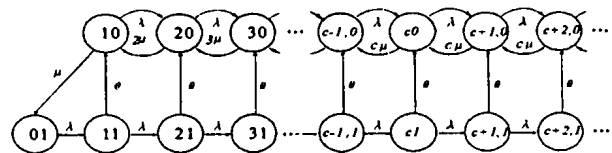


图1 多 Agent 同步多重休假 M/M/c 排队的状态转移

定理1.1 若 $\rho = \lambda(c\mu)^{-1} < 1$, 矩阵方程 $R^2B + RA + C = 0$

^{*} 本文的研究得到江苏省自然科学基金(BK2002040)和江苏省教育厅自然科学基金(02KJB520001)资助。李凡长 教授,主要研究方向是人工智能,动态模糊智能理论,智能软件等。余玉梅 副教授,主要研究方向是人工智能,动态模糊逻辑等。

有最小非负解

$$R = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ \rho & \frac{\lambda}{\lambda+\theta} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

证明: A, B, C 都是下三角阵, 可设

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

代入矩阵方程, 得到元素的方程组

$$\begin{cases} c\mu r_{11}^2 - (\lambda + c\mu)r_{11} + \lambda = 0, \\ -(\lambda + \theta)r_{22} + \lambda = 0, \\ c\mu(r_{11} + r_{22})r_{21} - (\lambda + c\mu)r_{21} + \theta r_{22} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

为得到最小非负解, 在(1.2)前式中取 $r_{11} = \rho < 1$ (另一根是 $r_{11} = 1$), 第二个方程给出 $r_{22} = \lambda(\lambda + \theta)^{-1}$. 这些结果代入后式得(1.1).

由(1.1)可知 $\rho(R) < 1$ 当且仅当 $\rho < 1$. 进一步地, 由文[9]中的定理1.3.2可以证明过程正常返当且仅当 $\rho < 1$.

定理1.2 $\rho < 1$ 时, $\{L_v(t), J(t)\}$ 的稳态极限 (L_v, J) 的分布是

$$\pi_{k1} = K \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^k, k \geq 0, \quad (1.3)$$

$$\pi_{k0} = \begin{cases} K \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \varphi_k, 1 \leq k \leq c-1, \\ \pi_{c-1,0} \rho^{k-c+1} + \rho \pi_{c-1,1} \sum_{j=0}^{k-c} \rho^j \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{k-c-j}, k \geq 0. \end{cases}$$

其中

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{k-1} i! \left(\frac{\mu}{\lambda + \theta} \right)^i, 1 \leq k \leq c-1,$$

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^{c-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \varphi_k + \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \frac{\lambda + \theta}{\theta} \left[1 + \frac{\rho}{1-\rho} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \right] \right\}^{-1}.$$

证明: 生成元 \tilde{Q} 中每一个含 $-(\lambda + \theta)$ 的列都只有这一个非零元素, 由平衡方程立刻给出 π_{k1} 的表达式. 由文[9]中的定理1.3.2的矩阵几何解表示, 我们有

$$\pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}) = (\pi_{c-1,0}, 0, \pi_{c-1,1}) R^{k-c+1}, k \geq c-1.$$

将(1.1)中的 R 代入上式, 得到(1.3)后式. 只需再确定 $\pi_{k0}, \dots, \pi_{c-1,0}$ 和常数 K. 由平衡方程, 它们满足

$$\begin{cases} 2\mu\pi_{20} - \lambda\pi_{10} = \mu\pi_{10} - K \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right) \theta, \\ (j+1)\mu\pi_{j+1,0} - \lambda\pi_{j0} = j\mu\pi_{j0} - \lambda\pi_{j-1,0} - K \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^j \theta, j=2, \dots, c-1. \end{cases} \quad (1.4)$$

递推地求解方程组(1.4)给出(1.3)中 $\pi_{k0} (1 \leq k \leq c-1)$ 的表达式. K 由正规化条件确定.

由定理1.2出发, 可给出多 Agent 同步多重休假 M/M/c 排队系统的各种稳态指标. 稳态下任意时刻系统中 Agent 顾客数的分布是

$$P\{L_v = 0\} = \pi_{01}, P\{L_v = k\} = \pi_{k1} + \pi_{k0}, k \geq 1.$$

还可以得到排队等待 Agent 顾客数和等待时间的分布. 然而, 这些分布的表达式相当繁杂, 既不便于应用也不便于与经典 M/M/c 排队的稳态指标进行比较. 为了给出随机分解结果, 引入条件随机变量

$$Q_v^{(c)} = \{L_v - c | L_v \geq c, J = 0\},$$

$$W_v^{(c)} = \{W_v | L_v \geq c, J = 0\}.$$

其中 $Q_v^{(c)}$ 是已知服务台全忙条件下系统中排队等待 Agent 顾客数, $W_v^{(c)}$ 是已知 Agent 顾客到达遇服务台全忙的条件等待时间. 对 $Q_v^{(c)}$ 和 $W_v^{(c)}$ 成立着下列简明而直观的随机分解结果[6,7].

定理1.3 $\rho < 1$ 时, 对条件排队 Agent 顾客数 $Q_v^{(c)}$ 成立着形如 $Q_v^{(c)} = Q_d^{(c)} + Q_d, Q_d^{(c)}(z) = Q_d^{(c)}(z)Q_d(z); W_v^{(c)} = W_d^{(c)} + W_d, \tilde{W}_v^{(c)}(s) = \tilde{W}_d^{(c)}(s)\tilde{W}_d(s)$ 的随机分解, 其中附加队长 Q_d 服从修正的几何分布:

$$P\{Q_d = k\} = \begin{cases} \frac{\rho}{\sigma} \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\theta} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right) \right\}, k=0, \\ \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^k, k \geq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

常数 σ 可表为

$$\sigma = \rho \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\theta} \right\}.$$

证明: 由(1.3)后式, 服务台全忙的概率是

$$P\{L_v \geq c, J = 0\} = \sum_{k=c}^{\infty} \pi_{k0} = \pi_{c-1,0} \sum_{k=c}^{\infty} \rho^{k-c+1} + \rho \pi_{c-1,1} \sum_{k=c}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-c} \rho^j \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{k-c-j} = \frac{\rho}{1-\rho} K \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\theta} \right\} = \frac{\sigma}{1-\rho} K.$$

条件随机变量 $Q_v^{(c)}$ 的分布可写成

$$P\{Q_v^{(c)} = j\} = P\{L_v = c + j | L_v \geq c, J = 0\} = \frac{1-\rho}{K\sigma} \pi_{c+j,0}, j \geq 0 \quad (1.6)$$

对(1.6)式取 PGF, 应用(1.3)后式, 我们有

$$Q_v^{(c)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P\{Q_v^{(c)} = j\} = \frac{1-\rho}{\sigma} \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+c} \rho^{j+c-1} + \rho \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+c} \sum_{i=0}^{j+c} \rho^i \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{j+c-i} \right\} = \frac{1-\rho}{1-z\rho} \frac{\rho}{\sigma} \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\lambda + \theta - \lambda z} \right\} = Q_d^{(c)}(z)Q_d(z),$$

其中

$$Q_d(z) = \frac{\rho}{\sigma} \left\{ \frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\lambda + \theta - \lambda z} \right\}. \quad (1.7)$$

将(1.7)展成 z 的幂级数, 给出(1.5).

还可以对上述条件随机分解给出进一步的结构分析. (1.5)表明, 附加队长 Q_d 是两个随机变量的混合: $Q_d = (1 - \rho^*)X_0 + \rho^*X$, 其中 X_0 是以概率 1 取零值的退化随机变量, X 服从参数 $\lambda(\lambda + \theta)^{-1}$ 的几何分布, 并且

$$\rho^* = \frac{\rho \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda + \theta}{\theta}}{\sigma}$$

另一方面, 由文[9]中的(1.4.2)式, Q_d 服从一阶离散 PH 分布; 而 $Q_d^{(c)}$ 服从参数 ρ 的几何分布, 从而也服从一个一阶离散 PH 分布. 由此可知, 作为两个离散 PH 分布随机变量的独立和, $Q_v^{(c)}$ 服从二阶离散 PH 分布, 有 PH 表示 (γ, L) , 这里

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = \left[\rho, (1-\rho) \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda}{\theta} \right],$$

$$\gamma_3 = (1-\rho) \frac{\rho}{\sigma} \left[\frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \right],$$

$$L = \begin{bmatrix} \rho & (1-\rho) \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \frac{\lambda}{\theta} \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \end{bmatrix},$$

$$L^0 = \begin{bmatrix} (1-\rho) \frac{\rho}{\sigma} \left[\frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta} \right)^{c-1} \right] \\ \frac{\theta}{\lambda + \theta} \end{bmatrix},$$

定理1.4 $\rho < 1$ 时, 对条件等待时间 $W_v^{(c)}$ 成立着随机分

解 $Q_0^{(c)} = Q_0^{(c)} + Q_d, Q_0^{(c)}(z) = Q_0^{(c)}(z)Q_d(z); W_0^{(c)} = W_0^{(c)} + W_d,$
 $\bar{W}_0^{(c)}(s) = \bar{W}_0^{(c)}(s)\bar{W}_d(s)$, 其中附加延迟 W_d 服从修正的指数的分布, 有分布函数

$$W_d(x) = P\{W_d < x\} = 1 - \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{\lambda}{\theta} e^{-\frac{c\rho}{\lambda + \theta}x}, x \geq 0, \quad (1.8)$$

证明: Agent 顾客到达遇状态 $(j, 0), j \geq c$, 条件等待时间 $W_{c,j}$ 有 LST,

$$\bar{W}_{c,j}(s) = \left(\frac{c\mu}{s + c\mu}\right)^{j-c+1}, j \geq c,$$

于是 $W_0^{(c)}$ 的 LST 是

$$W_0^{(c)}(s) = \frac{1-\rho}{K\sigma} \sum_{j=c}^{\infty} \pi_{j,0} \left(\frac{c\mu}{s + c\mu}\right)^{j-c+1} \quad (1.9)$$

将(1.3)后式代入(1.9)计算, 给出

$$\bar{W}_0^{(c)}(s) = \frac{c\mu(1-\rho)}{s + c\mu(1-\rho)} \frac{\rho}{\sigma} \left[\frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{(\lambda + \theta)(s + c\mu)}{(\lambda + \theta)(s + c\mu) - \lambda c\mu} \right] = \bar{W}_d(s)$$

容易验证

$$\begin{aligned} \bar{W}_d(s) &= \frac{\rho}{\sigma} \left[\frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{(\lambda + \theta)(s + c\mu)}{(\lambda + \theta)(s + c\mu) - \lambda c\mu} \right] \\ &= \frac{\rho}{\sigma} \left[\frac{1}{(c-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1} \varphi_{c-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} + \frac{\lambda}{\theta} \frac{c\mu\theta(\lambda + \theta)^{-1}}{s + c\mu\theta(\lambda + \theta)^{-1}} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

正是分布(1.8)的 LST.

(1.10)表明, 附加延迟 $W_d = (1 - q^*)X_0 + q^*X$, 是两个随机变量的混合, 其中 X_0 是退化到零的随机变量, X 服从参数 $c\mu\theta(\lambda + \theta)^{-1}$ 的指数分布, 并且

$$q^* = \frac{\rho \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{\lambda}{\theta}}{\sigma}$$

类似于 $Q_0^{(c)}, W_0^{(c)}$ 服从二阶连续 PH 分布, 并可由定理 1.1 给出其 PH 表示. 由定理 1.3 和 1.4, 有服务台全忙条件下的均值公式

$$\begin{aligned} E(Q_0^{(c)}) &= \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\theta^2}, \\ E(W_0^{(c)}) &= \frac{\rho}{c\mu(1-\rho)} + \frac{\rho}{c\mu\sigma} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^{c-1} \frac{\lambda(\lambda + \theta)}{\theta^2}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

将(1.11)与 $E(Q_0^{(c)}) = \frac{\rho}{1-\rho}, E(W_0^{(c)}) = \frac{\rho}{c\mu(1-\rho)}$ 比较, 休假系统与经典 M/M/c 排队的区别与联系变得清晰而明快.

2. 多 Agent 异步休假 M/M/c 排队

多 Agent 异步休假指每一个服务台可以个别地开始或终止休假. 如果一个服务台完成某个服务, 遇系统中无 Agent 顾客等待, 该服务台将单独地进入休假状态. 一个正在休假的服务台结束休假时系统内仍无等待的 Agent 顾客, 它就接续另一次独立同分布的休假, 称这种机制为异步多重休假. 设休假时间服从参数 θ 的指数分布, 并独立于到达间隔和服务时间, FCFS 排队规则. 多重休假策略主要应用于最大限度地利用空闲服务台从事辅助工作, 从而增加系统收益.

假设 $L_n(t)$ 表示休假系统内时刻 t 的 Agent 顾客数, $J(t)$ 表示时刻 t 正在工作的服务台数. $\{L_n(t), J(t)\}$ 是一个 QBD 过程, 有状态空间 $\Omega = \{(k, j): 0 \leq k \leq c-1, 0 \leq j \leq k\} \cup \{(k, j): k \geq c, 0 \leq j \leq c\}$. 过程的生成元仍如文[9]中的(1.2.2)所示, 其中 $A_0 = -\lambda, C_0 = (\lambda, 0), B_1 = (0, \mu)^T, A_k$ 是 $k+1$ 阶方阵, $1 \leq k \leq c-1; B_k$ 和 C_k 分别是 $(k+1) \times k$ 和 $(k+1) \times (k+$

2) 矩阵, 它们可表为

$$A_k = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & & & & \\ & -h_1 & (c-1)\theta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -h_{k-1} & (c-k+1)\theta \\ & & & & & -(\lambda + k\mu) \end{bmatrix},$$

$$1 \leq k \leq c-1,$$

其中, $h_k = \lambda + k\mu + (c-k)\theta, 0 \leq k \leq c$, 并有

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \mu & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (k-1)\mu & & \\ 0 & 0 & \dots & k\mu & & \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq c-1.$$

生成元中的 A, B, C 都是 $C+1$ 阶方阵, 它们是

$$A = \begin{bmatrix} -h_0 & c\theta & & & & \\ & -h_0 & (c-1)\theta & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -h_{c-1} & \theta \\ & & & & & -h_c \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag}(0, \mu, \dots, c\mu), C = \lambda I,$$

并且 $B = B$. 过程的状转移如图 2 所示.

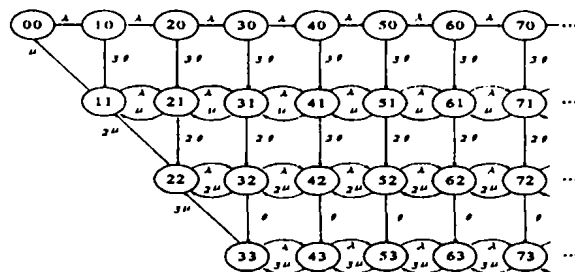


图 2 多 Agent 异步休假 M/M/c 排队的状态转移 ($c=3$)

定理 2.1 若 $\rho = \lambda(c\mu)^{-1} < 1$, 方程

$$k\mu z^2 - [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]z + \lambda = 0, 1 \leq k \leq c \quad (2.1)$$

有两个实根 $r_k < r_k^*, 0 < r_k < 1, r_k^* \geq 1$.

证明: 讨论方程的判别式 $q_k = [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]^2 - 4k\mu\lambda$, 可知方程确有两个实根

$$r_k(r_k^*) = \frac{1}{2k\mu} \{ \lambda + k\mu + (c-k)\theta - (+) \sqrt{q_k} \},$$

显然成立着下列不等式:

$$[\lambda - k\mu + (c-k)\theta]^2 < q_k < [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]^2, \lambda > k\mu \text{ 时};$$

$$[k\mu - \lambda + (c-k)\theta]^2 < q_k < [\lambda + k\mu + (c-k)\theta]^2, k\mu > \lambda \text{ 时}.$$

分 $\lambda > k\mu$ 和 $k\mu > \lambda$ 两种情况, 将这些估计代入 r_k 和 r_k^* 的表达式, 得到

$$0 < r_k < 1, r_k^* > 1, 1 \leq k \leq c-1.$$

最后, 当 $k=c$ 时, 方程(2.1)的两个根是 $r_c = \rho$ 和 $r_c^* = 1$.

定理 2.2.2 $\rho < 1$ 时, 矩阵方程 $R^2B + RA + C = 0$ 有最小非负解

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_{01} & \dots & r_{0c} \\ & r_1 & \dots & r_{1c} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_c \end{bmatrix},$$

其中 $r_0 = \lambda(\lambda + c\theta)^{-1}, r_1, \dots, r_c$ 是方程(2.1)在 $(0, 1)$ 内的根, $r_c = \rho$. R 的非对角元素满足递推关系

例(异步多重休假的 M/M/c 排队)

$$r_1(r_1^*) = \frac{1}{2\mu} [\lambda + \mu + \theta - (+) \sqrt{(\lambda + \mu + \theta)^2 - 4\lambda\mu}],$$

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1, r_0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta}$$

定理 2.2 给出

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\lambda + 2\theta} & \frac{2\theta}{\mu} \frac{r_0}{r_1^* - r_0} & \rho & \frac{\theta}{\mu} \frac{1}{1 - r_1 r_1^* - r_0} \\ 0 & r_1 & & \frac{\theta}{2\mu} \frac{1}{1 - r_1} \\ 0 & 0 & & \rho \end{bmatrix},$$

求解方程组 (2.5) 给出

$$\pi_0 = K, \pi_1 = K\beta_1 = K\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\theta}, \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

$$\pi_2 = K\beta_2 = K(\beta_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}),$$

这里

$$\beta_{20} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\theta}\right)^2,$$

$$\beta_{21} = \frac{\lambda}{\mu} r_1 + \frac{2\theta}{\mu} \frac{r_0^2}{r_1^* - r_0},$$

$$\beta_{22} = \frac{\theta}{2\mu} \frac{1}{1 - r_1} \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{r_1^* - r_0} \left(\frac{\lambda}{\mu} + r_0(1 - r_1)\right),$$

$$K = \left\{ \frac{\lambda}{\mu} + \frac{2(\lambda + \theta)}{\lambda + 2\theta} + \beta_2(I - R)^{-1}e \right\}^{-1}.$$

3. 多 Agent 系统中部分服务台同步休假 M/M/c 排队

在前两节的模型中,所有的服务台空闲时都可进入休假状态.对多服务台系统,只允许一定数量的服务台休假,另一些服务台即使空闲也不能休假,随时可供 Agent 顾客利用,有时这才是更好的选择.事实上,在许多应用场合,既使发生

空闲也不允许所有的服务台休假.例如救护中心、巡警系统、火车站售票处等等.另一方面,适当选取允许休假的服务台数,可更好地兼顾系统服务及休假期內设置辅助工作两者的效益,有利于改善系统的运行指标.本节讨论允许 d 个服务台休假的多 Agent M/M/c 排队, $0 \leq d \leq c$. $d=0$ 时是经典 M/M/c 排队, $d=c$ 时归结为前两节所有服务台可以休假的情况.

对参数 λ 和 μ 的经典 M/M/c 排队,引入下列部分服务台同步休假策略:设 $1 \leq d \leq c$, 当一个服务完成时刻.若在场 Agent 顾客数减少为 $c-d$, 则空出来的 d 个服务台同步开始休假.另外 $c-d$ 个服务台即使进一步发生空闲也不能休假,随时可供顾客使用.当 d 个服务台完成一次休假时,系统中 Agent 顾客数仍不超过 $c-d$ (没有等待的 Agent 顾客), d 个服务台将同步进入另一次休假;否则,同时返回主系统开始接待 Agent 顾客.假定休假时间 V 服从参数 θ 的指数分布,并独立于到达间隔与服务时间,FCFS 排队规则.

还有一些细节需稍作说明.若同步终止休假时系统有 j 个 Agent 顾客在场, $c-d < j < c$, 返回的服务台中将有 $j-c+d$ 个立刻开始接待 Agent 顾客,并有 $c-j$ 个处在通常的空闲状态;若 $j \geq c$, 返回的 d 个服务台同时开始服务,并仍有 $j-c$ 个 Agent 顾客排队等待.与单服务台休假系统不同,即使有 d 个服务台正在休假,仍有 $c-d$ 个继续从事服务.因此,部分服务台休假期间,系统内 Agent 顾客数即可以增加,也可能减少.

以 $L_n(t)$ 表示时刻 t 系统内 Agent 顾客数.并设

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 有 } d \text{ 个服务台休假,} \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 没有休假的服务台.} \end{cases}$$

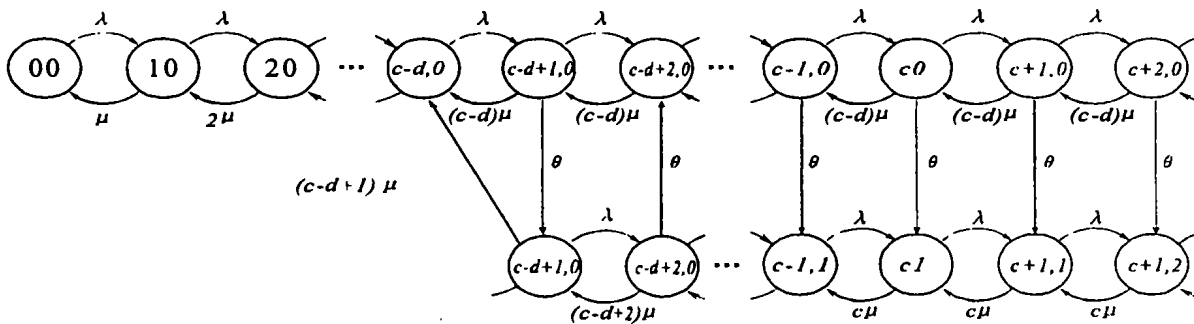


图 4 d 个服务台同步多重休假 M/M/c 排队的状态转移 ($d < c$)

$\{L_n(t), J(t)\}$ 是一个 QBD 过程,有状态空间

$$\Omega = \{(k, 0) : 0 \leq k \leq c-d\} \cup \{(k, j) : k > c-d, j=0, 1\}.$$

注意到在状态 $(c-d+1, 1)$ 上发生一个 Agent 顾客离去,过程转移到 $(c-d, 0)$ 上,并且 d 个服务台此时开始休假.过程的生成元仍如文[9]中的 (1.2.2) 所示,图 4 是这一系统的状态转移机制.

现在:

$$A_k = \begin{cases} -(\lambda + k\mu), & 0 \leq k \leq c-d, \\ \begin{pmatrix} -(\lambda + (c-d)\mu + \theta) & \theta \\ 0 & -(\lambda + k\mu) \end{pmatrix}, & c-d < k \leq c. \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} k\mu, & 1 \leq k \leq c-d, \\ (c-d)\mu \\ (c-d+1)\mu \end{pmatrix}, & k = c-d+1, \\ \begin{pmatrix} (c-d) & 0 \\ 0 & k\mu \end{pmatrix}, & c-d+1 < k \leq c. \end{cases}$$

$$C_k = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq k < c-d, \\ (\lambda, 0), & k = c-d, \\ \lambda I, & c-d < k \leq c. \end{cases}$$

B, A, C 都是二阶方阵,可表为

$$B = \begin{pmatrix} (c-d)\mu & 0 \\ 0 & c\mu \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -[\lambda + (c-d)\mu + \theta] & \theta \\ 0 & -(\lambda + c\mu) \end{pmatrix}, C = \lambda I.$$

以 r 和 r^* 表示二次方程

$$(c-d)\mu x^2 - [\lambda + (c-d)\mu + \theta]x + \lambda = 0 \quad (3.1)$$

的两个根, $0 < r < 1, r^* > 1$.现在可以给出过程的率阵.

定理 3.1 $\rho = \lambda(c\mu)^{-1} < 1$ 时,矩阵方程文[9]中的 (1.3.3) 有最小非负数

$$R = \begin{bmatrix} r & \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

证明: A、B、C 都是上三角阵, 可设

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

代入矩阵方程文[9]中的(1.3.3), 给出

$$\begin{cases} (c-d)\mu r_{11} - [\lambda + (c-d)\mu + \theta]r_{11} + \lambda = 0, \\ c\mu r_{22} - (\lambda + c\mu)r_{22} + \lambda = 0, \\ c\mu r_{12}(r_{11} + r_{22}) + \theta r_{11} - (\lambda + c\mu)r_{12} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

为得到最小非负数, 取 $r_{11} = r$ 是方程(3.1)在(0,1)内的根, 在(3.3)第二式中取 $r_{22} = \rho$, 这些结果代入(3.3)后式给出(3.2)。

显然, $\text{sp}(R) = \max(r, \rho) < 1$ 当且仅当 $\rho < 1$ 。

定理3.2 率阵 R 满足 $RBe = \lambda e$, 对 r 成立关系式

$$\lambda + \theta + (c-d)\mu(1-r) = \frac{\theta}{1-\gamma} + (c-d)\mu = \frac{\lambda}{\gamma}. \quad (3.4)$$

证明: 用 e 右乘方程文[9]中的(1.3.3)两端, 注意到 $Ae = -(\lambda e + Be)$, 给出

$$R^2 Be - R(\lambda e + Be) + \lambda e = 0,$$

$$(I-R)(\lambda e - RBe) = 0.$$

因 $I-R$ 可逆, 有 $RBe = \lambda e$. 文[9]中的(1.3.4)可由 $RBe = \lambda e$ 及文[9]中的(1.3.2)通过简单运算给出, 也可由方程文[9]中的(1.3.1)直接得到。

当 $\rho < 1$ 时, (L_n, J) 表示过程 $(L_n(t), J(t))$ 的稳态极限. 使

$$\begin{cases} -\lambda\pi_{00} + \mu\pi_{10} = 0, \\ \lambda\pi_{j-1,0} - (\lambda + j\mu)\pi_{j0} + (j+1)\mu\pi_{j+1,0} = 0, 1 \leq j \leq c-d, \\ \lambda\pi_{c-d-1,0} - [\lambda + (c-d)\mu]\pi_{c-d,0} + (c-d)\mu\pi_{c-d+1,0} + (c-d+1)\mu\pi_{c-d+1,1} = 0, \\ \theta\pi_{c-d+1,0} - [\lambda + (c-d+1)\mu]\pi_{c-d+1,1} + (c-d+2)\mu\pi_{c-d+2,1} = 0, \\ \lambda\pi_{j-1,0} - [\lambda + (c-d)\mu + \theta]\pi_{j0} + (c-d)\mu\pi_{j+1,0} = 0, c-d < j \leq c-1, \\ \lambda\pi_{j-1,1} - \theta\pi_{j0} - (\lambda + j\mu)\pi_{j1} + (j+1)\mu\pi_{j+1,1} = 0, c-d+1 < j \leq c-1, \\ \lambda\pi_{c-1,0} - (\lambda + \theta + (c-d)\mu(1-r))\pi_{c0} = 0, \\ \lambda\pi_{c-1,1} + \frac{\theta}{1-r}\pi_{c0} - c\mu\pi_{c1} = 0. \end{cases}$$

其中 $\pi_j = K(\beta_{j0}, \beta_{j1}) = (\pi_{j0}, \pi_{j1}), c-d+1 \leq j \leq c$. 求解该方程组, 并反复使用关系式(3.4)或给出 β_{j0} 和 β_{j1} 的表达式, $j=c-d+1, \dots, c$. 最后, K 由正规化条件表出。

由定理3.3出发, 可解析地给出多 Agent 系统中部分服务台同步多重休假 M/M/c 排队中各种稳定指标. 然而这些分布表达式十分繁杂. 下面给出系统中的条件随机分解. 设

$$Q_v^{(c)} = \{L_v = c \mid L_v \geq c, J=1\},$$

$$W_v^{(c)} = \{W_v \mid L_v \geq c, J=1\}.$$

定理3.4 对条件排队 Agent 顾客数 $Q_v^{(c)}$ 成立着随机分解 $Q_v^{(c)} = Q_0^{(c)} + Q_d$, $Q_v^{(c)}(z) = Q_0^{(c)}(z)Q_d(z); W_v^{(c)} = W_0^{(c)} + W_d$, $\tilde{W}_v^{(c)}(s) = \tilde{W}_0^{(c)}(s)\tilde{W}_d(s)$, 附加队长 Q_d 有 PGF,

$$Q_d(z) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{z(1-r)}{1-zr} \right\}, \quad (3.6)$$

其中常数

$$\sigma = \beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0}.$$

证明: 由定理3.3的结果, 服务台全忙的概率是

$$P\{L_v \geq c, J=1\} = \sum_{k=c}^{\infty} \pi_{k1} = K\beta_{c1} \sum_{k=c}^{\infty} \rho^{k-c} + K \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \beta_{c0} \sum_{j=c+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-c-1} r^k \rho^{j-c-1-k} = \frac{K}{1-\rho} \left(\beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \right) = \frac{\sigma}{1-\rho} K.$$

服务台全忙条件下的排队 Agent 顾客数 $Q_v^{(c)}$ 的分布可写成

$$P\{Q_v^{(c)} = j\} = P\{L_v = c+j \mid L_v \geq c, J=1\} = \frac{\sigma}{1-\rho} \left\{ \beta_{c1} \rho^j + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \beta_{c0} \sum_{k=0}^{j-1} r^k \rho^{j-1-k} \right\}, j \geq 0 \quad (3.7)$$

用矩阵几何解方法, 可以给出系统的稳态分布:

定理3.3 $\rho < 1$ 时, (L_n, J) 的分布可表为

$$\begin{aligned} \pi_{j0} &= K \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j, 0 \leq j \leq c-d, \\ \pi_j &= K(\beta_{j0}, \beta_{j1}), c-d < j \leq c, \\ \pi_{j0} &= K\beta_{c0} \rho^{j-c}, j > c, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\pi_{j1} = K\beta_{c1} \rho^{j-c} + K\beta_{c0} \frac{\theta r}{c\mu(1-\gamma)} \sum_{i=0}^{j-c-1} \gamma^i \rho^{j-c-1-i}, j > c,$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_{j0} &= \frac{1}{(c-d)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{c-d} r^{j-(c-d)}, c-d+1 \leq j \leq c \\ \beta_{j1} &= \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \frac{\theta r}{\lambda(1-\gamma)} \left[1 + \frac{1}{(c-d)!} \sum_{i=1}^{j-(c-d)-1} (c-d+i)! \left(\frac{r\mu}{\lambda} \right)^i \right], \end{aligned}$$

$$K = \left\{ \sum_{j=0}^{c-d} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j + \sum_{j=c-d+1}^{c-1} (\beta_{j0} + \beta_{j1}) + (\beta_{c0}, \beta_{c1})(I-R)^{-1} e \right\}^{-1}.$$

证明: 由文[9]中的定理1.3.2的矩阵几何解表示, 我们有

$$\pi_k = K(\beta_{k0}, \beta_{k1}) R^{k-c}, k \geq c,$$

并且 $\pi_{00}, \dots, \pi_{c-d,0}, (\beta_{c-d+1,0}, \beta_{c-d+1,1}), \dots, (\beta_{c0}, \beta_{c1})$ 是文[9]中的方程组(1.3.9)的正解. 文[9]中的(1.3.9)可改写成

(3.7)中 $j=0$ 时约定空和为零. 对(3.7)取 PGF, 我们有

$$\begin{aligned} Q_v^{(c)}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{Q_v^{(c)} = j\} z^j = \frac{1-\rho}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} \sum_{j=0}^{\infty} (z\rho)^j + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \beta_{c0} \sum_{j=1}^{\infty} z^j \sum_{k=0}^{j-1} r^k \rho^{j-1-k} \right\} = \frac{1-\rho}{\sigma} \left\{ \frac{\beta_{c1}}{1-z\rho} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \beta_{c0} z \sum_{j=0}^{\infty} (zr)^j \sum_{k=j+1}^{\infty} (z\rho)^{j-1-k} \right\} = \frac{1-\rho}{1-z\rho} \frac{1}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{z(1-r)}{1-zr} \right\} = Q_v^{(c)}(z) Q_d(z). \end{aligned}$$

(3.6)式表明, 附加队长 Q_d 是两个随机变量的混合. Q_d 以概率 $p^* = \sigma^{-1} \beta_{c1}$ 等于零, 以概率

$$1-p^* = \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0}$$

等于一个服从参数 r 的几何分布的随机变量加1。

定理3.5 $\rho < 1$ 时, 对条件等待时间 $W_v^{(c)}$ 成立着随机分解 $Q_v^{(c)} = Q_0^{(c)} + Q_d, Q_v^{(c)}(z) = Q_0^{(c)}(z)Q_d(z); W_v^{(c)} = W_0^{(c)} + W_d$, $\tilde{W}_v^{(c)}(s) = \tilde{W}_0^{(c)}(s)\tilde{W}_d(s)$, 其中附加延迟 W_d 有 LST,

$$\tilde{W}_d(s) = \frac{1}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{c\mu(1-r)}{s + c\mu(1-r)} \right\}. \quad (3.8)$$

证明: 稳态下 Agent 顾客到达遇状态 $(k, 1), k \geq c$, 条件等待时间有 LST,

$$\tilde{W}_{k1}(s) = \left(\frac{c\mu}{s + c\mu} \right)^{k-c+1}, k \geq c$$

$W_v^{(c)}$ 的 LST 可计算如下:

$$\tilde{W}_v^{(c)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Q_v^{(c)} = k\} \left(\frac{c\mu}{s + c\mu} \right)^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-\rho}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} \left(\frac{c\mu}{s+c\mu} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c\mu\rho}{s+c\mu} \right)^k + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)} \beta_{c0} \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{c\mu}{s+c\mu} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c\mu\rho}{s+c\mu} \right)^k \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{c\mu\rho}{s+c\mu} \right)^{j-k-1} \right\} \\
 &= \frac{1-\rho}{\sigma} \left\{ \frac{c\mu\beta_{c1}}{s+c\mu(1-\rho)} + \frac{\theta r\beta_{c0}}{c\mu(1-r)} \times \right. \\
 &\quad \left. \frac{c\mu}{s+c\mu(1-r)s+c\mu(1-\rho)} \right\} \\
 &= \frac{c\mu(1-\rho)}{s+c\mu(1-\rho)} \frac{1}{\sigma} \left\{ \beta_{c1} + \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \right. \\
 &\quad \left. \frac{c\mu(1-r)}{s+c\mu(1-\rho)} \right\} \\
 &= \tilde{W}_d^{(c)}(s) \tilde{W}_d(s).
 \end{aligned}$$

附加延迟 W_d 的 LST (3.8) 式表明, W_d 以概率 $\sigma^{-1}\beta_{c1}$ 等于零, 并以概率 $1-\sigma^{-1}\beta_{c1}$ 服从参数 $c\mu(1-r)$ 的指数分布, 从而 W_d 服从一阶 PH 分布. 由 PH 分布关于卷积的封闭性定理可知, 服务台全忙条件下的等待时间 $W_d^{(c)}$ 服从一个二阶 PH 分布, 有 PH 表示 (γ, L) , 其中 $\gamma=(1, 0)$, 并且

$$L = \begin{Bmatrix} -c\mu(1-\rho) & c\mu(1-\rho) \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \\ 0 & -c\mu(1-r) \end{Bmatrix},$$

$$L^0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sigma} \beta_{c1} c\mu(1-\rho) \\ c\mu(1-r) \end{Bmatrix}.$$

由定理 3.4 和定理 3.5 的随机分解结果, 可给出下列均值公式

$$E(Q_d) = \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \left(1 + \frac{r}{1-r} \right) = \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{1}{1-r},$$

$$E(W_d) = \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{1}{c\mu(1-r)} = \frac{1}{c\mu} E(Q_d),$$

$$E(Q_d^{(c)}) = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{1}{1-r},$$

$$E(W_d^{(c)}) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\sigma} \frac{\theta r}{c\mu(1-r)^2} \beta_{c0} \frac{1}{c\mu(1-r)}.$$

4 多 Agent 系统中部分服务台异步休假 M/M/c 排队

$$A_k = \begin{bmatrix} -h_d & d\theta & & & \\ & -h_{d-1}(d-1)\theta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -h_{c-k-1}(c-k-1)\theta \\ & & & & & -(\lambda+c\mu) \end{bmatrix}_{(k-c+d+1) \times (k-c+d+1)}$$

$$B_c = B, C_{c-1} = C = \lambda I,$$

A, B, C 都是 $d+1$ 阶方阵. A 和 B 可表为

$$A = \begin{bmatrix} -h_d & d\theta & & & \\ & -h_{d-1}(d-1)\theta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -h_1 & \theta \\ & & & & & -(\lambda+c\mu) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} (c-d)\mu & & & & \\ & (c-d+1)\mu & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c\mu \end{bmatrix}.$$

其过程的状态转移率如图 5 所示.

首先讨论率阵 R , 仿照定理 2.1 可以证明, 方程

$$(c-d+k)\mu z^2 - [\lambda + (c-d+k)\mu + (d-k)\theta]z + \lambda = 0, \quad 0 \leq k \leq d, \quad (4.1)$$

有两个实根 $r_k < r_k^*$, $0 < r_k < 1, r_k^* \geq 1$. 当 $k=d$ 时, $r_d = \lambda$

在参数 λ 和 μ 的经典多 Agent 系统 M/M/c 排队中, 引入下列部分服务台异步休假策略. 设 $1 \leq d \leq c$, 服务台完成某 Agent 顾客服务, 并遇系统中有 Agent 顾客等待, 他继续为下一个 Agent 顾客服务; 若遇系统中无 Agent 顾客等待, 可能发生下列两种情况之一: (1) 系统中正在休假的服务台数小于 d , 该服务台开始休假; (2) 系统处于休假状态的服务台数达到 d 个, 该服务不能休假而进入通常的空闲状态. 一个服务台结束休假时系统内仍无 Agent 顾客等待 (在场 Agent 顾客数不超过 $c-d$ 个), 就重新开始另一次独立同分布的休假.

在这一系统中, 任何时刻休假的服务台数不超过 d 个, 至少有 $c-d$ 个服务台随时可供 Agent 顾客利用. 如果系统内有 k 个 Agent 顾客, $0 \leq k \leq c-d$, 此时必有 d 个服务台在休假状态. 并有 $c-d-k$ 个服务台是闲的; 如果 $c-d < k \leq c$, 系统中至少有 $c-k$ 个服务台正在休假. 并且没有空闲的服务台.

$L_v(t)$ 表示时刻 t 系统内 Agent 顾客, $J(t)$ 表示时刻 t 正在休假的服务台数. 休假时间 V 服从参数 θ 的指数分布, 独立于到达间隔和服务时间. FCFS 排队规则. $\{L_v(t), J(t)\}$ 是一个 QBD 过程, 有状态空间.

$$\Omega = \{(k, d): 0 \leq k \leq c-d\} \cup \{(k, j): c-d < k \leq c-1, d \geq j \geq c-k\} \cup \{(k, j): k \geq c, 0 \leq j \leq d\}$$

现在, 同一水平 k 内的状态, 自 $j=d$ 开始按递减的顺序排列, 其生成元, 仍由文 [9] 中的 (1.2.2) 给出, 其中 $A_k = -(\lambda + k\mu)$, $0 \leq k \leq c-d$; $B_k = k\mu$, $1 \leq k \leq c-d$; $C_k = \lambda$, $0 \leq k < c-d$. 记 $h_k = \lambda + (c-k)\mu + k\theta$, $0 \leq k \leq d$, 我们有

$$B_k = \begin{bmatrix} (c-d)\mu & & & & \\ & (c-d+1)\mu & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (k-1)\mu & \\ 0 & 0 & \dots & k\mu & \end{bmatrix}_{(k-c+d+1) \times (k-c+d)} \quad c-d < k \leq c-1.$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & 0 \\ & & \ddots \\ & & & \lambda & 0 \end{bmatrix}_{(k-c+d+1) \times (k-c+d+2)} \quad c-d \leq k < c-1.$$

$$c-d \leq k \leq c-1.$$

$(c\mu)^{-1} = \rho < 1$, 并且 $r_d^* = 1$.

定理 4.1 $\rho < 1$ 时, 文 [9] 中的矩阵方程 (1.3.3) 有最小非负解

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0,d-1} & r_{0d} \\ & r_1 & r_{12} & \dots & r_{1,d-1} & r_{1d} \\ & & r_2 & \dots & r_{2,d-1} & r_{2d} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & r_{d-1} & r_{d-1,d} \\ & & & & & \rho \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

其中对角元素 $r_0, \dots, r_{d-1}, r_d = \rho$ 是方程 (4.1) 在 $(0, 1)$ 内的根, 非对角元素满足

$$(c-d+k)\mu \sum_{i=j}^k r_{ji} r_{ik} - (\lambda + (c-d+k)\mu + (d-k)\theta) r_{jk} + (d-k+1)\theta r_{j,k-1} = 0, \quad 0 \leq j \leq d-1, j+1 \leq k \leq d \quad (4.3)$$

证明与定理2.2完全相似,不再重复。(4.3)是双下标非线性递推关系,由此给出每一个非对角元素的一表达式是十分困难的。但可仿照图3所示的递推格式,以R的对角线元素表

出每一个非对角线元素。因此,定理4.1原则上给出了率阵R的解析表示。

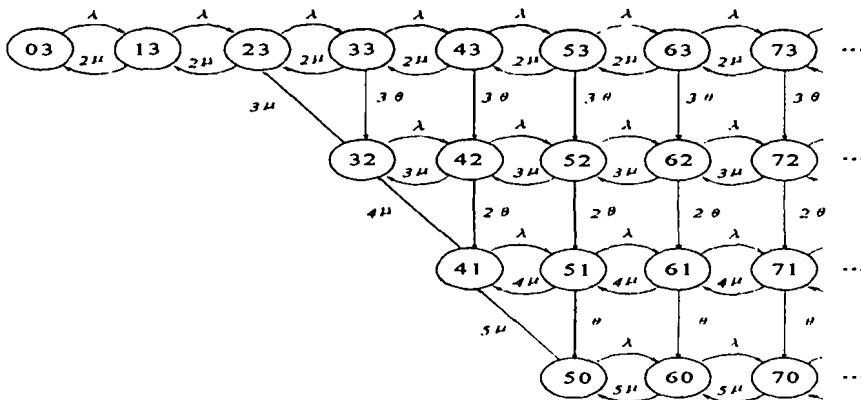


图5 多 Agent 系统中部分服务台异步多重休假 M/M/c 排队的状态转移(c=5,d=3)

以 (L_v, J) 表示过程 $(L_v(t), J(t))$ 的稳态极限,由文[9]中的定理1.3.2可给出稳态分布。

定理4.2 $\rho < 1$ 时, (L_v, J) 的分布可表为

$$\begin{aligned} \pi_k &= K\beta_k = K \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, 0 \leq k \leq c-d, \\ \pi_k &= K\beta_k = K (\beta_{kd}, \beta_{k,d-1}, \dots, \beta_{k,c-k}), c-d+1 \leq k \leq c, \\ \pi_k &= K\beta_k R^{k-c}, k \geq c, \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $\beta_0, \dots, \beta_{c-d}, \beta_{c-d+1}, \dots, \beta_c$ 是文[9]中的方程组(1.3.9)的正解,常数因子K可表为

$$K = \left\{ \sum_{j=0}^{c-d} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \sum_{j=c-d+1}^{c-1} \beta_{j,c-j} + \beta_c (I-R)^{-1} e \right\}^{-1}.$$

为了给出条件随机分解结果,将向量 β_c 及率阵R分块如下:

$$\begin{aligned} \beta_c &= (\beta_{cd}, \beta_{c,d-1}, \dots, \beta_{c1}, \beta_{c0}) = (\delta, \beta_{c0}), \\ R &= \begin{pmatrix} H & \eta \\ 0 & \rho \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将R与(1.5)式比较,方阵H和列向量 η 的意义是显然的,并有 $\text{sp}(H) < 1$ 。现在引入条件排队Agent顾客数和条件等待时间:

$$\begin{aligned} Q_v^{(c)} &= \{L_v - c \mid L_v \geq c, J=0\}, \\ W_v^{(c)} &= \{W_c \mid L_v \geq c, J=0\}. \end{aligned}$$

平行于定理2.4和定理2.5可以证明:

定理4.3 $\rho < 1$ 时,对条件排队顾客数 $Q_v^{(c)}$ 成立随机分解(同定理3.5),其中附加队长 Q_d 有 PGF

$$Q_d(z) = \frac{1}{\sigma} \{ \beta_{c0} + z\delta(I-zH)^{-1}\eta \}. \quad (4.5)$$

常数 σ 可表为

$$\sigma = \beta_{c0} + \delta(I-H)^{-1}\eta$$

证明:将R和 β_c 的分块表示代入(4.4)后式,给出

$$\pi_k = K(\delta H^{k-1}, \beta_{c0}\rho^{k-c} + \delta \sum_{j=0}^{k-c-1} \rho^j H^{k-c-1-j}\eta), k \geq c.$$

由此得到

$$\pi_{k0} = K\beta_{c0}\rho^{k-c} + K\delta \sum_{j=0}^{k-c-1} \rho^j H^{k-c-1-j}\eta, k \geq c.$$

服务台全忙的概率是

$$P\{L_v \geq c, J=0\} = \sum_{k=c}^{\infty} \pi_{k0} = \frac{K}{1-\rho} \{ \beta_{c0} + \delta(I-H)^{-1}\eta \} = \frac{\sigma}{1-\rho} K.$$

于是,条件随机变量 $Q_v^{(c)}$ 的分布可表为

$$P\{Q_v^{(c)} = k\} = P\{L_v = k+c \mid L_v \geq c, J=0\} = \frac{1-\rho}{\sigma} \{ \beta_{c0}\rho^k + \delta \sum_{j=0}^{k-1} \rho^j H^{k-1-j}\eta \}, k \geq 0. \quad (4.6)$$

对(4.6)取 PGF, 给出定理的结论。

将(4.5)中的 PGF 表达式展成z的幂级数,得到 Q_d 的分布

$$P\{Q_d = k\} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \beta_{c0}, & k=0, \\ \frac{1}{\sigma} \delta H^{k-1}\eta, & k \geq 1 \end{cases}$$

因此,附加队长 Q_d 服从一个矩阵几何解的边缘分布, Q_d 服从d阶的离散PH分布。

定理4.4 $\rho < 1$ 时,对条件等待时间 $W_v^{(c)}$ 成立着随机分解 $Q_v^{(c)} = Q_d^{(c)} + Q_d, Q_v^{(c)}(z) = Q_d^{(c)}(z)Q_d(z); W_v^{(c)} = W_d^{(c)} + W_d, \tilde{W}_v^{(c)}(s) = \tilde{W}_d^{(c)}(s)\tilde{W}_d(s)$, 其中附加延迟 W_d 有 LST 是

$$\tilde{W}_d(s) = \frac{1}{\sigma} \{ \beta_{c0} + c\mu\delta(sI - c\mu(H-I))^{-1}\eta \}. \quad (4.7)$$

证明:Agent 顾客到达遇状态 $(k, 0), k \geq c$, 条件等待时间有 LST,

$$\tilde{W}_{k0}(s) = \left(\frac{c\mu}{s+c\mu}\right)^{k-c+1}, k \geq c.$$

于是 $W_v^{(c)}$ 的 LST 可表为

$$\begin{aligned} \tilde{W}_v^{(c)}(s) &= \sum_{k=c}^{\infty} P\{Q_v^{(c)} = k\} \tilde{W}_{k0}(s) = \frac{1-\rho}{\sigma} \{ \beta_{c0} \sum_{k=c}^{\infty} \rho^{k-c} \\ &\quad \left(\frac{c\mu}{s+c\mu}\right)^{k-c+1} + \delta \sum_{k=c+1}^{\infty} \left(\frac{c\mu}{s+c\mu}\right)^{k-c+1} \\ &\quad \sum_{j=0}^{k-c-1} \rho^j H^{k-c-1-j}\eta \} = \frac{c\mu(1-\rho)}{s+c\mu(1-\rho)} \frac{1}{\sigma} \{ \beta_{c0} + \delta(I \\ &\quad - \frac{c\mu}{s+c\mu}H)^{-1}\eta \} = \frac{c\mu(1-\rho)}{s+c\mu(1-\rho)} \frac{1}{\sigma} \{ \beta_{c0} - c\mu\delta \\ &\quad (sI - c\mu(H-I))^{-1}\eta \} = \tilde{W}_d^{(c)}(s)\tilde{W}_d(s). \end{aligned}$$

由定理4.3及定理4.4,容易得到下列均值公式

$$E(Q_v^{(c)}) = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\sigma} \delta(1-H)^{-2}\eta,$$

$$E(W_v^{(c)}) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{c\mu\sigma} \delta(1-H)^{-2}\eta$$

例(2个服务台异步休假 M/M/5排队)

$$c=5, d=2, \rho = \lambda(5\mu)^{-1} < 1.$$

记

$$r_0 = \frac{1}{\sigma\mu} [\lambda + 3\mu + 2\theta - \sqrt{(\lambda + 3\mu + 2\theta)^2 - 12\lambda\mu}].$$

(下转第197页)

